CÔNG PHÁ KĨ THUẬT CASIO

Chữ ký và lời chúc của tác giả hoặc thành viên Lovebook

Chúc bạn thành công!

TÁC GIẢ

Ngọc Huyền LB

THE BEST OR NOTHING

Lời chúc & lời tặng

Đã nói là làm – Đã làm là không hối hận – Đã làm là hết mình – Đã làm là không hối hận!

Đời phải trải qua giông tố nhưng không được cúi đầu trước giông tố!

Đặng Thùy Trâm

Hãy phấn đấu vươn lên không chỉ bằng khối óc mà bằng cả con tim của mình nữa!

Lương Văn Thùy

LOVEBOOK tin tưởng chắc chắn rằng em sẽ đỗ đại học một cách tự hào và hãnh diện nhất!

NGUYỄN NGỌC NAM - NGỌC HUYỀN LB

CÔNG PHÁ KĨ THUẬT CASIO

CUỐN SÁCH GIÚP EM TỰ TIN HƠN KHI HỌC TOÁN LỚP 10-11-12

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (043) 9728806; Tổng biên tập: (04) 397 15011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập xuất bản: ĐINH THỊ PHƯƠNG ANH
Biên tập chuyên ngành: NGUYỄN THỊ HUỆ

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

Trình bày bìa: NGUYỄN SƠN TÙNG

Sửa bản in: LƯƠNG VĂN THÙY – NGUYỄN THỊ HƯƠNG

Đối tác liên kết:
CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP
Địa chỉ: 101 Nguyễn Ngọc Nại, phường Khương Mai, quận Thanh Xuân, Hà Nội

SÁCH LIÊN KẾT

CÔNG PHÁ KĨ THUẬT CASIO

Mã số: 1L – 534 PT2018
In 2000 cuốn, khổ 19 x 27cm tại CÔNG TY CP IN VÀ TRUYỀN THÔNG KẾT THÀNH
Địa chỉ: Số 5 ngách 26/56 đường Cầu Diễn, Phường Phú Diễn, Quận Bắc Từ Liêm, TP Hà Nội.
Số xác nhận ĐKXB: 3737 – 2017/CXB,IPH/16- 351/ĐHQGHN, ngày 19/01/2018
Quyết định xuất bản số: 616 LK-TN/ QĐ – NXBĐHQGHN, ngày 19/01/2018
In xong và nộp lưu chiểu năm 2018.

LỜI MỞ ĐẦU

Các em học sinh và toàn thể các độc giả thân mến!

Năm 2017 là năm đầu tiên mà kì thi tuyển sinh THPT Quốc Gia được thực hiện theo hình thức hoàn toàn mới – hình thức trắc nghiệm. Ngay từ thời điểm phương án thi mới được công bố, trong đầu tôi đặt ra muôn vàn câu hỏi: "Với hình thức này thì giáo viên hiện nay phải xử lý như thế nào? Đề thi sẽ được phân bổ ra sao? Các em học sinh sẽ phải xử lý thế nào với một đề thi có đến 50 câu trắc nghiệm, trong khi đó thời gian chỉ vỏn vẹn 90 phút?", hay "Phải làm sao để có thể giúp các em học sinh vượt qua đề thi nhanh hơn, trong khi bản thân mình chưa từng thử sức với nó?". Quan sát, tìm hiểu trên các trang web, trên mạng xã hội, bản thân tôi chợt nhận ra tầm quan trọng của máy tính cầm tay (MTCT). MTCT giúp xử lý các khâu tính toán quan trọng, phức tạp mà nhiều học sinh khó giải quyết, trong khi đó để khai thác tối đa lợi ích từ một chiếc máy tính thì chưa nhiều em nắm bắt hết được. Qua thời gian, các cuốn tài liệu, các nhóm học tập, các ấn phẩm,... viết về MTCT (casio hay vinacal) lần lượt xuất hiện. Càng tìm hiểu sâu về MTCT, tôi càng bị thu hút bởi nó, những ấp ủ về một cuốn sách viết về MTCT ngày càng được nuôi dưỡng, lớn dần. Chính vì thế, sau khi tham khảo ý kiến từ các thầy cô, bạn bè, cùng với sự giúp đỡ của công ty phát hành – nhà sách Lovebook và đặc biệt là được sự cộng tác từ tác giả Vũ Thị Ngọc Huyền (Ngọc Huyền LB) – một người có kinh nghiệm với huy chương Bạc trong Kì thi "giải Toán trên MTCT Casio cấp Quốc gia", chúng tôi đã bắt tay vào viết cuốn sách "Công phá Casio" (25/06/2017). Và sau hơn 6 tháng miệt mài làm việc, trao đổi, học hỏi, cuối cùng chúng tôi đã hoàn thành xong đứa con tinh thần của mình.

Từ khi bắt tay vào thực hiện viết cuốn sách, chúng tôi đã đặt mục tiêu cho bản thân làm sao cho sản phẩm viết ra có thể không là hay nhất nhưng phải đầy đủ nhất, trình bày khoa học nhất, dễ hiểu nhất và làm sao để giúp ích tối đa cho các em học sinh phổ thông. Để đạt được đến những mục tiêu này, chúng tôi tự đưa ra những câu hỏi dưới đây, đặt ra câu trả lời và thực hiện nó.

Câu hỏi thứ nhất: Giúp được gì cho học sinh? Điểm khác biệt nhất của cuốn sách là gì?

Điểm khác biệt đầu tiên của cuốn sách là giúp "**hệ thống lại toàn bộ các tính năng, các phím chức năng quan trọng có trên MTCT. Các công dụng, cách sử dụng của từng tính năng, phím chức năng được đề cập chi tiết, toàn diện và được tác giả chăm chút, tìm hiểu kỹ lưỡng từ nhiều cuốn giáo trình MTCT của nước ngoài**".

Điểm khác biệt thứ hai là về cấu trúc, "cuốn sách được bố trí với 75% nội dung được viết ở bên phải mỗi trang sách, và 25% còn lại được gọi là các STUDY TIPS với mục đích giải tích – giải nghĩa – hỗ trợ độc giả tìm hiểu sâu hơn về nội dung về nội dung được viết trong phần tương ứng. Điều đó giúp cho bạn đọc có thể nắm chắc hơn các kiến thức mà tác giả mong mỏi truyền đạt đến" (Thầy Đoàn Trí Dũng – Giáo viên luyện thi Đại học môn Toán tại Hà Nội).

Điểm khác biệt thứ ba, "cuốn sách này đúng với tên gọi của nó cho nên 90% các bài toán được giải bằng phương pháp sử dụng MTCT và không đào sâu vào phương pháp tự luận. Tất cả các bài toán đều được hướng dẫn tỉ mỉ, chi tiết và cẩn thận cách bấm máy tính ở phần nội dung trang sách và màn hình hiển thị ở phần STUDY TIPS. Điều đặc biệt là tất cả các ví dụ áp dụng, các bài tập tự luyện đều được giải 100% bằng MTCT. Cuốn sách rất thích hợp với các em học sinh có nhu cầu sử dụng máy tính casio trong việc kết hợp giải toán trắc nghiệm. Đặc biệt đối với những bạn chưa biết nhiều về máy tính casio thì cuốn sách đã làm rất tốt công việc này khi hướng dẫn một cách toàn diện về cách sử dụng máy tính casio như thế nào và làm sao để ưu việt nhất có thể" (Thầy Đoàn Trí Dũng).

Điểm khác biệt thứ tư, "cuốn sách với cách thiết kế phần bài tập tự luyện được chia đôi giống cách thiết kế của các tạp chí toán học giúp cho bạn đọc có được một kho bài tập tự luyện lớn với tỉ lệ "nén" bài rất tốt" (Thầy Đoàn Trí Dũng).

Điểm khác biệt thứ năm, "cuốn sách cung cấp các phần phụ lục với công dụng bổ trợ, tích hợp với nhiều công thức giải nhanh, các hình vẽ đi kèm và các ví dụ áp dụng đối với những công thức khó hình dung".

Điểm khác biệt thứ sáu, "cuốn sách phù hợp với mọi đối tượng học sinh ở thang điểm 6-7-8 có mong muốn sử dụng máy tính để kết hợp giải toán, và là một tư liệu tham khảo tốt với các học sinh ở mức điểm 9-10". (Thầy Đoàn Trí Dũng).

Điểm khác biệt thứ bảy, "cuốn sách có một kho bài tập tự luyện rất lớn nhằm giúp học sinh thành thạo các kỹ năng sử dụng MTCT sao cho thật thuần thục với hướng dẫn giải chi tiết đến từng câu – một điều mà ít cuốn sách khác có được".

Điểm khác biệt cuối cùng, "cuốn sách được tích hợp hệ thống gửi tài liệu qua Mail, tác giả sẽ thường xuyên gửi các tài liệu hay, các kĩ thuật mới, các bài tập bổ sung liên quan đến MTCT để độc giả có thể khai thác triệt để giá trị cuốn sách và đạt được thành tích cao nhất trong kì thi. Bên cạnh đó đây cũng là một cách để đảm bảo quyền lợi cho các quý độc giả sử dụng sách chính hãng".

Câu hỏi thứ hai: Nội dung sách gồm những gì?

Cuốn sách này được chúng tôi viết và chia ra thành hai phần chính như sau:

+ **Phần một – Tổng quan về các tính năng trên MTCT:** Hệ thống lại toàn bộ các tính năng, các phím chức năng một cách chi tiết, đầy đủ nhất về công dụng, cách sử dụng.

+ **Phần hai – Các chủ đề toán sử dụng MTCT:** Gồm 11 chủ đề chính được trình bày xuyên suốt từ lớp 10 cho đến lớp 12; gồm cả đại số, giải tích lẫn hình học. Trong mỗi chủ đề là một hệ thống các ví dụ áp dụng, bài tập tự luyện được giải chi tiết, trình bày một cách tỉ mỉ quy trình bấm máy kèm theo phân tích, nhận xét, lưu ý, mở rộng.

+ Ngoài ra, phần cuối sách cung cấp cho độc giả 3 phụ lục với các kĩ thuật bổ trợ, các công thức giải nhanh kèm ví dụ áp dụng và hướng dẫn, phân tích chi tiết.

Câu hỏi thứ ba: Làm thế nào để sử dụng cuốn sách một cách hiệu quả nhất?

Để sử dụng cuốn sách một cách hiệu quả nhất, tác giả khuyên bạn đọc nên dành thêm thời gian để đọc, tìm hiểu bản chất của các kiến thức trong sách giáo khoa. Bởi mọi kiến thức hình thành nên phương pháp giải casio đều được bắt nguồn từ bản chất của nó. Bên cạnh đó, nếu có điều kiện, bạn đọc nên tham khảo thêm bộ đôi sách "Công phá Toán 2" và "Công phá Toán 3" đã phát hành của nhà sách Lovebook, và làm một số đề thi thử của các trường khác để hình thành thói quen tư duy tự luận. Khi có sự kết hợp giữa tư duy tự luận và tư duy casio thì đề thi THPT Quốc Gia chắc chắn sẽ được xử lý một cách dễ dàng hơn và giúp bạn có được kết quả cao hơn.

Mặc dù chúng tôi đã nỗ lực hết mình để cuốn sách được hoàn thiện nhưng chắc chắn vẫn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, chúng tôi sẽ rất biết ơn nếu có thể nhận được những lời góp ý chân thành từ phía các em học sinh và các quý độc giả trên toàn quốc. Mọi đóng góp xin được gửi về một trong các kênh liên lạc sau:

– **Email:** *namguyen.nnn1708@gmail.com* hoặc *huyenvu2405@gmail.com*

– **Facebook:** *facebook.com/ngocnamnguyennnn* hoặc *facebook.com/huyenvu2405*

– **Group:** *facebook.com/lovebookcaremontoan* (hoặc *facebook.com/groups/ngochuyenfamily*).

– **Tổng đài:** 19002825

Chúng tôi vô cùng cảm tạ! Chúc quý độc giả sẽ có những giây phút thật sự thú vị, bổ ích khi đọc cuốn sách này! Chúc các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh lớp 12 năm học 2017–2018 đạt được kết quả cao nhất trong kì thi THPT Quốc Gia 2018 sắp tới và đỗ vào ngôi trường Đại học, Cao đẳng mà mình hằng mơ ước!

Thay mặt nhóm tác giả

Nguyễn Ngọc Nam

(Sinh viên Trường ĐH KHTN Hà Nội)

LỜI TRI ÂN

Để hoàn thiện một cuốn sách chuyên biệt về MTCT như thế này, chúng tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ từ mọi người. Đầu tiên và quan trọng nhất là gia đình chúng tôi. Ba mẹ, anh chị trong gia đình là những người gần gũi nhất, động viên chúng tôi nhiều nhất mỗi khi gặp khó khăn trong quá trình biên soạn. Chúng tôi thật hạnh phúc và hãnh diện khi được những người thân yêu nhất quan tâm, chăm sóc như vậy. Tiếp theo, chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn tới các thầy cô giáo đã tạo nền tảng và truyền cảm hứng học toán, tìm hiểu về MTCT cho chúng tôi từ khi còn học phổ thông. Đó là cô Nguyễn Thị Thúy Hằng - thầy Trần Hùng Quân - thầy Trương Minh Hùng (Trường THPT Trần Phú) và cô Bùi Thị Nhung (Trường THCS Đông Sơn, Tam Điệp, Ninh Bình), cô Phạm Thị Hòa (Trường THPT Nguyễn Huệ, Ninh Bình). Nếu ngày xưa chúng tôi không được học thầy cô, có lẽ chúng tôi đã không theo đuổi môn Toán như bây giờ.

Lời cảm ơn chân thành tiếp theo, chúng tôi xin gửi tới cô Đỗ Thị Thúy Ngọc (trưởng phòng giáo dục phổ thông tỉnh Ninh Bình), thầy Đoàn Trí Dũng (trung tâm luyện thi Thành Công, Hà Nội. Mặc dù rất bận rộn với công việc trên cơ quan nhưng thầy cô vẫn dành thời gian đọc từng trang, góp ý từng bài để giúp chúng tôi hoàn thiện cuốn sách. Công Phá Casio rất may mắn khi được thầy cô trực tiếp hiệu đính. Một lần nữa, xin cảm ơn thầy cô rất rất rất nhiều. Ngoài ra, chúng tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn tới thầy Lê Bá Bảo – Gv Toán – THPT Đặng Huy Trứ, thầy Nguyễn Trường Sơn – Gv chuyên Toán, tỉnh Ninh Bình, thầy Châu Văn Điệp – Gv Toán THPT Nguyễn Huệ, Ninh Bình, thầy Cao Đắc Tuấn – Gv Toán luyện thi Hà Nội. Những lời góp ý, nhận xét của các thầy đã giúp chúng tôi hoàn thiện cuốn sách rất nhiều.

Một trong những yếu tố rất lớn giúp chúng tôi tự tin với Công Phá Casio chính là việc cuốn sách được đọc duyệt bởi cả tổ Toán THPT Nho Quan A (gồm 9 thầy cô): Phạm Tuấn Nghị (tổ trưởng) - Đặng Việt Đông - Tô Thị Uyến - Nguyễn Trần Thắng - Mai Thị Doan - Trần Thị Hưng - Nguyễn Thị Bích Thủy - Đinh Văn Diện - Nguyễn Văn Luân. Đặc biệt, chúng tôi rất ấn tượng và biết ơn sâu sắc tới thầy Phạm Tuấn Nghị. Trong lúc đọc duyệt giúp chúng tôi, thầy bận coi thi HSG quốc gia ở tỉnh Thái Bình. Tuy nhiên thầy vẫn nhiệt tình in bản thảo để đọc soát giúp chúng tôi trong lúc nghỉ ngơi. Thực lòng, chúng tôi biết ơn thầy cô vô cùng. Chúng tôi mong rằng tổ Toán của THPT Nho Quan sẽ phát triển nhiều hơn, sẽ có thật nhiều những học sinh giỏi Toán hơn.

Lời cảm ơn tiếp theo, chúng tôi xin được gửi tới anh Bùi Thế Việt, anh Dương Trác Việt, anh Nguyễn Thế Lực. Mặc dù còn rất trẻ tuổi nhưng các anh đã chia sẻ và giúp đỡ rất nhiều các em học sinh với những tài liệu, bài giảng miễn phí tâm huyết. Không chỉ có vậy, các anh còn rất nhiệt tình và tốt bụng khi tạo điều kiện cho chúng tôi tham khảo những tài liệu, kĩ năng hay của mình. Các anh chính là những tấm gương tuổi trẻ thành công để chúng tôi noi theo. Cảm ơn nhiều lắm...

Lời cảm ơn đặc biệt cuối cùng, chúng tôi xin được gửi tới em Nguyễn Thị Thu Trang – Hs lớp 12 THPT Gia Viễn A, Ninh Bình. Em Trang là học sinh duy nhất tham gia đọc soát sách giúp chúng tôi. Cứ bản ngày học trên trường, nửa đêm về bắt đầu làm việc, cặm cụi đọc và thực hành lời giải các bài tập trong sách giúp chúng tôi. Với sự tỉ mỉ và chăm chỉ như hiện nay, chúng tôi tin tưởng chắc chắn rằng, em Trang sẽ rất thành công sau này. Cảm ơn em nhiều lắm.

Cuối cùng, chúng tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành và yêu thương nhất tới toàn thể các em học sinh đã và đang follow chúng tôi trên facebook và gmail. Sự tin tưởng và quan tâm của các em dành cho chúng tôi hàng ngày là một liều thuốc bổ vô giá. Nó truyền cho chúng tôi động lực hoàn thiện bản thân mỗi ngày, là niềm hạnh phúc mỗi sáng thức dậy. Tận đáy lòng, chúng tôi mong các em của mình luôn tràn đầy năng lượng để vượt qua mọi gian nan, thử thách của cuộc sống.

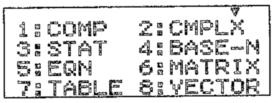
Một lần nữa, Ngọc Huyền LB và Ngọc Nam xin cảm ơn tất cả!

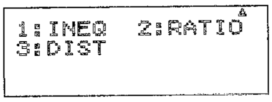
MỤC LỤC

PHẦN 1

Tổng quan về các tính năng Casio

Máy tính CASIO Fx- 570 VN Plus có nhiều tính năng hữu ích giúp cho việc giải toán và trong quá trình học tập môn toán. Trong chương này, tôi xin giới thiệu các tính năng và các chế độ chung của máy tính, giúp cho quý độc giả có thể hình dung rõ hơn việc sử dụng máy tính và các nút lệnh cho các chương sau.

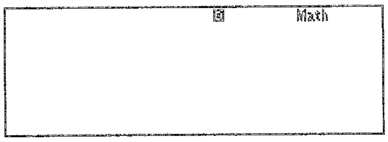




I. GIỚI THIỆU VỀ MÁY TÍNH CẦM TAY fx-570VN Plus

Cửa sổ làm việc chính

Sau khi mở máy tính bằng nút ON, ta sẽ có cửa sổ làm việc hiện ở hình phía dưới



Các chế độ làm việc của máy tính

Các nút lệnh chính	Chức năng chính
MODE 1 (COMP)	COMPutation mode: Tính toán thông thường.
MODE 2 (CMPLX)	CoMPLeX mode: Tính toán với số phức.
MODE 3 (STAT)	STATistical mode: Tính toán thống kê.
MODE 5 (EQN)	EQuatioN solution mode: Giải hệ phương trình và phương trình.
MODE 6 (MATRIX)	MATRIX calculations: Tính toán ma tận.
MODE 7 (TABLE)	Tính toán bảng giá trị của một hoặc hai hàm số.
MODE 8 (VECTOR)	VECTOR calculations: Tính toán với vectơ.
MODE ▽ 1 (INEQ)	Giải bất phương trình cơ bản.
MODE ▽ 2 (RATIO)	Tính toán với tỉ số.
MODE ▽ 3 (DIST)	DISTribution calculations: Tính phân phối.

Các chỉ báo hiển thị

Hai nút lệnh điều khiển hiển thị cần chú ý trên máy tính cầm tay *fx*-570 VN PLUS đó là:

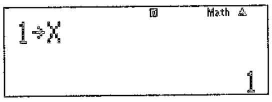
Nút lệnh nhãn SHIFT

Nút lệnh SHIFT: khi ấn nút lệnh SHIFT cùng với các nút có ghi chú bên cạnh các lệnh màu vàng thì máy sẽ thực hiện các lệnh ghi chú trên nút đó (ví dụ như nút CALC bên trên có ghi chỉ số SOLVE màu vàng, khi ấn tổ hợp SHIFT CALC máy sẽ thực hiện lệnh SOLVE giải phương trình).

Nút lệnh nhãn ALPHA

Nút lệnh ALPHA có màu đỏ, khi ấn nút lệnh ALPHA rồi ấn phím này để đưa vào hàm, biến số, hằng số hay kí hiệu áp dụng được (các biến ghi màu đỏ bên cạnh các nút trên bàn phím)

Lệnh gán giá trị STO



Chỉ báo xuất hiện sau khi nhấn SHIFT RCL (STO). Ví dụ gán 1 cho biến X (tức đặt X=1 ta nhấn 1 SHIFT RCL) (với các lệnh gán biến ta gọi là 1 SHIFT STO X trong các biểu hiện trong sách).

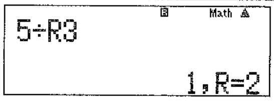
Các tính toán đặc biệt

1. Tính toán có số dư

Máy tính có chức năng tính toán với số dư là chức năng ÷*R*.

Chức năng này được ấn bằng ALPHA ÷

Ví dụ: Để tính số dư với các số thực ta có thể sử dụng chức năng này như sau: [5] [ALPHA] [÷R] [3] [=]
Ta được kết quả như hình bên có thương và số dư.



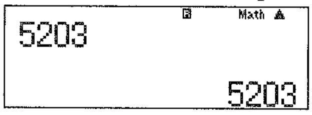
STUDY TIPS
Chỉ có giá trị số thương của một tính toán chia có dư trên được lưu trong bộ nhớ ANS.

STUDY TIPS
Không thể thực hiện được việc lấy thừa số nguyên tố trong khi kết quả của một tính toán có dùng Pol, REC, $\div R$ (Pol, REC sẽ trình bày trong phần tính toán với số phức).

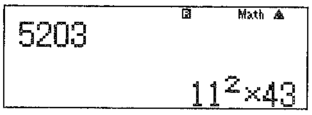
2. Phân tích ra thừa số nguyên tố

Chức năng FACT thực hiện phân tích thừa số nguyên tố như sau:
Để phân tích ra thừa số nguyên tố của 5203 ta thực hiện nhập dòng dưới:

[5] [2] [0] [3] [=]



[ALPHA] [°'''] (FACT)



3. Các hàm cơ bản trên máy tính sử dụng nhiều trong chương trình phổ thông

Hàm $\sin, \cos, \tan, \sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ **:** Các hàm lượng giác (sử dụng nhiều ở chương trình lớp 10 và 11). Chú ý xác định góc trước khi tính toán.

Hàm $(10^{\blacksquare})(e^{\blacksquare})$: Hàm lũy thừa.

Hàm log: Hàm logarit. Dùng phím [log] để đưa vào logarit với cơ số 10. Phím [log▫▫] để đưa vào $\log_a b$. Hàm **ln** để đưa vào logarit tự nhiên e.

THẬN TRỌNG TRONG TÍNH TOÁN TÍCH PHÂN
- Tích phân thông thường đòi hỏi thời gian đáng kể để thực hiện.
- Tùy theo nội dung của $f(x)$ và miền lấy tích phân, lỗi vượt quá dung sai có thể bị sinh ra, làm cho máy tính báo lỗi hoặc lấy xấp xỉ khiến sai số xảy ra.

[∫▫]: Hàm để thực hiện tính tích phân. Cú pháp đưa vào hiển thị tự nhiên là $\int_a^b f\ x$.

$\left(\frac{d}{dx}\blacksquare\right)$: Hàm thực hiện tính vi phân. Cú pháp đưa vào hiển thị tự nhiên là $\frac{d}{dx}\ f\ x\ |x=a$. Ta sẽ sử dụng nhiều trong bài toán đạo hàm.

THẬN TRỌNG TRONG TÍNH TOÁN VI PHÂN
- Các điểm không kế tiếp, thăng giáng bất thường và những điểm cực lớn hay cực nhỏ, điểm uốn, và việc bao hàm các điểm không thể vi phân được, hay các điểm vi phân hay kết quả tính vi phân gần tới 0 có thể làm độ chính xác kém hay sinh lỗi.

$\left(\sum_{\square}^{\square}\square\right)$: Thực hiện nhập [SHIFT] [log▫▫]: Hàm mà, với một phạm vi xác định của $f\ x$, xác định tổng $\sum_{x=a}^{b} f\ x$. Cú pháp hiển thị tự nhiên là $\sum_{x=a}^{b} f\ x$.

$\prod_{\square}^{\square}\square$: Thực hiện nhập [ALPHA] [log▫▫]: Hàm xác định tích $\prod_{x=a}^{b} f\ x$.

Pol, Rec (nhập [SHIFT] [+] và [SHIFT] [−]): **Pol** (polar form) chuyển đổi tọa độ chữ nhật sang tọa độ cực, **Rec** (rectangular form) chuyển độ tọa độ cực sang tọa độ chữ nhật (phần này sẽ được giới thiệu kĩ trong chương số phức).

[x!]: Hàm giai thừa.

Abs: Hàm giá trị tuyệt đối (absolute value).

nPr (nhập [SHIFT] [×]), **nCr** (nhập [SHIFT] [÷]): Hàm hoán vị (**nPr**) và hàm tổ hợp (**nCr**).

GCD, LCM ([ALPHA] [×] và [ALPHA] [÷]): **GCD** xác định ước số chung của hai giá trị, **LCM** xác định bội chung nhỏ nhất.

Int và **Intg** ([ALPHA] [+] và [ALPHA] [−]): **Int** khai căn phần số nguyên của một giá trị. **Intg** xác định số nguyên lớn nhất không vượt quá một giá trị.

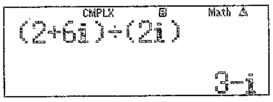
Chú ý: Để khắc phục phần nào các lỗi ở phần thận trọng góc trái, ta xem phần lời khuyên tính tích phân thành công trong mục tích phân.

4. Tính toán với số phức

Thực hiện tính toán với số phức ta ấn MODE 2 (CMPLX). Trong phần này tôi sẽ giới thiệu sâu về tọa độ cực (polar form $r\angle\theta$) và tọa độ chữ nhật ($a+bi$ rectangular form) để giải các bài toán số phức căn bản.

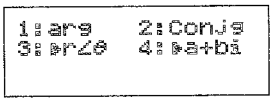
a. Trong số phức ta thực hiện tính toán thông thường. Chú ý đơn vị ảo i được hiển thị khi ấn nút ENG (i).

Ví dụ: Ta nhập $(2+6i)\div(2i)=3-i$.



MODE 2 (2 + 6 ENG) ÷ (2 ENG) =

b. Các tính chất khi ấn SHIFT 2 khi máy tính đang để trong môi trường CMPLX tính toán với số phức.

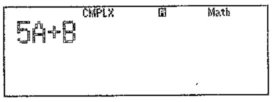


1: **arg** là argument của số phức.
2: Conjg là hiển thị số phức liên hợp của số phức (Conjg là viết tắt của conjungate).
3: $r\angle\theta$: Dạng lượng giác (chuyển đổi sang tọa độ cực).
4: $a+bi$: Dạng đại số (chuyển đổi sang tọa độ chữ nhật).

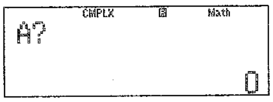
c. Sử dụng ***Pol*** và ***Rec*** để chuyển dạng số phức và giải bài toán tìm căn bậc hai của số phức. Phần này sẽ được giới thiệu trong chương số phức.

5. Sử dụng lệnh CALC để tính toán

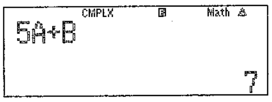
CALC cho phép cất giữ biểu thức tính toán có chứa biến, mà ta có thể nhớ lại chúng.



Ví dụ: Để lưu giữ biểu thức $5A+B$ rồi thế các giá trị sau để thức hiện tính toán với $(A,B)=(1,2)$ hoặc $(A,B)=(2;3)$,...



Phương thức



Ta thực hiện nhập biểu thức vào màn hình máy tính 5 ALPHA (−) + ALPHA °'''
Tiếp theo ta thực hiện sử dụng CALC bằng cách ấn CALC máy hiện A? ta nhập giá trị mà ta muốn đưa cho A. Ở đây ta nhập 1 = ta tiếp tục gán 2 cho B và được kết quả của biểu thức tại $(A,B)=(1,2)$.

6. Dùng lệnh SOLVE (qr)

Lệnh SOLVE để dò nghiệm của phương trình. Lệnh này được sử dụng nhiều trong giải phương trình, dò nghiệm.

Ta đưa phương trình vào theo cú pháp: **{phương trình}, {biến nghiệm}.**

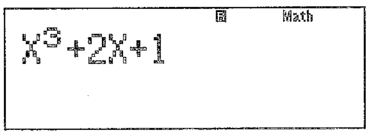
> **Chú ý**
> - Lưu ý SOLVE chỉ dùng được trong môi trường COMP (MODE 1).
> - Nếu phương trình chứa hàm hoặc có chứa dấu ngoặc mở (kiểu như hàm sin và log), không bỏ các dấu ngoặc đóng.
> - Các hàm $\int$, $\frac{d}{dx}$, $\sum$, $\prod$, ÷R, **Pol, Rec.**

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình x^3+2x+1.

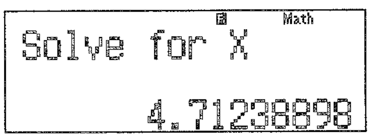
Phương thức

Ta thực hiện cú pháp trên:

ALPHA) SHIFT x² + 2 ALPHA) + 1



SHIFT CALC

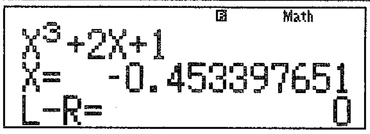


Ở đây SOLVE for X tức là giải tìm X. Giá trị ở dòng dưới là giá trị hiện tại của X trên máy tính.

STUDY TIPS

Tùy theo ta chọn giá trị bắt đầu của nghiệm mà quá trình dò nghiệm nhanh hơn. Giá trị bắt đầu càng gần thì càng tìm nghiệm nhanh.

Nhập [1] [=] để đưa giá trị khởi đầu cho X (Ở đây ta đưa vào 1).
Hình bên cho ra nghiệm X.
$L-R$ biểu thị Vế trái – Vế phải được kết quả.



7. Tạo ra bảng số từ 2 hàm (TABLE)

TABLE có chức năng sinh ra một bảng số dựa trên một hay hai hàm. Ta có thể dùng hàm $f(x)$ hay hàm $f(x)$ và $g(x)$. Chức năng này ta sẽ sử dụng nhiều ở chương trình 12.

Bước 1: Nhấn [MODE] [7] (TABLE) để vào phương thức TABLE.

Bước 2: Dùng biến số X để đưa vào hai hàm hoặc một hàm. Một hàm là dạng $f(x)$ và một hàm dạng $g(x)$.

* Chắc đưa vào biến X khi sinh ra một bảng số. Bất kì biến nào khác X đều được xử lí như một hằng.

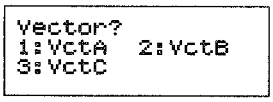
* Nếu sử dụng một số đơn, thì chỉ đưa một hàm vào dạng thức $f(x)$.

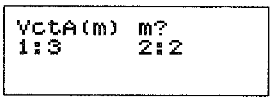
* Các hàm không thể dùng được trong hàm này là: Pol, Rec, $\int$, $\frac{d}{dx}$, $\sum$, $\prod$

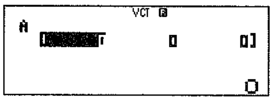
Bước 3: Đáp lại lời nhắc xuất hiện START? END? STEP? Khi đó ta nhập xác giá trị vào và nhấn [=] sau mỗi giá trị.

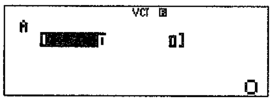
START? : Đưa vào giá trị bắt đầu của X.
END? : Đưa vào giá trị kết thúc của X. (Phải chắc chẵn End luôn lớn hơn Start).
STEP? : Đưa vào bước nhảy của X.

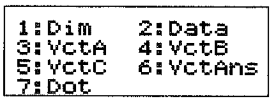
8. Tính toán vectơ











Phương thức VECTOR trong máy tính để thực hiện các tính toán vectơ 2 và 3 chiều. Để thực hiện một tính toán vectơ, ta gán dữ liệu cho các biến vectơ đặc biệt (VctA, VctB, VctC), và dùng các biến Vct này để tính toán.

Bước 1: Nhấn [MODE] [8] (VECTOR) vào phương thức VECTOR.

Bước 2: Chọn các biến Vct để gán giá trị, ta có thể ấn [1] [2] [3] để chọn các biến Vct ta muốn gán.

Bước 3: Chọn chiều của không gian vectơ ấn [1] là chọn không gian ba chiều, 2 là chọn không gian vectơ hai chiều.

Bước 4: Chọn các chiều xong máy sẽ lần lượt hiện như hình bên, từ đây ta nhập dữ liệu, ấn AC và thực hiện tính toán.

Bước 5: Để thực hiện tính toán và gọi tên lại các vectơ đã gán ta thực hiện nhấn [SHIFT] [5]

Các tính toán vectơ.

1. Nhân vô hướng vectơ, $3.VctA-VctB.$ Ta thực hiện gọi các vecto bằng [SHIFT] [5] và thực hiện tính toán thông thường.
2. $VctA \bullet VctB$ (dấu chấm nhân vectơ). Dấu chấm nhân là 7: Dot trong hộp [SHIFT] [5]
3. $VctA \times VctB$ (dấu nhân vectơ).
4. Thu được giá trị tuyệt đối của vectơ bằng cách sử dụng lệnh [SHIFT] [hyp] (Abs).

1: aX^2+bX+c
2: aX^3+bX^2+cX+d

1: $aX^2+bX+c>0$
2: $aX^2+bX+c<0$
3: $aX^2+bX+c\geq 0$
4: $aX^2+bX+c\leq 0$

1: $aX^3+bX^2+cX+d>0$
2: $aX^3+bX^2+cX+d<0$
3: $aX^3+bX^2+cX+d\geq 0$
4: $aX^3+bX^2+cX+d\leq 0$

LƯU Ý

- Khi máy hiển thị "All Real Numbers" thì nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Tính toán bất phương trình (INEQ)

1. Nhấn MODE ▼ 1 (INEQ) để vào phương thức INEQ.

2. Lựa chọn kiểu bất phương trình (1: bất phương trình bậc hai và 2: bất phương trình bậc ba).

3. Lựa chọn 1 hoặc 2 trên menu xuất hiện, dùng các phím từ 1 đến 4 để chọn loại bất phương trình và đưa vào các giá trị hệ số.

* Việc đưa vào các hệ số tương tự như việc đưa hệ số trong giải phương trình ở môi trường MODE 5 (EQN).

* Để thay đổi giá trị hệ số vừa đưa vào, chuyển con chạy tới ô thích hợp, đưa vào giá trị mới, và nhấn =

* Nhấn AC sẽ xóa tất cả các hệ số về không.

10. Các lưu ý về tính toán sai số của máy tính

Miền tính toán, số chữ số được dùng trong tính toán bên trong, và độ chính xác phụ thuộc vào kiểu tính toán bạn thực hiện.

> * Các hàm kiểu $x^y, \sqrt[x]{y}, \sqrt[3]{\ }, x!, nPr, nCr$ đòi hỏi tính toán bên trong liên tiếp, đều **có thể** gây ra tích lũy sai số thường xuyên xuất hiện trong tính toán.
>
> * Sai số được tích lũy có xu hướng lớn lên trong lân cận của điểm kì dị và điểm bùng phát của hàm.

II. CÁC TÍNH NĂNG CASIO

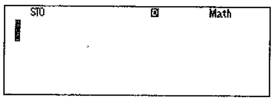
1. Phím RCL (STO) và các lệnh lưu trữ kết quả

– Chức năng: Lưu trữ và gán kết quả.

– Kết quả tính toán có thể được lưu trữ trong bộ nhớ của máy và được sử dụng trong các phép tính tiếp theo. Điều này thuận tiện cho việc nhớ lại các giá trị mà ta muốn sử dụng nhiều lần, hay nhớ lại các kết quả trung gian để quá trình tính toán dễ dàng và nhanh chóng hơn. Ta có thể lưu trữ (gán) một kết quả nào đó vào các nhãn (biến nhớ) A, B, C, D, E, F, X, Y hay bộ nhớ (số nhớ) độc lập M. Các phím đại diện cho các nhãn (biến) này được liệt kê trong bảng bên.

Nhãn	Phím đại diện
A	[(−)]
B	[°'"]
C	[hyp]
D	[sin]
E	[cos]
F	[tan]
X	[)]
Y	[S⇔D]
M	[M+]

Các biến nhớ A, B, C, D, E, F, X, Y (8 biến nhớ)



Sử dụng lệnh [SHIFT] [RCL] (STO) để lưu trữ (gán) một kết quả (hay một giá trị nào đó) vào các biến nhớ. Khi đó, trên dòng chỉ báo của màn hình máy tính sẽ hiện chữ STO bên góc trái. Tiếp theo, ta ấn các phím đại diện để gán một giá trị với biến tương ứng.

Ví dụ 1.1: Lưu vào các biến nhớ A, B, C các giá trị tương ứng là 4, 5 và 6. Sau đó, tính A^2BC.

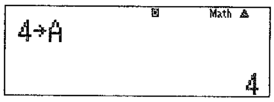
Quy trình bấm máy

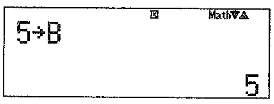
– **Bước 1:** Sử dụng lệnh [SHIFT] [RCL] (STO) để gán các giá trị với biến tương ứng.

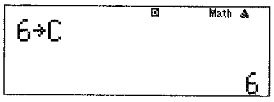
Gán giá trị 4 vào biến nhớ A, kí hiệu: $4 \to A$, ấn: [4] [SHIFT] [RCL] [(−)].

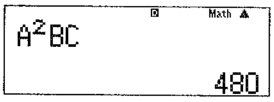
Gán giá trị 5 vào biến nhớ B $(5 \to B)$, ấn: [5] [SHIFT] [RCL] [°'"].

Gán giá trị 6 vào biến nhớ C $(6 \to C)$, ấn: [6] [SHIFT] [RCL] [hyp].









– **Bước 2:** Tính A^2BC, ấn: [ALPHA] [(−)] [x²] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [hyp], ấn [=], máy hiện 480.

Vậy $A^2BC = 480$.

⚠ Tắt máy hoặc thay đổi chế độ tính sẽ không xóa nội dung bộ nhớ đã lưu, ta có thể xóa những gì đã lưu bằng cách ấn [SHIFT] [9] (CLR).

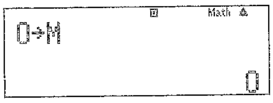
Bộ nhớ (số nhớ) độc lập M

– Các bộ nhớ độc lập M hoạt động hơi khác so với các biến nhớ khác (A, B, C, D, E, F, X, Y), mặc dù ta có thể sử dụng nó như một biến nhớ nếu ta muốn.

– Sự khác nhau ở đây chính là việc ta có thể cộng kết quả tính toán hay trừ kết quả từ bộ nhớ độc lập. Tức là, ta dùng bộ nhớ này để chứa tổng các kết quả của nhiều phép tính toán. Chữ M xuất hiện trên màn hình hiển thị khi có giá trị khác không được lưu trong bộ nhớ độc lập.

– Các thao tác sử dụng với bộ nhớ độc lập:

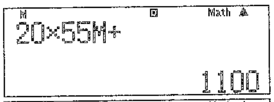
Ý nghĩa	Ấn phím
Thêm (cộng) giá trị hoặc kết quả hiển thị của biểu thức vào bộ nhớ độc lập	[M+]
Bớt đi (trừ) giá trị hoặc kết quả hiển thị của biểu thức từ bộ nhớ độc lập	[SHIFT] [M+] (M–)
Nội dung bộ nhớ độc lập gần nhất	[RCL] [M+] (M)

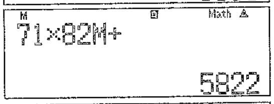


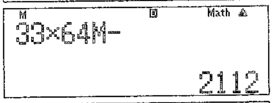
⚠ Trước khi thực hiện tính toán với bộ nhớ độc lập M, ta nên xóa các dữ liệu kết quả đã lưu trữ trước đó bằng cách ấn [0] [SHIFT] [RCL] (STO) [M+] (M).

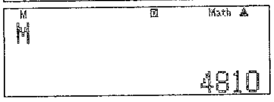
Ví dụ 1.2: Sử dụng bộ nhớ độc lập M để lưu trữ kết quả của phép tính $20\times55+71\times82-33\times64$.

Quy trình bấm máy









– **Bước 1:** Xóa nội dung của M, ấn [0] [SHIFT] [RCL] (STO) [M+] (M).

– **Bước 2:** Cộng kết quả của 20×55 vào M, ấn [2] [0] [×] [5] [5] [M+], máy hiện 1100, tức là $20\times55=1100$.

– **Bước 3:** Cộng tiếp kết quả của 71×82 vào M, ấn [7] [1] [×] [8] [2] [M+], máy hiện 5822, tức là $71\times82=5822$.

– **Bước 4:** Trừ kết quả của 33×64 từ M, ấn [3] [3] [×] [6] [4] [SHIFT] [M+] (M–), máy hiện 2112, tức là $33\times64=2112$.

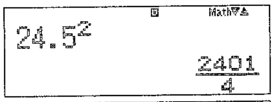
– **Bước 5:** Nhớ nội dung của M, ấn [RCL] [M+], máy hiện 4810. Vậy bộ nhớ độc lập $M=4810$ chính là kết quả của phép tính $20\times55+71\times82-33\times64$.

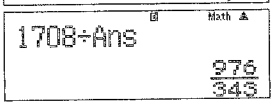
Bộ nhớ trả lời Ans và bộ nhớ trả lời trước PreAns

– Bộ nhớ trả lời Ans ([Ans]) có chức năng lưu lại kết quả mà ta vừa tính toán gần nhất và được sử dụng cho phép tính kế tiếp có sử dụng lại kết quả vừa tìm được.

Ví dụ 1.3: Tính bình phương của 24,5 nhưng không ghi lại kết quả. Sử dụng bộ nhớ Ans để chia số 1708 cho kết quả vừa tìm được.

Quy trình:





– **Bước 1:** Tính $24,5^2$, ấn [2] [4] [.] [5] [x²], ấn [=], máy hiện $\frac{2401}{4}$. Kết quả này sẽ tự động được lưu vào bộ nhớ Ans của máy.

– **Bước 2:** Tính $1708:24,5^2$, ấn [1] [7] [0] [8] [÷] [Ans], ấn [=], máy hiện $\frac{976}{343}$.

Vậy $1708:24,5^2=\frac{976}{343}$.

⚠ **Chú ý:**

– Nội dung bộ nhớ Ans sẽ được cập nhật bất cứ khi nào kết quả mới được hiển thị hoặc bất cứ khi nào thực hiện phép tính sử dụng một trong các phím sau: [=], [SHIFT] [=], [M+], [SHIFT] [M+] (M–), [RCL], [SHIFT] [RCL] (STO).

– Nội dung bộ nhớ Ans không thay đổi nếu có lỗi trong phép tính vừa thực hiện.

– Ngay cả khi ấn phím [AC], [ON], hay thực hiện [MODE] để thay đổi chế độ tính, hoặc ấn [SHIFT] [AC] tắt máy thì nội dung bộ nhớ Ans vẫn còn (không bị mất).

– Bộ nhớ trả lời trước PreAns ([ALPHA] [Ans]) cho phép lưu lại kết quả trước kết quả tính toán cuối cùng Ans.

– Sự hiển thị kết quả tính toán mới sẽ tự động chuyển nội dung bộ nhớ Ans hiện tại sang bộ nhớ PreAns, và lưu kết quả tính toán mới vào bộ nhớ Ans. Chu trình này sẽ được lặp đi lặp lại liên tục trong suốt quá trình tính toán.

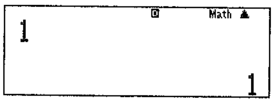
Ví dụ 1.4: Đối với dãy số Fibonacci $T_{k+2} = T_{k+1} + T_k$ với $k \ge 1, k \in \mathbb{Z}$. Xác định dãy số từ T_1 đến T_5 biết $T_1 = 1$ và $T_2 = 1$.

Phân tích:

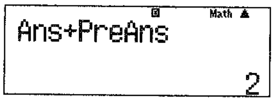
Ta có thể hiểu rằng đề bài yêu cầu tính $T_3 = T_2 + T_1$, $T_4 = T_3 + T_2$, $T_5 = T_4 + T_3$.

Quy trình bấm máy

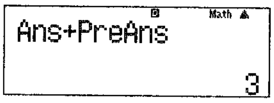
– **Bước 1:** Nhập $T_1 = 1$ vào máy, ấn [1], rồi ấn [=], khi đó kết quả $T_1 = 1$ sẽ tự động được lưu vào bộ nhớ trả lời Ans $(\text{Ans} = \text{T}_1 = 1)$.



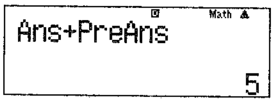
– **Bước 2:** Nhập $T_2 = 1$ vào máy, ấn [1], rồi ấn [=], khi đó kết quả mới $T_2 = 1$ sẽ được lưu vào bộ nhớ trả lời Ans, còn kết quả trước đó $T_1 = 1$ sẽ được lưu vào bộ nhớ trả lời trước PreAns, còn kết quả $(\text{Ans} = \text{T}_2 = 1, \text{PreAns} = \text{T}_1 = 1)$.



– **Bước 3:** Có $T_3 = T_2 + T_1 = \text{Ans} + \text{PreAns}$, ấn [Ans] [+] [ALPHA] [Ans], ấn [=], máy hiện 2. Vậy $T_3 = 2$. Khi đó, kết quả mới $T_3 = 2$ sẽ được lưu vào Ans và kết quả trước đó $T_2 = 1$ sẽ được lưu vào PreAns $(\text{Ans} = \text{T}_3 = 2, \text{PreAns} = \text{T}_2 = 1)$.



– **Bước 4:** Có $T_4 = T_3 + T_2 = \text{Ans} + \text{PreAns}$, ấn [Ans] [+] [ALPHA] [Ans], ấn [=], máy hiện 3. Vậy $T_4 = 3$. Kết quả mới nhất $T_4 = 3$ sẽ được lưu vào bộ nhớ Ans và kết quả trước đó $T_3 = 2$ sẽ được lưu vào bộ nhớ PreAns $(\text{Ans} = \text{T}_4 = 3, \text{PreAns} = \text{T}_3 = 2)$.



– **Bước 5:** Có $T_5 = T_4 + T_3 = \text{Ans} + \text{PreAns}$, ấn [Ans] [+] [ALPHA] [Ans], ấn [=], máy hiện 5. Vậy $T_5 = 5$. Tương tự, ta được $\text{Ans} = \text{T}_5 = 5$, $\text{PreAns} = \text{T}_4 = 3$ và chu trình này sẽ được lặp đi lặp lại như thế, giúp ta tính được các số hạng tiếp theo $T_6, T_7, ..., T_n, ...$ của dãy.

Tổng quát: $\boxed{T_{k+2} = T_{k+1} + T_k = \text{Ans} + \text{PreAns}}$.

⚠ **Chú ý:**

– Bộ nhớ trả lời trước PreAns chỉ được sử dụng trong phương thức mặc định COMP ([MODE] [1]). Nội dung bộ nhớ PreAns sẽ bị xóa bất cứ khi nào nhập vào máy phương thức khác từ phương thức COMP.

– Ta thường sử dụng bộ nhớ Ans và PreAns để thực hiện tính toán trên các dãy số (sẽ học ở lớp 11).

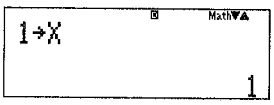
2. Phím CALC

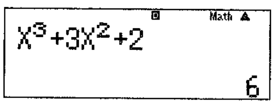
CHÚ Ý

Việc sử dụng phím [CALC] được ứng dụng vô cùng nhiều vào các bài toán dạng tính giá trị biểu thức, rút gọn biểu thức, kiểm tra nghiệm (tập nghiệm) của phương trình, bất phương trình hay hệ phương trình,...

Để tính giá trị của một biểu thức nào đó tại một điểm cụ thể, chỉ cần thay điểm đó vào biểu thức rồi tìm kết quả. Chẳng hạn, tính giá trị của biểu thức $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ tại điểm $x = 1$, ta thay $x = 1$ vào biểu thức và tính được $P(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 + 2 = 6$.

Hoặc ta cũng có thể gán giá trị $x = 1$ vào biến nhớ X: [1] [SHIFT] [RCL] [)] rồi tính $P(1) = \text{X}^3 + 3\text{X}^2 + 2$: [ALPHA] [)] [SHIFT] [$x^2$] [+] [3] [ALPHA] [)] [$x^2$] [+] [2], ấn [=], máy hiện 6.





Tuy nhiên, nếu tính giá trị của biểu thức tại nhiều điểm khác nhau thì sao? Ta không thể thay từng điểm đó vào biểu thức tìm kết quả, cũng không thể gán các

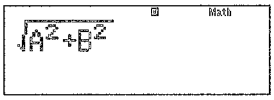
điểm đó vào các biến nhớ A, B, C,... rồi thực hiện tính như trên. Vì việc thay giá trị tốn không ít thời gian, và các biến nhớ lưu trữ trên máy tính cũng có giới hạn (8 biến nhớ lưu trữ và một bộ nhớ độc lập M).

Để quá trình đánh giá biểu thức tại nhiều điểm khác nhau được dễ dàng hơn, máy tính casio cung cấp cho ta một sự lựa chọn hiệu quả, đó chính là sử dụng lệnh CALC:

> – CALC cho phép cất giữ biểu thức có chứa biến, mà ta có thể nhớ lại chúng và thực hiện trong phương thức COMP ([MODE] [1]) và phương thức CMPLX ([MODE] [2])
> – Các kiểu biểu thức có thể lưu giữ với CALC:
> + Biểu thức: $2X+3Y, 2AX+3BY+C, A+Bi$.
> + Đa câu lệnh: $X+Y:X(X+Y)$ (dùng [ALPHA] [∫] (:) để nhập vào dấu đa câu lệnh ":").
> + Các đẳng thức với một biến ở bên trái và biểu thức chứa các biến ở bên phải: $A=B+C, Y=X^2+X+3$ (dùng [ALPHA] [CALC] (=) để đưa vào dấu "=" của đẳng thức).

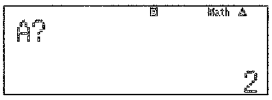
Ví dụ 2.1: Lưu giữ biểu thức $\sqrt{A^2+B^2}$ vào máy rồi thế vào các giá trị $(A,B)=(2,3)$ để thực hiện tính toán.

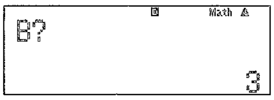
Quy trình bấm máy

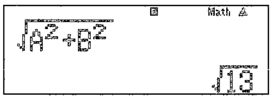


– **Bước 1:** Nhập vào máy $\sqrt{A^2+B^2}$, ấn [√■] [ALPHA] [(-)] (A) [x²] [+] [ALPHA] [°'''] (B) [x²].

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi A? Nhập [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Nhập [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện $\sqrt{13}$.



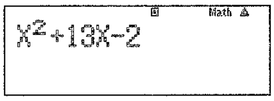




⚠ Để ra khỏi CALC: Ấn [AC].

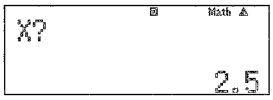
Ví dụ 2.2: Tính giá trị của biểu thức $x^2+13x-2$ tại $x=2,5$.

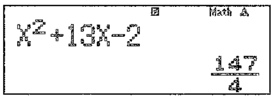
Quy trình bấm máy



– **Bước 1:** Nhập biểu thức $X^2+13X-2$, ấn [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [3] [ALPHA] [)] [-] [2].

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện $\frac{147}{4}$.





3. Phím SOLVE

Máy tính cầm tay casio có thể giải các hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, bậc nhất ba ẩn cùng như các phương trình bậc hai, bậc ba bằng cách sử dụng lệnh EQN. Ngoài ra, bất cứ một phương trình nào (1 ẩn) cũng có thể giải quyết bằng máy tính casio qua lệnh SOLVE.

> Chức năng EQN sẽ được tác giả giới thiệu ở phần sau.

Lệnh SOLVE dùng Luật Newton để xấp xỉ nghiệm của phương trình và chỉ được dùng trong phương thức COMP ([MODE] [1]). Có nghĩa là, trong một vài trường hợp, phương trình khi được giải bằng lệnh SOLVE sẽ được nghiệm lẻ.

Dựa vào phương trình một ẩn

Bài toán: Sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

Phương pháp giải:

– **Bước 1:** Nhập vào máy $f(X)-g(X)=0$, hoặc nhập $f(X)-g(X)=0$, hoặc nhập $f(X)-g(X)$.

– **Bước 2:** Để bắt đầu giải phương trình này, ta nhập lệnh SOLVE bằng cách sử dụng [SHIFT] [CALC]. Máy hiện "Solve for X", tức là yêu cầu nhập giá trị khởi đầu cho X (giả sử nhập $X=x_0$ bất kì).

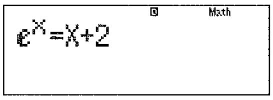
– **Bước 3:** Ấn [=], máy sẽ hiện nghiệm X là nghiệm của phương trình đã cho.

> **CHÚ Ý**
> – Dấu "=" được nhập vào phương trình bằng cách ấn [ALPHA] [CALC] chứ không phải sử dụng phím [=] trong máy.
> – Nghiệm tìm được của phương trình (ở bước 3) chính là nghiệm gần nhất giá trị x_0 (ở bước 2).
> – Ta cần nhập thêm một vài giá trị khởi đầu khác x_0 để xác định xem phương trình còn nghiệm nào khác hay không.

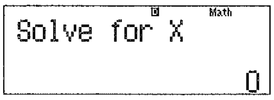
Ví dụ 3.1: Sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình $e^x=x+2$.

Quy trình bấm máy

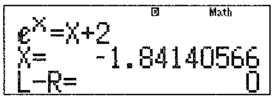
– **Bước 1:** Nhập phương trình $e^X=X+2$, ấn [ALPHA] [×10^x] [x²] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [2].



– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [CALC], máy hiện "Solve for X" yêu cầu ta nhập giá trị khởi đầu cho X. Giả sử chọn $X=-2$, ấn [(−)] [2].

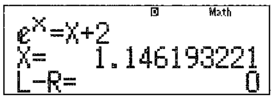


– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện $X=-1,84140566$. Đây là một nghiệm của phương trình (nghiệm này gần với giá trị –2 nhất).



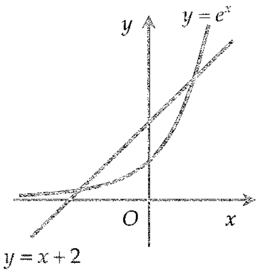
– **Bước 4:** Để kiểm tra xem phương trình còn nghiệm nào khác hay không. Ta sẽ nhập một giá trị khởi đầu khác cho X.

Ấn [SHIFT] [CALC] tiếp, máy hiện "Solve for X", ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện 1,146193221 và đây là nghiệm thứ hai của phương trình (nghiệm này là nghiệm gần với giá trị 2 nhất).



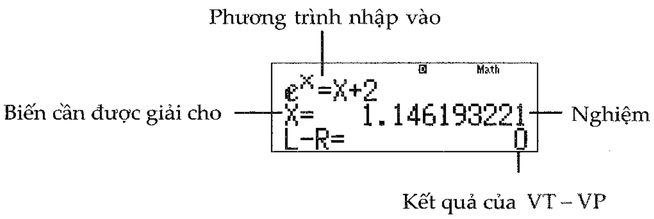
Ta tiếp tục nhập các giá trị khởi đầu khác cho X ngoài hai giá trị –2 và 2 và thấy phương trình $e^x=x+2$ chỉ có đúng hai nghiệm trên.

Thật vậy, xét đồ thị hai hàm số $y=e^x$ và $y=x+2$. Hai đồ thị này cắt nhau tại hai điểm nên phương trình chỉ có hai nghiệm (hình vẽ).



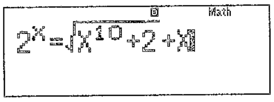
> **MÀN HÌNH TIẾP TỤC**
> Nếu lệnh SOLVE không thể tìm được nghiệm của phương trình, màn hình sẽ hiển thị "Contiue: [=]", hỏi liệu bạn có tiếp tục không. Ấn [=] để tiếp tục hay ấn [AC] để cắt bỏ thao tác SOLVE.

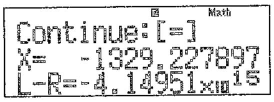
Nội dung màn hình nghiệm



"Kết quả của $VT-VP$" $(L-R=)$ chỉ ra kết quả thu được khi ta trừ hai vế của phương trình cho nhau ((Vế trái) – (Vế phải)) sau khi gán giá trị thu được cho biến cần được giải. Nếu kết quả này càng gần 0 thì độ chính xác của nghiệm thu được càng cao.

Ví dụ 3.2: Sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình $2^x=\sqrt{x^{10}+2}+x$.





Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Nhập phương trình $2^X = \sqrt{X^{10}+2}+X$, ấn [2] [x^■] [ALPHA] [)] [►] [ALPHA] [CALC] [√] [ALPHA] [)] [x^■] [1] [0] [►] [+] [2] [►] [+] [ALPHA] [)].

– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [CALC], máy hiện "Solve for X" yêu cầu ta nhập giá trị khởi đầu cho X. Giả sử chọn $X=5$, ấn [5].

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện "Continue: [=]". Ấn [=] để tiếp tục, máy vẫn hiện "Continue: [=]".

Vậy máy tính không thể hiển thị nghiệm của phương trình $2^x = \sqrt{x^{10}+2}+x$, hoặc là phương trình vô nghiệm.

Một vài chú ý quan trọng

– Nếu phương trình chứa hàm nào đó có chứa dấu ngoặc mở (ví dụ hàm sin và hàm log) thì phải nhập vào các dấu ngoặc đóng.
– Các hàm sau không được phép ở bên trong của phương trình:
$\int, \frac{d}{dx}, \Sigma, \Pi, \text{Pol}, \text{Rec}, \div R$
– Tùy vào việc đưa giá trị khởi đầu vào cho X (biến nghiệm), SOLVE có thể không có khả năng thu được nghiệm. Nếu điều này xảy ra, hãy thử thay đổi giá trị khởi đầu để cho chúng gần với nghiệm hơn.
– Nếu phương trình có nhiều nghiệm thì khi sử dụng SOLVE, chỉ một trong số các nghiệm đó sẽ được cho lại.

4. Phím tích phân [∫■]

Đạo hàm, tích phân là một chủ đề quan trọng và xuất hiện xuyên suốt trong chương trình THPT và được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực, trong đó có Vật lý và Toán học. Máy tính cầm tay casio giúp học sinh phần nào giải quyết được khó khăn khi tiếp cận các bài toán về đạo hàm, nguyên hàm, tích phân và vi phân. Đầu tiên, ta cần đưa máy tính về phương thức mặc định COMP: [MODE] [1].

MỐI QUAN HỆ ĐẠO HÀM – VI PHÂN

Áp dụng (1) vào hàm số $y=x$, có $dx = d(x) = (x)'.\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$.
Do đó, với hàm số $y=f(x)$ thì $= f'(x).\Delta x = f'(x)dx$
$\rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)}$.

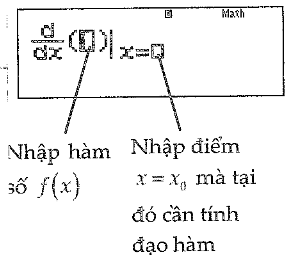
Đạo hàm, vi phân ($\frac{d}{dx}$■)

Định nghĩa vi phân:
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x. Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx, kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy. Nghĩa là:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x).\Delta x} \quad (1)$$

Sử dụng lệnh [SHIFT] [∫■] ($\frac{d}{dx}$■), ta xác định được đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại một điểm $x=x_0$ nào đó, hay xác định đạo hàm của hàm số $f(x)$ và giải các bài toán khác liên quan.

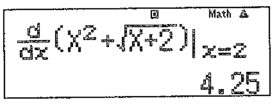
Ấn [SHIFT] [∫■] ($\frac{d}{dx}$■), màn hình hiển thị như hình bên.



Ví dụ 4.1: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 + \sqrt{x+2}$ tại điểm $x=2$

Quy trình bấm máy

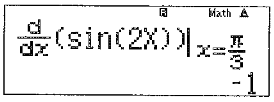
– **Bước 1:** Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(X^2+\sqrt{X+2}\right)\Big|_{x=2}$, ấn [SHIFT] [∫■] ($\frac{d}{dx}$■) [ALPHA] [)] [x²] [+] [√■] [ALPHA] [)] [+] [2] [►] [►] [2].



– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện 4,25. Vậy $y'(2) = 4,25$.

STUDY TIPS

Nếu bài toán chứa các đại lượng lượng giác, ta đưa máy về [SHIFT] [MODE] [3] (Deg) hoặc [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) phù hợp với giả thiết. Các tính năng về lượng giác sẽ được đề cập kĩ hơn ở phần sau.



Ví dụ 4.2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$

Quy trình bấm máy

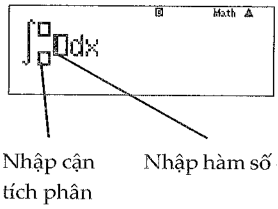
– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ radian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

– **Bước 2:** Nhập vào máy $\frac{d}{dx}(\sin(2X))\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}$, ấn [SHIFT] [∫] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [)] [▶] [π] [SHIFT] [×10ˣ] [▼] [3].

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện –1. Vậy $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

⚠ *Ý nghĩa hình học của đạo hàm:* Qua việc sử dụng máy tính casio để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 được nêu ở trên, ta sẽ xác định được hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(x_0;f(x_0))$. Có nghĩa là: $k=y'(x_0)=\frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0}$ với k là hệ số góc của tiếp tuyến.

Nguyên hàm, tích phân [∫]



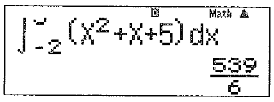
Lệnh [∫] cho phép ta tìm nguyên hàm hay tích phân xác định của hàm số hoặc các bài toán khác liên quan đến tích phân.

Ấn [∫], màn hình máy tính sẽ hiển thị như hình bên.

Ví dụ 4.3: Tính tích phân $\int_{-2}^{5}(x^2+x+5)dx$.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Nhập vào máy $\int_{-2}^{5}(X^2+X+5)dx$, ấn [∫] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [5] [)] [▼] [(−)] [2] [▲] [5].



– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện $\frac{539}{6}$. Vậy $\int_{-2}^{5}(x^2+x+5)dx=\frac{539}{6}$.

5. Phím giai thừa (!), tổ hợp (nCr) và chỉnh hợp (nPr)

Sử dụng các phím giai thừa (!), tổ hợp (nCr) hay chỉnh hợp (nPr) để giải các bài toán đếm, hay các bài toán tổ hợp xác suất,...

Giai thừa (!) và hoán vị

Ví dụ 5.1: Có ba vận động viên A, B, C thi chạy Marathon ở cùng một địa điểm. Có bao nhiêu khả năng xảy ra cho thứ tự về đích của ba vận động viên đó?

Phân tích:

Đối với trường hợp này, ta hoàn toàn có thể liệt kê ra số khả năng xảy ra cho thứ tự về đích của ba vận động viên là 6:

$$ABC-ACB-BAC-BCA-CAB-CBA$$

Cụ thể, có 3 khả năng khác nhau xảy ra cho vị trí về đích đầu tiên. Khi vị trí đầu tiên được xác định, với mỗi vị trí đầu tiên đó ta có thể xác định được 2 khả năng cho vị trí về đích thứ hai. Khi hai vị trí đầu tiên được xác định, thì chỉ còn 1 khả năng cho vị trí về đích thứ ba. Vì vậy, số khả năng xảy ra cho thứ tự về đích của ba vận động viên A, B, C là: $3\times2\times1=6$ (khả năng).

⟶ Phân tích này có tính áp dụng chung. Do đó, nói chung số hoán vị (thứ tự) của n đối tượng khác nhau được cho bởi n giai thừa, đó là:

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$$

Định nghĩa hoán vị:

– Một tập hợp A có n phần tử $(n\geq1)$. Khi sắp xếp n phần tử đó theo một thứ tự, ta được một hoán vị n phần tử của tập A, gọi tắt là một hoán vị của A.

– Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử thì $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n!$ ($n!$ được đọc là n giai thừa).

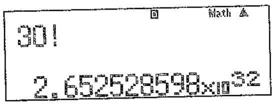
Ta có thể sử dụng khai triển $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$ để tính $2!, 3!, \ldots$ hay thậm chí là tính $10!, 11!$. Nhưng nếu yêu cầu tính $30!$ thì sao? Ta cũng có thể nhập vào máy theo quy trình $1\times2\times3\times\ldots\times29\times30$ nhưng khá tốn thời gian. Vì vậy, máy tính CASIO fx–570VN PLUS cho phép tính nhanh số hoán vị n phần tử của một tập hợp qua lệnh [x!] bằng cách ấn [SHIFT] [x⁻¹].

Ví dụ 5.2: Tính $30!$

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Ấn [3] [0] [SHIFT] [x⁻¹].

– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện $2,652528598\times10^{32}$ (đây là một kết quả lớn).



CHÚ Ý

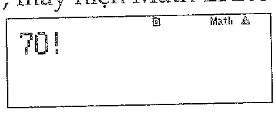
Máy tính Casio không thể tính toán lớn hơn $69!$ bởi đó là kết quả quá lớn, vượt quá giới hạn tính của máy và không thể hiển thị. Tuy nhiên, trong chương trình THPT, ta hầu như không gặp các tính toán lớn hơn $69!$, hoặc nếu có thì bài toán đó sẽ được biến đổi qua một cách nào đó đơn giản hơn.

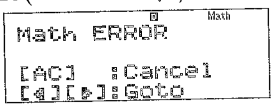
Ví dụ 5.3: Tính $70!$

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Ấn [7] [0] [SHIFT] [x⁻¹] $(70!)$.

– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện Math ERROR (Lỗi toán học).





Chỉnh hợp (nPr)

Ví dụ 5.4: Có 10 vận động viên A, B, C, D, E, F, G, H, I, K thi chạy Marathon thì có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra cho thứ tự về đích của 10 vận động viên đó? (Biết rằng cuộc thi chỉ xếp các thứ tự nhất, nhì và ba).

Phân tích:

Tương tự ví dụ 5.1, ta có thể suy luận rằng có 10 lựa chọn cho vị trí đầu tiên, sau đó có 9 lựa chọn cho vị trí thứ hai và cuối cùng là 8 lựa chọn cho vị trí thứ ba. Như vậy, số khả năng xảy ra là $10\times9\times8$ (khả năng).

Hay có $\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10!}{(10-3)!}$ (khả năng).

Trong toán học, ta kí hiệu phép lấy 3 trong 10 đối tượng rồi sắp xếp chúng theo thứ tự là 10P3 (hoặc A_{10}^3) và được gọi là chỉnh hợp chập 3 của 10 phần tử.

Như vậy, $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!}$.

CHÚ Ý

Theo quy ước quốc tế, thì chỉnh hợp được kí hiệu là nPr (r–permutations of n), ta có thể hiểu đây là một chỉnh hợp chập r của tập hợp có n phần tử. Hay $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Định nghĩa chỉnh hợp:

– Một tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A, gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A.

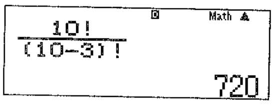
– Số chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử $(1 \le k \le n)$ là:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

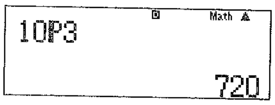
Thực hiện lệnh nPr trên máy tính bằng cách ấn [SHIFT] [×] để tính số chỉnh hợp chập r của n phần tử. Lưu ý, phải nhập giá trị n trước, tiếp theo ấn lệnh [SHIFT] [×] và cuối cùng là nhập giá trị r.

Ví dụ 5.5: Tính A_{10}^3.

Quy trình bấm máy



Ta có $A_{10}^3 = 10P3 = \frac{10!}{(10-3)!}$.



– **Bước 1:** Ấn [▭/▭] [1] [0] [SHIFT] [x⁻¹] [▽] [(] [1] [0] [−] [3] [)] [SHIFT] [x⁻¹], hoặc ấn [1] [0] [SHIFT] [×] [3].

– **Bước 2:** Ấn [=], kết quả hiện ra là 720.

Tổ hợp (nCr)

Ví dụ 5.6: Có 10 vận động viên thi chạy Marathon thì có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra cho ba vị trí về đích đầu tiên? (Ba vị trí này không tuân theo thứ tự nhất, nhì, ba).

Phân tích:

Từ ví dụ 5.4, nếu ba vị trí về đích đầu tiên được xếp theo thứ tự nhất, nhì, ba thì có 10P3 hay A_{10}^3 khả năng xảy ra. Có nghĩa là, một khi bộ ba về đích đầu tiên được chọn, ta phải đếm theo 3! để hoán vị họ vào từng vị trí.

Tuy nhiên, ở ví dụ 5.6 này lại yêu cầu chỉ cần xác định số khả năng cho ba vị trí đầu tiên (mà không cần biết ai là người về đích đầu tiên, ai là người về thứ hai và ai là người về thứ ba). Khi đó số khả năng xảy ra là $\frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10!}{(10-3)!3!}$.

Trong toán học, ta kí hiệu phép lấy 3 trong 10 đối tượng nhưng không sắp xếp chúng theo thứ tự là 10C3 (hoặc C_{10}^3) và được gọi là tổ hợp chập 3 của 10 phần tử. Như vậy, $C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!}$.

CHÚ Ý

Theo quy ước quốc tế, tổ hợp được kí hiệu là nCr (r–combinations of n), ta có thể hiểu đây là một tổ hợp chập r của tập hợp có n phần tử. Hay $nCr = \frac{nPr}{r!} = = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Định nghĩa tổ hợp:

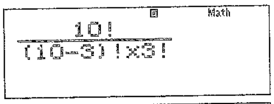
– Một tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $0 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A, gọi tắt là một tổ hợp chập k của A.

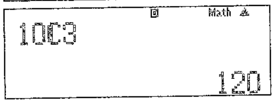
– Số tổ hợp chập k của tập hợp có $n(0 \le k \le n)$ phần tử là: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Tính số tổ hợp của một tập hợp bằng cách ấn lệnh nCr: [SHIFT] [÷]. Lưu ý, phải nhập giá trị n trước, tiếp theo ấn lệnh [SHIFT] [÷] và cuối cùng là nhập giá trị r.

Ví dụ 5.7: Tính C_{10}^{3}.

Quy trình bấm máy

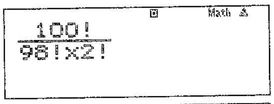


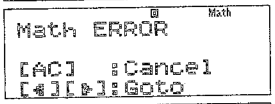


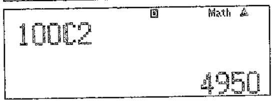
Ta có $C_{10}^{3} = 10C3 = \dfrac{10!}{(10-3)!\times 3!}$.

– **Bước 1:** Ấn [▭] [1] [0] [SHIFT] [x!] [▽] [(] [1] [0] [−] [3] [)] [SHIFT] [x!] [×] [3] [SHIFT] [x!], hay ấn [1] [0] [SHIFT] [÷] [3].

– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện 120.







⚠ *Chú ý:*

Lợi thế của việc sử dụng các lệnh nPr và nCr là thực hiện tính được kể cả khi công thức biểu diễn chứa các giá trị giai thừa lớn hơn 69!. Cụ thể, ta có $C_{100}^{2} = 100C2 = \dfrac{100!}{98!\times 2!}$. Nếu ta nhập vào máy tính theo công thức $\dfrac{100!}{98!\times 2!}$ thì máy hiện Math ERROR (vì trong công thức chứa giá trị lớn hơn 69!). Tuy nhiên, khi ta thực hiện ấn theo lệnh nCr $(100C2)$ thì kết quả nhận được là 4950.

6. Phím tính tổng (Σ) và tích

Chức năng tính tổng (Σ)

Với một phạm vi xác định của hàm số $f(x)$, ta xác định được tổng $\sum_{x=a}^{b}(f(x))$ theo công thức sau:

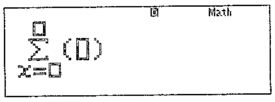
$$\sum_{x=a}^{b}(f(x)) = f(a)+f(a+1)+f(a+2)+...+f(b-2)+f(b-1)+f(b).$$

Chú ý

Các hàm sau đây không thể được dùng trong $f(x)$: Pol, Rec, ÷R. Các hàm sau đây không thể được dùng trong $f(x)$, a hay b: $\int, \dfrac{d}{dx}, \Sigma, \Pi$.

Cú pháp hiển thị tự nhiên là $\sum_{x=a}^{b}(f(x))$ và cú pháp hiển thị tuyến tính là $\sum(f(x),a,b)$. Trong đó a và b là các số nguyên được xác định trong phạm vi $-1\times 10^{10} < a \le b < 1\times 10^{10}$.

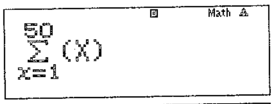
Ấn [SHIFT] [log▫▫] (Σ) để đưa vào máy hàm tổng Σ. Màn hình hiện:

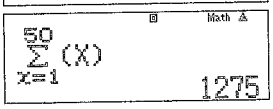


Sau đó nhập vào hàm $f(x)$ và các giá trị a,b. Ta tính được tổng $\sum_{x=a}^{b}(f(x))$.

Ví dụ 6.1: Sử dụng lệnh [SHIFT] [log▫▫] (Σ) để tính giá trị của tổng $1+2+3+...+50$.

Quy trình bấm máy





– **Bước 1:** Biến đổi $1+2+3+...+50 = \sum_{x=1}^{50}(x)$.

– **Bước 2:** Nhập vào máy $\sum_{x=1}^{50}(X)$, ấn [SHIFT] [log▫▫] [ALPHA] [)] [▽] [1] [△] [5] [0].

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả 1275. Vậy $1+2+3+...+50 = \sum_{x=1}^{50} x = 1275$.

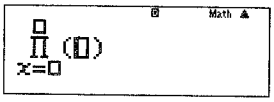
Chức năng tính tích

Tương tự, ta xác định tích số $\prod_{x=a}^{b}(f(x))$ của một hàm số $f(x)$ theo công thức sau:

$$\prod_{x=a}^{b}(f(x)) = f(a)\times f(a+1)\times f(a+2)\times\ldots\times f(b-2)\times f(b-1)\times f(b).$$

Cú pháp hiển thị tự nhiên là $\prod_{x=a}^{b}(f(x))$, trong khi đó cú pháp đưa vào hiển thị tuyến tính là $\prod(f(x),a,b)$. Trong đó a và b là các số nguyên được xác định trong phạm vi $-1\times10^{10} < a \le b < 1\times10^{10}$.

Ấn [ALPHA] [log□□] (∑=) để đưa vào máy hàm tích. Khi đó máy hiện:



Sau đó nhập vào hàm $f(x)$ và các giá trị a,b. Ta tính được tích $\prod_{x=a}^{b}(f(x))$.

CHÚ Ý

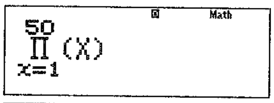
Các hàm sau đây không thể được dùng trong $f(x)$: Pol, Rec, ÷R. Các hàm sau đây không thể được dùng trong $f(x)$, a hay b: $\int, \frac{d}{dx}, \Sigma, \Pi$.

Ví dụ 6.2: Sử dụng lệnh [ALPHA] [log□□] (∑=) để tính giá trị của tích 1.2.3...50.

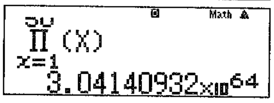
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Biến đổi $1.2.3...50 = \prod_{x=1}^{50} x$.

– **Bước 2:** Nhập vào máy $\prod_{x=1}^{50}(X)$, ấn [ALPHA] [log□□] [ALPHA] [)] [▽] [1] [△] [5] [0].



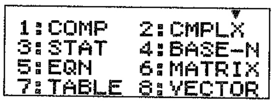
– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả $3{,}04140932\times10^{64}$



Vậy $1.2.3...50 = 3{,}04140932\times10^{64}$.

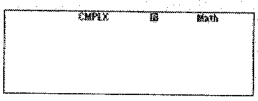
7. Phương thức CMPLX (Môi trường số phức)

Ấn [MODE] [2] (CMPLX) để thực hiện tính toán trên môi trường số phức.

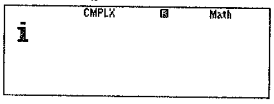


CHÚ Ý

Ấn [MODE] [2], góc màn hình hiển thị chữ CMPLX cho biết chế độ phức đang được sử dụng.



Trong phương thức CMPLX, thành phần ảo hiện ra bằng cách ấn phím [ENG].



Một số lý thuyết cơ bản về số phức

Mỗi số dạng $z = a + bi, (a,b\in\mathbb{R})$ được gọi là một số phức. Trong đó, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của z.

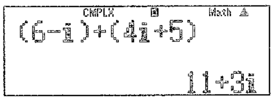
Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

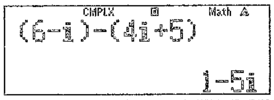
Điểm $M(a;b)$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

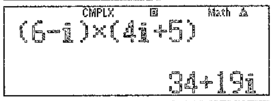
Cộng, trừ, nhân và chia các số phức

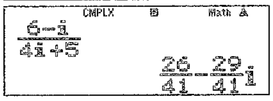
Các phép cộng, trừ, nhân, chia số phức được thực hiện trên máy tính tương tự như các số thực. Tuy nhiên, trước tiên ta phải đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2] để thực hiện tính toán trên trường số phức.

Ví dụ 7.1: Cho hai số phức $z_1 = 6 - i$ và $z_2 = 4i + 5$. Sử dụng máy tính cầm tay để thực hiện các phép tính sau: $(z_1+z_2), (z_1-z_2), z_1.z_2, \frac{z_1}{z_2}$.









Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2].

– **Bước 2:** Để tính $z_1 + z_2 = (6-i)+(4i+5)$, ta ấn [(] [6] [−] [ENG] [)] [+] [(] [4] [ENG] [+] [5] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $11+3i$.

– **Bước 3:** Tính $z_1 - z_2 = (6-i)-(4i+5)$, sửa phép tính vừa nhập, ta ấn [◄] (7 lần) [DEL] [−]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1-5i$.

– **Bước 4:** Tính $z_1.z_2 = (6-i)(4i+5)$, sửa phép tính vừa nhập, ấn [◄] (7 lần) [DEL] [×]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $34+19i$.

– **Bước 5:** Tính $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6-i}{4i+5}$, ấn [▭/▭] [6] [−] [ENG] [▼] [4] [ENG] [+] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{26}{41} - \frac{29}{41}i$.

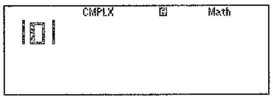
STUDY TIPS

Ta cũng có thể sử dụng RCL (STO) để gán $6-i \to A$ và $4i+5 \to B$. Khi đó, $z_1 + z_2 = A + B$; $z_1 - z_2 = A - B$; $z_1.z_2 = A \times B$ và $\frac{z_1}{z_2} = \frac{A}{B}$.

Môđun của số phức

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

> Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
>
> Như vậy $|z| = |a+bi| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2+b^2}$.



Để tính môđun của một số phức bằng máy tính, ta sử dụng phím Abs([SHIFT] [hyp]) rồi nhập vào số phức z. Khi đó, màn hình hiện như hình vẽ bên.

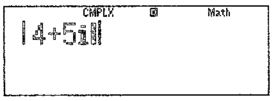
Ví dụ 7.2: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để tìm môđun của số phức $z = 4+5i$.

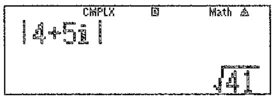
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2].

– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [hyp], rồi ấn [4] [+] [5] [ENG] để nhập vào máy $|4+5i|$.

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{41}$. Vậy $|z| = \sqrt{41}$.





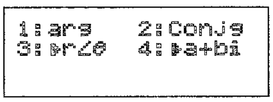
STUDY TIPS

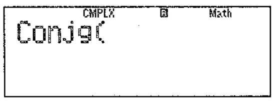
Thật vậy, theo công thức tính môđun của số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ là $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ta có $|z| = |4+5i| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$.

Số phức liên hợp

> Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu là $\bar{z} = a - bi$

Để xác định số phức liên hợp của một số phức z bằng máy tính casio (hay vinacal), ta đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2] rồi ấn [SHIFT] [2] (CMPLX), một menu tùy chọn hiện ra (như hình bên dưới). Chọn [2] (Conjg), màn hình hiện Conjg(, nhập số phức z, ấn [)] rồi ấn [=], máy hiện kết quả.





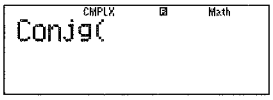
CHÚ Ý

Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua trục *Ox*.

Ví dụ 7.3: Sử dụng máy tính Casio (hoặc Vinacal) để xác định số phức liên hợp của $z = (1+2i)(2-5i)$.

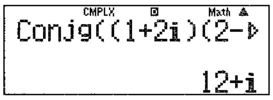
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2].



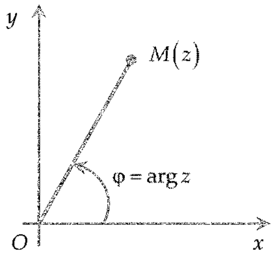
– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [2] (CMPLX), chọn [2] (Conjg). Màn hình hiện Conjg(như hình bên.

– **Bước 3:** Ấn [(] [1] [+] [2] [ENG] [)] [(] [2] [–] [5] [ENG] [)] để nhập vào màn hình số phức $z=(1+2i)(2-5i)$. Ấn [)].



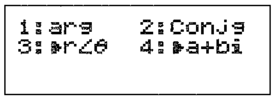
– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $12+i$. Vậy $\overline{z}=12+i$.

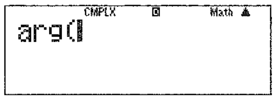
Acgumen của số phức



> Cho số phức $z=a+bi,(z\neq 0)$. Điểm $M(a;b)$ là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (rađian) của mỗi góc lượng giác có tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z, kí hiệu là $\arg z$.

Để xác định acgumen của một số phức z bằng máy tính casio (hay vinacal), ta đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2] rồi ấn [SHIFT] [2] (CMPLX), một menu tùy chọn hiện ra. Chọn [1] (arg), màn hình hiện arg(như hình bên, nhập số phức z, ấn [)] rồi ấn [=], máy hiện kết quả.





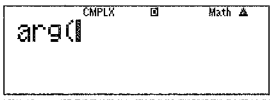
STUDY TIPS

Do đơn vị góc mặc định của máy là độ, nên kết quả sẽ hiển thị dưới dạng góc $\alpha°$. Để kết quả hiển thị dưới dạng rađian, ấn [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Ví dụ 7.4: Sử dùng máy tính casio (hoặc vinacal) để xác định acgumen của số phức $z=\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

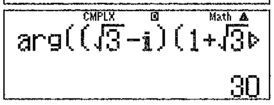
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2].



– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [2] (CMPLX), chọn [1] (arg). Màn hình hiện arg(như hình bên.

– **Bước 3:** Ấn [(] [√] [3] [▶] [–] [ENG] [)] [(] [1] [+] [√] [3] [▶] [ENG] [)] để nhập vào màn hình số phức $z=\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)$. Ấn [)].

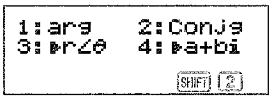


– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 30. Vậy $\arg z=30^0=\dfrac{\pi}{6}$.

Dạng lượng giác của số phức

> Dạng $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, trong đó $r>0$ được gọi là dạng lượng giác của số phức $z\neq 0$. Còn dạng $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ được gọi là dạng đại số của số phức z.
>
> Trong đó $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ là môđun của số phức z; φ là một argumen của z thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}$ và $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$.

Chuyển đổi số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác $(a+bi\to r\angle\theta)$:



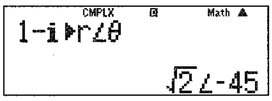
Nhập số phức $z=a+bi$ vào máy. Ấn [SHIFT] [2] [3] hoặc [SHIFT] [MODE] [▽] [3] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả.



Ví dụ 7.5: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để đưa số phức $z=1-i$ về dạng lượng giác.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2].

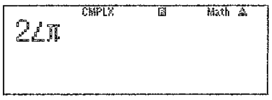


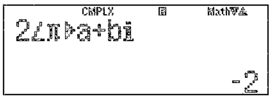
– **Bước 2:** Nhập số phức $1-i$, ấn [1] [–] [ENG], ấn [SHIFT] [2] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{2}\angle-45$. Nghĩa là $r=\sqrt{2},\varphi=-45^0=-\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Chú ý

Chuyển đổi số phức từ dạng lượng giác sang dạng đại số, trước tiên ta cần phải đưa máy về đơn vị góc là rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).





Chuyển đổi số phức từ dạng lượng giác sang dạng đại số $(r\angle\theta\to a+bi)$: Nhập vào r, ấn [SHIFT] [(-)] để nhập dấu "∠" rồi nhập tiếp argumen φ (rađian). Ấn [SHIFT] [2] [4] hoặc [SHIFT] [MODE] [▼] [3] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả.

Ví dụ 7.6: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để đưa số phức $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$ về dạng đại số.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa máy về chế độ phức CMPLX: [MODE] [2] và đơn vị góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

– **Bước 2:** Xác định $r=2,\varphi=\pi$. Nhập vào máy $2\angle\pi$, ấn [2] [SHIFT] [(-)] [SHIFT] [×10ˣ].

– **Bước 3:** Ấn [SHIFT] [2] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –2. Vậy $z=-2$.

8. Phương thức EQN

Chức năng: Tìm nghiệm của một số phương trình và hệ phương trình cơ bản, gồm: Phương trình bậc hai, bậc ba một ẩn; hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn (Riêng đối với máy tính VINACAL 570ES PLUS có thể tìm được thêm nghiệm của hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn).

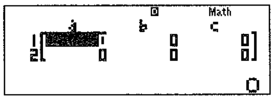
Phương pháp giải: Ấn [MODE] [5] (EQN) để đưa máy về chế độ giải phương trình, hệ phương trình. Một menu tùy chọn hiện ra. Sử dụng các phím số để chọn dạng phương trình, hệ phương trình cần giải.

Dạng	Cách ấn	
	Đối với máy tính Casio	Đối với máy tính Vinacal
Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases}a_1X+b_1Y=c_1\\a_2X+b_2Y=c_2\end{cases}$	[MODE] [5] [1]	[MODE] [5] [1]
Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn $\begin{cases}a_1X+b_1Y+c_1Z=d_1\\a_2X+b_2Y+c_2Z=d_2\\a_3X+b_3Y+c_3Z=d_3\end{cases}$	[MODE] [5] [2]	[MODE] [5] [2]
Hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn $\begin{cases}a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1T=e_1\\a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2T=e_2\\a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3T=e_3\\a_3X+b_3Y+c_3Z+d_4T=e_3\end{cases}$		[MODE] [5] [3]
Phương trình bậc hai một ẩn $aX^2+bX+c=0$	[MODE] [5] [3]	[MODE] [5] [▼] [1]
Phương trình bậc ba một ẩn $aX^3+bX^2+cX+d=0$	[MODE] [5] [4]	[MODE] [5] [▼] [2]

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài toán: Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

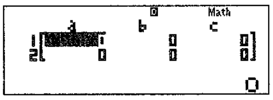
Phương pháp giải:

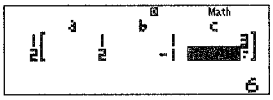


- **Bước 1:** Ấn [MODE] [5] (EQN), chọn [1]. Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên).
- **Bước 2:** Nhập các hệ số tương ứng $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ của hệ phương trình vào bộ soạn thảo hệ số.
- **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện X. Ấn [=] tiếp, máy hiện Y.
- **Bước 4:** Kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(X;Y)$.

Ví dụ 8.1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$

Quy trình bấm máy



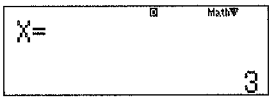


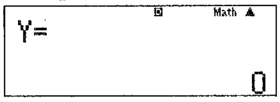
– **Bước 1:** Ấn [MODE] [5] (EQN), chọn [1], bộ soạn thảo hệ số hiện ra.

– **Bước 2:** Nhập vào các hệ số của hệ $\begin{cases} a_1=1, b_1=1, c_1=3 \\ a_2=2, b_2=-1, c_2=6 \end{cases}$.

Ấn [1] [=] [1] [=] [3] [=] [2] [=] [(-)] [1] [=] [6] [=].

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện $X=3$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Y=0$.



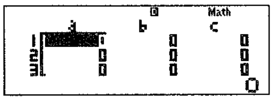


– **Bước 4:** Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;0)$.

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Bài toán: Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$

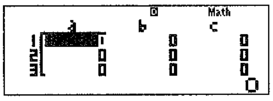
Phương pháp giải:

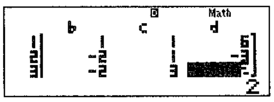


- **Bước 1:** Ấn [MODE] [5] (EQN), chọn [2]. Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên).
- **Bước 2:** Nhập các hệ số của hệ phương trình vào bộ soạn thảo hệ số.
- **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện X. Ấn [=] tiếp, máy hiện Y. Ấn [=] tiếp, máy hiện Z.
- **Bước 4:** Kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z)=(X;Y;Z)$.

Ví dụ 8.2: Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x-2y+3z=2 \end{cases}$

Quy trình bấm máy



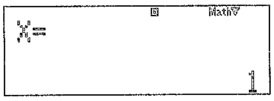


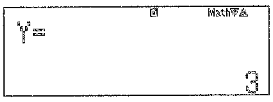
– **Bước 1:** Ấn [MODE] [5], chọn [2], bộ soạn thảo hệ số được hiện ra.

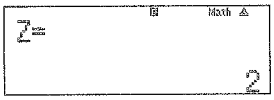
– **Bước 2:** Nhập vào các hệ số của hệ phương trình $\begin{cases} a_1=1, b_1=1, c_1=1, d_1=6 \\ a_2=1, b_2=-2, c_2=1, d_2=-3 \\ a_3=2, b_3=-2, c_3=3, d_3=2 \end{cases}$

Ấn [1] [=] [1] [=] [1] [=] [6] [=] [1] [=] [(-)] [2] [=] [1] [=] [(-)] [3] [=] [2] [=] [(-)] [2] [=] [3] [=] [2] [=]

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện $X=1$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Y=3$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Z=2$.





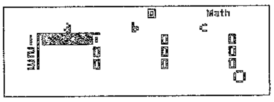


– **Bước 4:** Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;3;2)$.

Hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn (Chỉ sử dụng được đối với máy tính Vinacal)

Bài toán: Giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=e_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=e_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=e_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=e_4 \end{cases}$

Phương pháp giải:



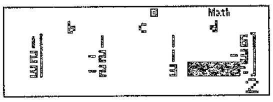
– **Bước 1:** Ấn [MODE] [5] (EQN), chọn [3]. Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên).
– **Bước 2:** Nhập các hệ số của hệ phương trình vào bộ soạn thảo hệ số.
– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện X. Ấn [=] tiếp, máy hiện Y. Ấn [=] tiếp, máy hiện Z. Ấn [=] tiếp, máy hiện T.
– **Bước 4:** Kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z;t)=(X;Y;Z;T)$.

Ví dụ 8.3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+3z+4t=5 \\ x+3y+5z+6t=9 \\ x+2y+6z+5t=9 \\ 5x+5y+3z+9t=5 \end{cases}$

Quy trình bấm máy

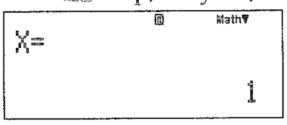
– **Bước 1:** Ấn [MODE] [5], chọn [3], bộ soạn thảo hệ số được hiện ra.

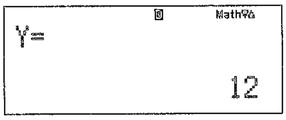
– **Bước 2:** Nhập vào hệ số của hệ phương trình $\begin{cases} a_1=1, b_1=2, c_1=3, d_1=4, e_1=5 \\ a_2=1, b_2=3, c_2=5, d_2=6, e_2=9 \\ a_3=1, b_3=2, c_3=6, d_3=5, e_3=9 \\ a_4=5, b_4=5, c_4=3, d_4=9, e_4=5 \end{cases}$

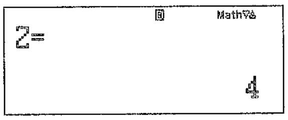


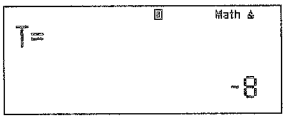
Ấn [1] [=] [2] [=] [3] [=] [4] [=] [5] [=] [1] [=] [3] [=] [5] [=] [6] [=] [9] [=] [1] [=] [2] [=] [6] [=] [5] [=] [9] [=] [5] [=] [5] [=] [3] [=] [9] [=] [5] [=].

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện $X=1$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Y=12$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Z=4$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $T=-8$.



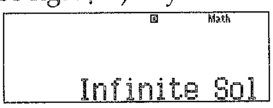


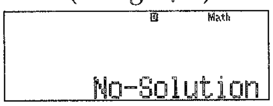




– **Bước 4:** Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;3;2)$.

⚠ *Chú ý:* Khi giải hệ phương trình, sẽ xảy ra một số trường hợp máy hiện Infinite Sol (vô số nghiệm) hay No-Solution (vô nghiệm).

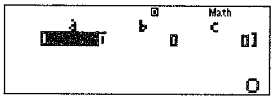




Phương trình bậc hai một ẩn

Bài toán: Giải phương trình $ax^2+bx+c=0$.

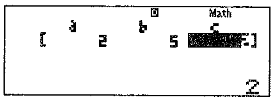
Phương pháp giải:



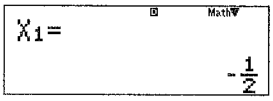
– **Bước 1:** Ấn MODE 5 (EQN), chọn 3 (đối với máy casio); ấn ▼ chọn 1 (đối với máy vinacal). Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên).
– **Bước 2:** Nhập các hệ số tương ứng a,b,c của phương trình vào bộ soạn thảo hệ số.
– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện X_1. Ấn = tiếp, máy hiện X_2 (Nếu phương trình có nghiệm kép thì khi ấn =, máy chỉ hiện X).
– **Bước 4:** Kết luận nghiệm của phương trình là $x_1=X_1, x_2=X_2$ (hoặc $x_1=x_2=X$ nếu phương trình có nghiệm kép).

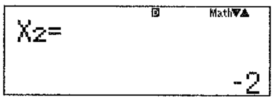
Ví dụ 8.4: Giải phương trình $2x^2+5x+2=0$.

Quy trình bấm máy



– **Bước 1:** Ấn MODE 5, chọn 3 (đối với máy casio), hoặc ấn ▼ chọn 1 đối với máy vinacal) thì bộ soạn thảo hệ số hiện ra.
– **Bước 2:** Nhập hệ số: $a=2,b=5,c=2$. Ấn 2 = 5 = 2 =.
– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện $X_1=-\frac{1}{2}$. Ấn = tiếp, máy hiện $X_2=-2$.

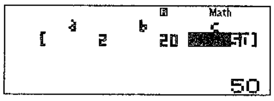
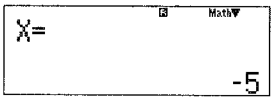




– **Bước 4:** Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1=-\frac{1}{2}$ và $x_2=-2$.

Ví dụ 8.5: Giải phương trình $2x^2+20x+50=0$.

Quy trình bấm máy

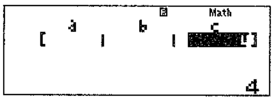



– **Bước 1:** Ấn MODE 5, chọn 3 (đối với máy casio), hoặc ấn ▼ chọn 1 (đối với máy vinacal) thì bộ soạn thảo hệ số hiện ra.
– **Bước 2:** Nhập hệ số: $a=2,b=20,c=50$. Ấn 2 = 2 0 = 5 0 =.
– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện $X=-5$.
– **Bước 4:** Vậy phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-5$.

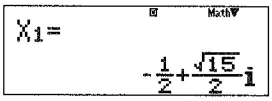
Ví dụ 8.6: Giải phương trình $x^2+x+4=0$.

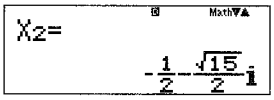
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Ấn MODE 5, chọn 3 thì bộ soạn thảo hệ số hiện ra.
– **Bước 2:** Nhập các hệ số: $a=1,b=1,c=4$. Ấn 1 = 1 = 4 =.



– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện $X_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$. Ấn =, máy hiện $X_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$.





– **Bước 4:** Vậy phương trình vô nghiệm (trên $\mathbb{R}$).

STUDY TIPS

Trên tập số thực $\mathbb{R}$ thì phương trình $x^2+x+4=0$ vô nghiệm. Nhưng trên tập số phức $\mathbb{C}$ thì phương trình này lại có hai nghiệm phức là $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Phương trình bậc ba một ẩn

Bài toán: Giải phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0,(a\neq 0)$.

Phương pháp giải:

– **Bước 1:** Ấn MODE 5 (EQN), chọn 4 (đối với máy casio); ấn ▼ chọn 2 (đối với máy vinacal). Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên). Một bộ soạn thảo hệ số hiện ra (hình bên).

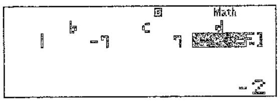
– **Bước 2:** Nhập các hệ số tương ứng a,b,c,d của phương trình vào bộ soạn thảo hệ số.

– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện X_1. Ấn =, máy hiện X_2. Ấn = tiếp, máy hiện X_3.

– **Bước 4:** Kết luận nghiệm của phương trình.

Ví dụ 8.7: Giải phương trình $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

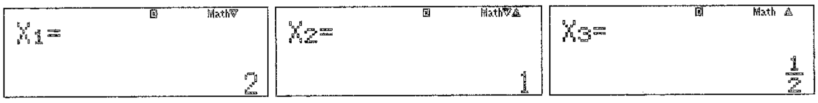
Quy trình bấm máy



– **Bước 1:** Ấn MODE 5 4 (đối với máy casio), hay ấn ▼ chọn 2 (đối với máy vinacal) bộ soạn thảo hệ số hiện ra.

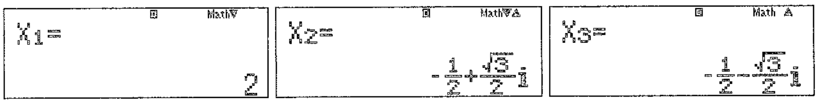
– **Bước 2:** Nhập các hệ số $a=2,b=-7,c=7,d=-2$. Ấn 2 = (–) 7 = 7 = (–) 2 =.

– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện $X_1=2$. Ấn =, máy hiện $X_2=1$. Ấn = tiếp, máy hiện $X_3=\frac{1}{2}$.



– **Bước 4:** Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Tương tự phương trình bậc hai, khi giải phương trình bậc ba cũng có một vài trường hợp máy hiện nghiệm phức. Chẳng hạn, phương trình $x^3-x^2-x-2=0$ có một nghiệm thực $x_1=2$ và hai nghiệm phức $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$:



CHÚ Ý

Khi nghiệm của một hệ phương trình (hay phương trình) đang được hiển thị, để trở về bộ soạn thảo hệ số ta ấn AC. Từ đây, ta có thể tiếp tục nhập hệ số để giải các hệ phương trình (hay phương trình khác).

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số bậc hai

Bằng lệnh MODE 5 3 trên máy tính casio để giải phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0,(a\neq 0)$, ta có thể tìm được giá trị lớn nhất (hay giá trị nhỏ nhất) của hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.

Phương pháp tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất):

– **Bước 1:** Ấn MODE 5 (EQN) 3, và nhập các hệ số a,b,c vào bộ soạn thảo hệ số.

– **Bước 2:** Ấn =, máy hiện X_1. Ấn = tiếp, máy hiện X_2 (Nếu phương trình bậc hai có nghiệm kép thì khi ấn =, máy chỉ hiện X).

– **Bước 3:** Sau khi tìm được hết các nghiệm của phương trình bậc hai:

+ Ấn = tiếp, máy hiện "X–Value Maximum=" hay "X–Value Minimum=", có nghĩa là tại giá trị X này thì hàm số đạt lớn nhất hay nhỏ nhất.

+ Ấn = tiếp, máy hiện "Y–Value Maximum=" hay "Y–Value Minimum=", tức đây chính là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số.

– **Bước 4:** Kết luận về giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.

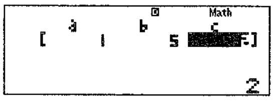
CHÚ Ý

– Với máy tính vinacal, ở bước 1 ta ấn MODE 5 8 (MinMax), nhập hệ số rồi thực hiện tương tự như phương pháp giải ở bên.

– Hàm số bậc hai chỉ có thể tồn tại một trong hai giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Khi $a>0$ thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất (đồ thị có bề lõm quay lên trên). Khi $a<0$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất (đồ thị có bề lõm quay xuống dưới).

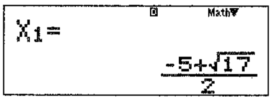
Ví dụ 8.8: Tìm giá trị lớn nhất (hay giá trị nhỏ nhất) của hàm số $y = x^2 + 5x + 2$.

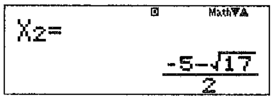
Quy trình bấm máy



– **Bước 1:** Ấn MODE 5 3 và nhập hệ số $a = 1, b = 5, c = 2$. Ấn 1 = 5 = 2 =.

– **Bước 2:** Ấn =, máy hiện $X_1 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$. Ấn = tiếp, máy hiện $X_2 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$.







– **Bước 3:** Tiếp tục ấn =, máy hiện $X - \text{Value Minimum} = -\frac{5}{2}$. Tức là tại $x = -\frac{5}{2}$ thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.



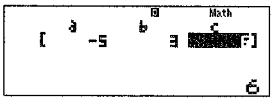
Ấn = tiếp, Máy hiện $Y - \text{Value Minimum} = -\frac{17}{4}$. Tức là giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{17}{4}$.

– **Bước 4:** Vậy hàm số $y = x^2 + 5x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{17}{4}$ khi $x = -\frac{5}{2}$.

Tức là $\min y = -\frac{17}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

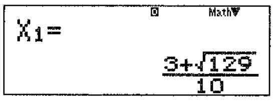
Ví dụ 8.9: Tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của hàm số $y = -5x^2 + 3x + 6$.

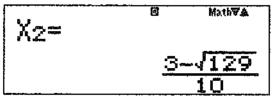
Quy trình bấm máy



– **Bước 1:** Ấn MODE 5 3 và nhập các hệ số $a = -5, b = 3, c = 6$ vào bộ soạn thảo hệ số. Ấn (–) 5 = 3 = 6 =.

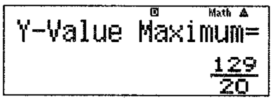
– **Bước 2:** Ấn =, máy hiện $X_1 = \frac{3+\sqrt{129}}{10}$. Ấn = tiếp, máy hiện $X_2 = \frac{3-\sqrt{129}}{10}$.







– **Bước 3:** Tiếp tục ấn =, máy hiện $X - \text{Value Maximum} = \frac{3}{10}$. Tức là tại $x = \frac{3}{10}$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất.



Ấn = tiếp, Máy hiện $Y - \text{Value Maximum} = \frac{129}{20}$. Tức là giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{129}{20}$.

– **Bước 4:** Vậy hàm số $y = -5x^2 + 3x + 6$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{129}{20}$ khi $x = \frac{3}{10}$.

Tức là $\min y = \frac{129}{20} \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$.

9. Phương thức TABLE (Bảng giá trị)

Chức năng: Đánh giá giá trị của hàm số tại nhiều điểm (cách đều nhau) bằng một bảng giá trị. Từ đó ta có thể xác định được nhiều thông tin, như: chiều biến thiên, giá trị lớn nhất – nhỏ nhất, tập xác định,... của một hàm số.

Cách ấn: Ấn MODE 7 (TABLE) và nhập các hàm số $f(X), g(X)$ vào máy.

Các giá trị Start, End và Step

Start? 1

End? 5

Step? 1

Ấn MODE 7 (TABLE). Sau khi các hàm số $f(X), g(X)$ được nhập vào, ấn =, máy tính sẽ yêu cầu nhập các giá trị Start, End và Step:

– Start? Nhập vào máy giá trị đầu tiên (giới hạn dưới) của X (mặc định $Start = 1$).
– End? Nhập vào giá trị cuối cùng (giới hạn trên) của X (mặc định $End = 5$). Lưu ý giá trị End luôn luôn lớn hơn giá trị Start.
– Step? Nhập vào máy bước tăng (mặc định $Step = 1$). Step xác định các giá trị Start phải tuần tự tăng lên khi bảng số được sinh ra. Chẳng hạn, nếu $Start = 1$ và $Step = 1$, thì X sẽ tuần tự được gán cho các giá trị $1, 2, 3, 4, ...$ để sinh ra bảng số cho tới khi đạt tớ giá trị End.

Chọn số hàm cần nhập vào máy (một hàm hoặc hai hàm)

f(X)=

g(X)=

Ở chế độ mặc định của máy, sau khi ấn MODE 7 (TABLE), máy yêu cầu nhập vào hàm $f(X)$. Sau khi nhập $f(X)$, ấn =, máy yêu cầu nhập tiếp hàm $g(X)$. Đối với những bài toán chỉ cần xét một hàm, ta có thể nhập vào $f(X)$ và bỏ qua không nhập hàm $g(X)$. Tuy nhiên, ta cũng có thể đưa máy về chế độ hiển thị chỉ một hàm $f(X)$ mà không cần phải thực hiện bước bỏ qua nhập hàm $g(X)$.

– Khi chỉ cần xét một hàm $f(X)$ duy nhất, ấn SHIFT MODE ▼ 5 (TABLE) 1. Tại chế độ này, bảng hiển thị được tối đa 30 giá trị (30 dòng).

– Khi cần xét hai hàm $f(X), g(X)$, ấn SHIFT MODE ▼ 5 (TABLE) 2. Tại chế độ này, bảng hiển thị được tối đa 20 giá trị (20 dòng).

> Ví dụ 9.1: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để lập bảng giá trị của hàm số $y = 2^x - x^2$ trên đoạn $[1;5]$, bước tăng $Step = 0,4$.

Quy trình bấm máy

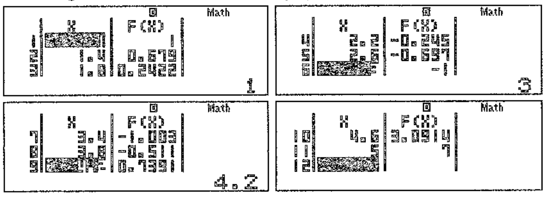
$f(X)=2^X-X^2$

– **Bước 1:** Ấn MODE 7 (TABLE). Sau đó ấn SHIFT MODE ▼ 5 (TABLE) 1 và nhập vào máy hàm số $f(X) = 2^X - X^2$: 2 x■ ALPHA) ▶ − ALPHA) x².

– **Bước 2:** Ấn =, máy hỏi Start? Nhập 1 $(Start = 1)$. Ấn =, máy hỏi End? Nhập 5 $(End = 5)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step? Nhập 0 . 4 $(Step = 0,4)$.

Start? 1	End? 5	Step? 0.4

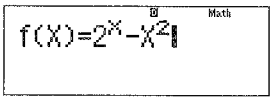
– **Bước 3:** Ấn =, bảng giá trị hiện ra (gồm 3 cột, 12 dòng và có 11 giá trị). Ấn ▼ để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.



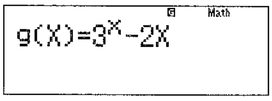
STUDY TIPS
Quan sát bảng giá trị của hàm $y = 2^x - x^2$, ta biết được giá trị của hàm số tại mỗi điểm cụ thể. Chẳng hạn, khi $x = 3$ thì $y(3) = -1$

> Ví dụ 9.2: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để lập bảng giá trị của hai hàm số $y = 2^x - x^2$ và $y = 3^x - 2x$ trên đoạn $[1;5]$, bước tăng $Step = 0,4$.

Quy trình bấm máy

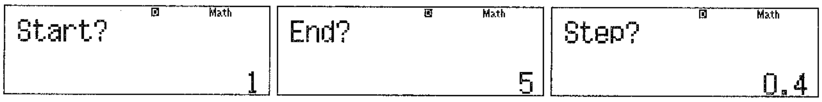


– **Bước 1:** Ấn [MODE] [7] (TABLE). Sau đó ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] (TABLE) [2] và nhập vào máy hàm số $f(X)=2^X-X^2$: [2] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▷] [–] [ALPHA] [)] [x^2].

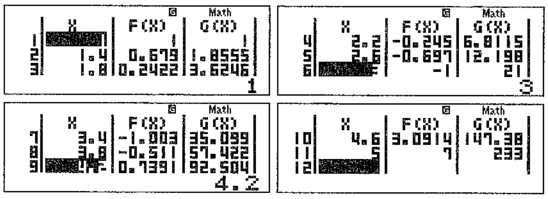


Ấn [=], nhập hàm số $g(X)=3^X-2X$: [3] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▷] [–] [2] [ALPHA] [)].

– **Bước 2:** Ấn [=], máy hỏi Start? Nhập [1] $(Start=1)$. Ấn [=], máy hỏi End? Nhập [5] $(End=5)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step? Nhập [0] [.] [4] $(Step=0,4)$.

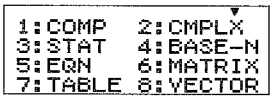


– **Bước 3:** Ấn [=], bảng giá trị hiện ra (gồm 4 cột, 12 dòng và có 11 giá trị). Ấn [▽] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

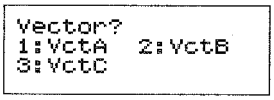


10. Phương thức VECTOR

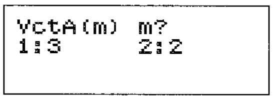
Chức năng: Giải quyết một số bài toán trong không gian hai chiều (Oxy) và không gian ba chiều $(Oxyz)$ thông qua các thành phần tọa độ của một vectơ.



Nhấn [MODE] [8] (VECTOR) để vào phương thức VECTOR. Một menu tùy chọn hiện ra (máy hỏi Vector?) cho phép ta đưa vào đó tối đa tọa độ của ba vectơ: vectơ $\vec{a}$(VctA), vectơ $\vec{b}$(VctB) và vectơ $\vec{c}$(VctC). Sử dụng các phím số từ [1] đến [3] để nhập tọa độ các vectơ tương ứng.



Sau khi chọn vectơ cần nhập, chẳng hạn ấn [1] để chọn nhập VctA, một menu tùy chọn khác hiện ra (máy hỏi VctA(m) m?), yêu cầu ta chọn nhập tọa độ của vectơ trong không gian ba chiều *Oxyz* (chọn [1]) hay hai chiều *Oxy* (chọn [2]).

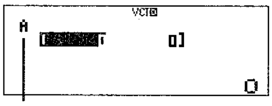


Ví dụ 10.1: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) nhập vào các vectơ $\vec{a}=(1;3)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(1;6)$.

Quy trình bấm máy

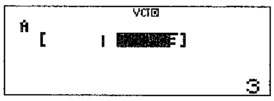
– **Bước 1:** Ấn [MODE] [8] (VECTOR) để vào phương thức VECTOR. Máy hỏi Vector? yêu cầu ta chọn nhập vào thông tin tọa độ của các vectơ (VctA,VctB,VctC).

– **Bước 2:** Ấn [1] (VctA), ấn [2] để chọn nhập vectơ trong không gian hai chiều (Oxy). Điều này sẽ làm hiển thị bộ soạn thảo vectơ để đưa vào tọa độ cho VctA.



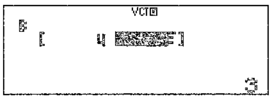
"A" viết tắt cho "VctA".

– **Bước 3:** Đưa vào màn hình các phần tử của VctA, ấn [1] [=] [3] [=].

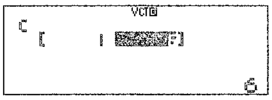


– **Bước 4:** Để nhập tiếp VctB, ta ấn SHIFT 5 (VECTOR), chọn 1 (Dim), ấn 2 (VctB), chọn 2 để nhập vectơ trong không gian hai chiều (Oxy). Điều này sẽ làm hiển thị bộ soạn thảo vectơ để đưa vào tọa độ cho VctA.

– **Bước 5:** Đưa vào màn hình các phần tử của VctB, ấn 4 = 3 =.



– **Bước 6:** Tương tự, ấn SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 3 (VctC) 2 để đưa vào các phần tử của VctC, ấn 1 = 6 =.



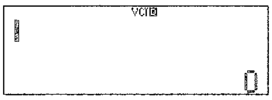
STUDY TIPS

– Để kiểm tra lại tọa độ của các véctơ vừa nhập, ấn SHIFT 5 (VECTOR) 2 (Data). Máy hỏi Vector? yêu cầu ta sử dụng các phím từ 1 đến 3 để chọn kiểm tra lại tọa độ của VctA, VctB và VctC vừa nhập.

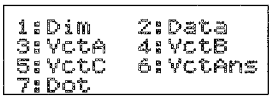
– Muốn nhập vào các véctơ trong không gian ba chiều $(Oxyz)$, hay thay đổi các véctơ vừa nhập, ấn SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) rồi thực hiện các thao tác nhập tương tự.

Cộng và trừ hai vector, nhân vector với một số thực

Sau khi đưa vào các phần tử (tọa độ) của các vectơ: VctA, VctB và VctC. Ấn AC đưa về màn hình tính toán.



Ấn SHIFT 5 (VECTOR), chọn 3 (VctA), 4 (VctB) và 5 (VctC) để đưa vào màn hình tính toán VctA, VctB hay VctC. Sử dụng các phím + hoặc − để cộng (hoặc trừ) hai vectơ.



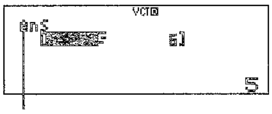
Ví dụ 10.2: Sau khi nhập xong các vectơ $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(1;6)$ từ ví dụ 10.1. Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để thực hiện phép tính $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ và $3\vec{a}-\vec{b}$.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Đưa vào máy $VctA=[1,3], VctB=[4,3]$ và $VctC=[1,6]$ (ví dụ 10.1).

– **Bước 2:** Ấn AC để đưa về màn hình tính toán.

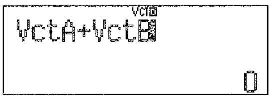
– **Bước 3:** Tính $VctA+VctB$, ấn SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $(5;6)$.

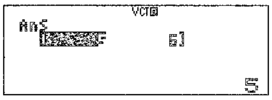


"Ans" viết tắt cho "VctAns"

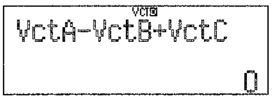
VctAns

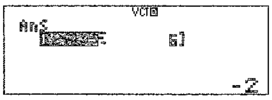
"VctAns" viết tắt cho "Vector Answer Memory" (Bộ nhớ trả lời vectơ). Bộ nhớ này có chức năng tương tự như bộ nhớ trả lời Ans đã được đề cập ở mục 1 (Phím RCL và các lệnh lưu trữ kết quả). Để sử dụng VctAns, ta ấn SHIFT 5 (VECTOR) 6 (VctAns)



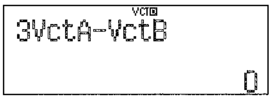


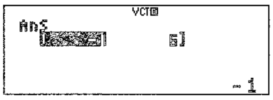
Tương tự, ta tính được $VctA-VctB+VctC=(-2;6)$.





Và $3VctA-VctB=(-1;6)$.

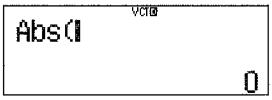




Độ lớn và hướng của vectơ

Một vectơ được xác định khi biết độ lớn và hướng của nó. Độ lớn được thể hiện bằng chiều dài của vectơ đó và ta có thể xác định chiều dài của vectơ $\vec{a}=(x_0;y_0)$ qua công thức $|\vec{a}|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

Tiếp tục ví dụ 10.1, độ dài của vectơ $\vec{a}=(1;3)$ được tính theo công thức $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.



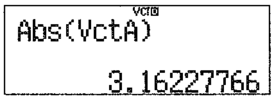
Trên máy tính, ta có thể sử dụng phím tính giá trị tuyệt đối [Abs] ([SHIFT] [hyp]) để tính toán độ lớn của một vectơ. Ấn [SHIFT] [hyp] (Abs), màn hình hiện Abs(, nhập vào vectơ cần tính độ lớn rồi ấn [)]. Ấn [=], kết quả được hiển thị.

Ví dụ 10.3: Sau khi nhập xong các véctơ $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(1;6)$ từ ví dụ 10.1. Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để tìm độ lớn của các véctơ $\vec{a},\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Quy trình bấm máy

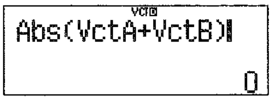
– **Bước 1:** Đưa vào máy $\text{VctA}=[1,3],\text{VctB}=[4,3]$ và $\text{VctC}=[1,6]$ (ví dụ 10.1).

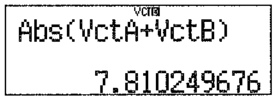
– **Bước 2:** Ấn [AC] để đưa về màn hình tính toán.



– **Bước 3:** Tính $|\vec{a}|$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 3,16227766.

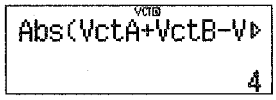
Tương tự, tính $|\vec{a}+\vec{b}|$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 7,810249676.





Và tính $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 4.





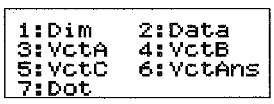
Tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ được định nghĩa là một số bằng:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Trong tọa độ Oxy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x_1;y_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2)$ được tính theo công thức $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

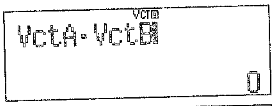
Trong tọa độ $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ được tính theo công thức $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

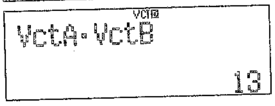


Trong máy tính, ấn [SHIFT] [5] [7] (Dot) để tính tính vô hướng của hai vectơ. Kí hiệu tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: VctA•VctB.

Ví dụ 10.4: Sau khi nhập xong các vectơ $\vec{a}=(1;3),\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(1;6)$ từ ví dụ 10.1. Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Quy trình bấm máy



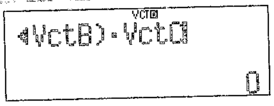


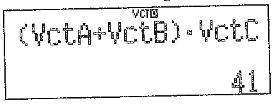
– **Bước 1:** Đưa vào máy $VctA=[1,3], VctB=[4,3]$ và $VctC=[1,6]$ (ví dụ 10.1).

– **Bước 2:** Ấn [AC] để đưa về màn hình tính toán.

– **Bước 3:** Ta có $\vec{a}.\vec{b}=VctA\circ VctB$, ấn [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 13.

Tương tự, ta có $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=(VctA+VctB)\circ VctC$, ấn [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [5]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 41.





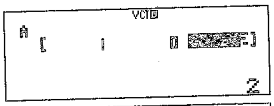
Tích có hướng của hai vectơ trong không gian Oxyz

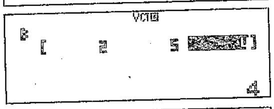
Trong không gian *Oxyz*, tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được định nghĩa là một vectơ vuông góc với cả vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$. Kí hiệu $[\vec{a},\vec{b}]$.

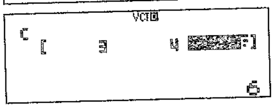
Trong máy tính, ta sử dụng phím [×] để tính tích có hướng của hai vectơ. Kí hiệu tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $VctA\times VctB$.

Ví dụ 10.5: Nhập vào máy các vectơ $\vec{a}=(1;0;2),\vec{b}=(2;5;4)$ và $\vec{c}=(3;4;6)$. Sau đó tính các tích có hướng sau: $[\vec{a},\vec{b}],[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]$.

Quy trình bấm máy







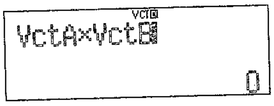
– **Bước 1:** Đưa vào máy $VctA=[1,0,2], VctB=[2,5,4]$ và $Vct=[3,4,6]$.

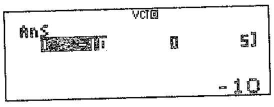
Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [1] (3) để nhập VctA. Ấn [1] [=] [0] [=] [2] [=] để đưa vào bộ soạn thảo vectơ tọa độ của $VctA=[1,0,2]$.

Ấn [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [1] (3) để nhập VctB. Ấn [2] [=] [5] [=] [4] [=] để đưa vào bộ soạn thảo vectơ tọa độ của $VctB=[2,5,4]$.

Ấn [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [1] (3) để nhập VctC. Ấn [3] [=] [4] [=] [6] [=] để đưa vào bộ soạn thảo vectơ tọa độ của $VctC=[3,4,6]$.

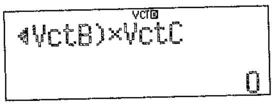
– **Bước 2:** Ấn [AC] để đưa về màn hình tính toán.

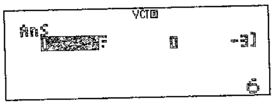




– **Bước 3:** Ta có $[\vec{a},\vec{b}]=VctA\times VctB$, ấn [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $[-10,0,5]$.

Tương tự, ta có $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=(VctA+VctB)\times VctC$, ấn [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $[6,0,-3]$.





Vậy $[\vec{a},\vec{b}]=(-10;0;5)$ và $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=(6,0,-3)$.

11. Phương thức INEQ

```
1: aX2+bX+c
2: aX3+bX2+cX+d
```

Chức năng: Giải các bất phương trình bậc hai, bậc ba một ẩn.

Trên máy tính, ấn MODE ▼ 1 (INEQ) đưa máy về phương thức INEQ. Khi đó, một menu tùy chọn hiện ra yêu cầu chọn dạng thích hợp: dạng bậc hai aX^2+bX+c và dạng bậc ba aX^3+bX^2+cX+d.

+ Để lựa chọn kiểu bất phương trình bậc hai, ấn phím 1, một menu tùy chọn khác hiện ra. Tại đây, sử dụng các phím từ 1 đến 4 chọn kiểu bất phương trình phù hợp.

```
1: aX2+bX+c>0
2: aX2+bX+c<0
3: aX2+bX+c≥0
4: aX2+bX+c≤0
```

+ Để lựa chọn kiểu bất phương trình bậc ba, ấn phím 2, một menu tùy chọn khác hiện ra. Tương tự, sử dụng các phím từ 1 đến 4 để chọn kiểu bất phương trình phù hợp.

```
1: aX3+bX2+cX+d>0
2: aX3+bX2+cX+d<0
3: aX3+bX2+cX+d≥0
4: aX3+bX2+cX+d≤0
```

CHÚ Ý

Khi tập nghiệm của bất phương trình đang được hiển thị trên màn hình máy tính, để trở về bộ soạn thảo hệ số ta ấn AC.

Sau khi lựa chọn kiểu bất phương trình cần giải, bộ soạn thảo hệ số hiện ra yêu cầu nhập vào các hệ số của bất phương trình.

Ví dụ 11.1: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) tìm tập nghiệm của bất phương trình bậc hai $2x^2+5x+2\ge 0$.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Ấn MODE ▼ 1 (INEQ), ấn 1 $\left(aX^2+bX+c\right)$ chọn giải bất phương trình bậc hai, ấn 3 $\left(aX^2+bX+c\ge 0\right)$. Bộ soạn thảo hệ số hiện ra.

```
[a b c]  aX2+bX+c≥0
0
```

– **Bước 2:** Nhập hệ số vào bộ soạn thảo: $a=2,b=5,c=2$. Ấn 2 = 5 = 2 =.

```
[2 5 ]  aX2+bX+c≥0
2
```

– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện kết quả là $X\le -2,-\frac{1}{2}\le X$.

```
X≤A, B≤X
X≤-2, -1/2≤X
```

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 11.2: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) tìm tập nghiệm của bất phương trình bậc ba $2x^3-3x^2-3x+2<0$.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Ấn MODE ▼ 1 (INEQ), ấn 2 $\left(aX^3+bX^2+cX+d\right)$ lựa chọn giải bất phương trình bậc ba, ấn 2 $\left(aX^3+bX^2+cX+d<0\right)$. Bộ soạn thảo hệ số hiện ra.

```
[b c d]  aX3+bX2+cX+d<0
0
```

– **Bước 2:** Nhập hệ số vào bộ soạn thảo: $a=2,b=-3,c=-3,d=2$. Ấn 2 = (−) 3 = (−) 3 = 2.

```
[-3 -3 ]  aX3+bX2+cX+d<0
2
```

– **Bước 3:** Ấn =, máy hiện kết quả là $X<-1,\frac{1}{2}<X<2$.

```
X<A, B<X<C
X<-1, 1/2<X<2
```

⚠ Trong một số trường hợp sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để giải bất phương trình, máy sẽ hiện kết quả All Real Numbers (bất phương trình luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$) hay No-Solution (bất phương trình vô nghiệm).

```
All Real Numbers
```

```
No-Solution
```

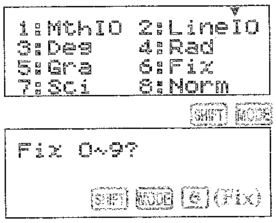
QUY TẮC LÀM TRÒN SỐ

* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại.
* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại.

Chú ý: Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

12. Chế độ Fix

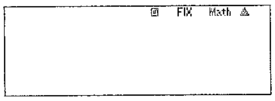
Chức năng: Chế độ Fix có chức năng làm tròn số đến một chữ số thập phân k nào đó. Máy tính cầm tay cho phép ta làm tròn một số tối đa đến chữ số thập phân thứ 9.



Ấn SHIFT MODE 6 (Fix) để đưa máy tính về chế độ Fix. Khi đó máy hỏi Fix 0 ~ 9? (có nghĩa là hỏi xem chúng ta muốn làm tròn số đó đến chữ số thập phân thứ mấy?). Ấn các phím số từ 0 đến 9 để chọn vị trí của chữ số thập phân cần làm tròn.

Chú ý: Chọn 0 có nghĩa là làm tròn một số thập phân đến hàng đơn vị (Để làm tròn một số thập phân đến ***hàng đơn vị***, ta lấy ***số nguyên gần với số đó nhất***).

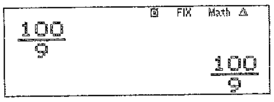
Sau khi chọn xong vị trí của chữ số thập phân cần làm tròn, trên góc màn hình hiển thị kí hiệu chữ FIX.



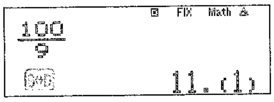
Ví dụ 12.1: Làm tròn số $\frac{100}{9}$ đến hàng đơn vị.

Quy trình bấm máy

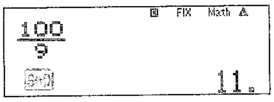
– **Bước 1:** Ấn SHIFT MODE 6 (Fix), chọn 0 để làm tròn một số thập phân đến hàng đơn vị.



– **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\frac{100}{9}$: 1 0 0 ▭/▭ 9



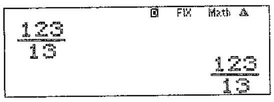
– **Bước 3:** Ấn = màn hình hiện kết quả bằng $\frac{100}{9}$ (dưới dạng phân số). Ấn S⇔D để chuyển kết quả về dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn, bằng $11,(1)$. Ấn S⇔D tiếp để chuyển kết quả về dạng làm tròn đến hàng đơn vị, bằng 11.



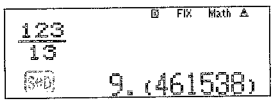
Ví dụ 12.2: Làm tròn số $\frac{123}{13}$ đến chữ số thập phân thứ 5.

Quy trình bấm máy

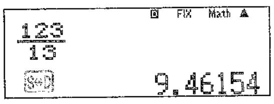
– **Bước 1:** Ấn SHIFT MODE 6 (Fix), chọn 5 để làm tròn một số thập phân đến chữ số thập phân thứ 5.



– **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\frac{123}{13}$: 1 2 3 ▭/▭ 1 3



– **Bước 3:** Ấn = màn hình hiện kết quả bằng $\frac{123}{13}$ (dưới dạng phân số). Ấn S⇔D để chuyển kết quả về dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn, bằng $11,(461538)$. Ấn S⇔D tiếp để chuyển kết quả về dạng làm tròn đến chữ số thập phân thứ 5, bằng 9,46154.



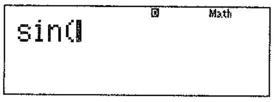
13. Các phím chức năng lượng giác và chế độ góc lượng giác

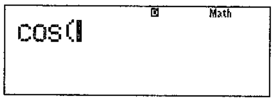
Các phím lượng giác

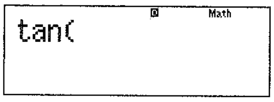
> **CHÚ Ý**
> Đơn vị góc mặc định của máy tính là độ (α°) (Deg). Khi đó, trên góc màn hình hiển thị kí hiệu D.

Chức năng: Tính giá trị lượng giác của một góc cụ thể $(\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha)$.

Ấn [sin], [cos], [tan] màn hình hiện sin(, hay cos(hay tan(. Nhập góc vào rồi ấn [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả.

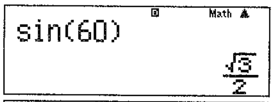


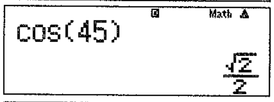


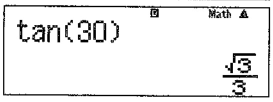


Ví dụ 13.1: Sử dụng máy tính casio để tính $\sin 60^\circ$, $\cos 45^\circ$ và $\tan 30^\circ$.

Quy trình bấm máy





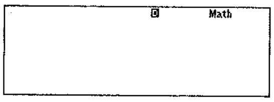
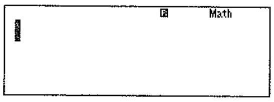


– Tính $\sin 60^\circ$, ấn [sin] [6] [0] [)], ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

– Tính $\cos 45^\circ$, ấn [cos] [4] [5] [)], ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

– Tính $\tan 30^\circ$, ấn [tan] [3] [0] [)], ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Độ (Deg) và rađian (Rad)

Ở chế độ mặc định của máy tính, đơn vị góc sẽ là độ (Deg) với kí tự chữ D hiện trên góc màn hình. Để đưa máy về đơn vị góc là độ, ấn [SHIFT] [9] [1] [=] [AC] (phương thức tính toán mặc định COMP); hoặc ấn [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

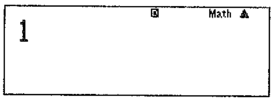
Rađian được định nghĩa là số đo của một cung có độ dài bằng bán kính của đường tròn mang cung đó. Để đưa máy về đơn vị góc là rađian, ấn [SHIFT] [MODE] [4] (Rad), khi góc màn hình sẽ hiện kí tự chữ R.

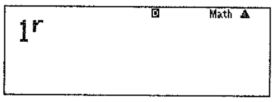
Chuyển đổi một góc từ rađian sang độ:

> – **Bước 1:** Kiểm tra xem máy đã được thiết lập ở chế độ Deg hay chưa. Nếu chưa, ấn [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).
> – **Bước 2:** Nhập góc (rađian) vào máy.
> – **Bước 3:** Ấn [SHIFT] [Ans] (DRG▸), một menu tùy chọn hiện ra gồm ba đơn vị (độ, radian và gradian). Ấn [2] để chọn đơn vị radian (đơn vị của góc cần chuyển).
> – **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả ở dạng số thập phân. Ấn [°'"] để hiển thị kết quả này dưới dạng đơn vị góc là độ.

Ví dụ 13.2: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để chuyển góc $1(\text{rad})$ sang đơn vị độ.

Quy trình bấm máy



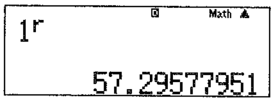


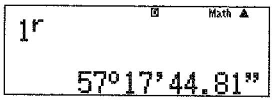
– **Bước 1:** Quan sát xem máy đã thiết lập ở chế độ Deg hay chưa. Nếu chưa thì ấn [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

– **Bước 2:** Nhập góc (radian) vào máy. Ấn [1].

– **Bước 3:** Ấn [SHIFT] [Ans] (DRG▸), ấn [2] để chọn đơn vị radian của góc cần chuyển.

– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả $57{,}29577951$. Để chuyển kết quả này sang độ, ấn [°'"], kết quả là $57^\circ17'44{,}81''$.

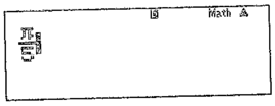


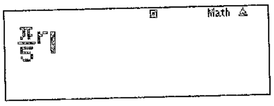


Ví dụ 13.3: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để chuyển góc $\frac{\pi}{5}(\text{rad})$ sang đơn vị độ.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Quan sát xem máy đã thiết lập ở chế độ Deg hay chưa. Nếu chưa thì ấn [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

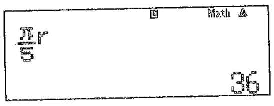


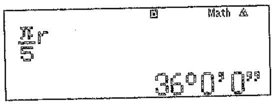


– **Bước 2:** Nhập góc radian vào máy. Ấn [$\frac{\square}{\square}$] [SHIFT] [$\times 10^x$] [$\blacktriangledown$] [5] $\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Ấn [$\triangleright$] để đưa con trỏ máy tính ra ngoài dấu phân số.

– **Bước 3:** Ấn [SHIFT] [Ans] (DRG▸), ấn [2] để chọn đơn vị radian của góc cần chuyển.

– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả 36. Để chuyển kết quả này sang độ, ấn [° ' "], kết quả là $36°0'0''$.





Chuyển đổi một góc từ độ sang radian:

– **Bước 1:** Quan sát xem máy đã được thiết lập ở chế độ Rad hay chưa. Nếu chưa, ấn [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

– **Bước 2:** Nhập góc (độ) vào máy.

– **Bước 3:** Ấn [SHIFT] [Ans] (DRG▸), một menu tùy chọn hiện ra gồm ba đơn vị (độ, radian và gradian). Ấn [1] để chọn đơn vị độ (đơn vị của góc cần chuyển).

– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện kết quả.

Ví dụ 13.4: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để chuyển góc 125° sang đơn vị radian.

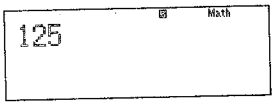
Quy trình bấm máy

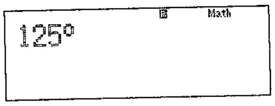
– **Bước 1:** Quan sát xem máy đã thiết lập ở chế độ Rad hay chưa. Nếu chưa thì ấn [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

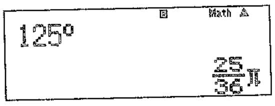
– **Bước 2:** Nhập góc (độ) vào máy. Ấn [1] [2] [5] (125).

– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [Ans] (DRG▸), ấn [1] để chọn đơn vị (độ) của góc cần chuyển.

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{25}{36}\pi$.







STUDY TIPS

Ngoài ra, ta có thể thực hiện chuyển một góc từ độ sang radian bằng cách nhân góc đó với $\frac{\pi}{180}$. Ở ví dụ 13.4, ta gán $\frac{\pi}{180} \to A$. Khi đó $125° \to 125.\frac{\pi}{180} = 125A$ $= \frac{25}{36}\pi(\text{rad})$.

Các hàm lượng giác ngược

Chức năng: Hàm lượng giác ngược cho phép ta tìm góc khi biết trước giá trị lượng giác của góc đó.

Sử dụng các lệnh [SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$), [SHIFT] [cos] ($\cos^{-1}$), hay [SHIFT] [tan] ($\tan^{-1}$). Nhập vào giá trị lượng giác rồi ấn [)]. Ấn [=], máy (có thể) hiện kết quả dưới dạng số thập phân. Ấn [° ' "] để hiển thị kết quả này dưới dạng đơn vị góc là độ (nếu máy đang thiết lập ở chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3].

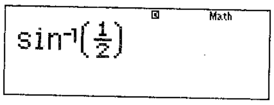
Ví dụ 13.5: Sử dụng máy tính casio (hay vinacal) để xác định góc α, biết rằng $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

STUDY TIPS

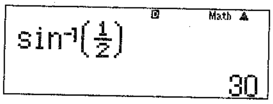
Nếu $\alpha = 150°$ thì ta cũng có $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Như vậy, máy tính không thể hiển thị hết tất cả các giá trị của một góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.
Để xác định được tất cả các góc α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, cần có sự linh hoạt giữa việc sử dụng máy tính và mối quan hệ giữa các cung (góc) có liên quan đặc biệt.

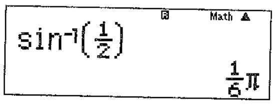
Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Nhập vào máy $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, ấn [SHIFT] [sin] [▭/▭] [1] [▼] [2] [▶] [)].

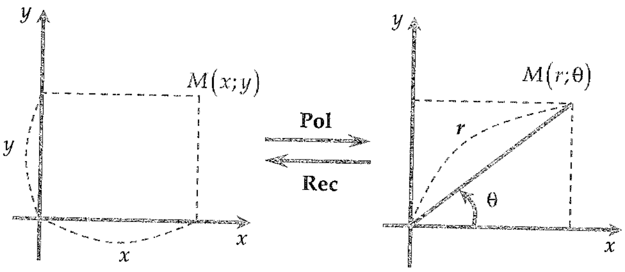


– **Bước 2:** Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 30 (nếu máy đang thiết lập ở chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3]) hay kết quả bằng $\frac{\pi}{6}$ (nếu máy đang thiết lập ở chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].





14. Phím chức năng Pol và Rec



Tọa độ chữ nhật (Rec) — Tọa độ cực (Pol)

HỆ TỌA ĐỘ CỰC

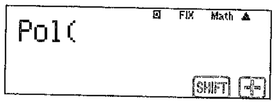
Hệ tọa độ cực là một hệ tọa độ hai chiều trong đó mỗi điểm *M* bất kì trên một mặt phẳng được biểu diễn bằng hai thành phần:
+ Khoảng cách từ điểm đó đến một điểm gốc *O* (gốc Cực) gọi là bán kính.
+ Góc tạo bởi đường thẳng *OM* với hướng gốc cho trước (trục Cực).

Chức năng: Pol chuyển đổi tọa độ chữ nhật (tọa độ Descartes) sang tọa độ cực. Ngược lại, Rec chuyển đổi tọa độ cực sang tọa độ chữ nhật.

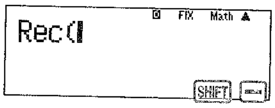
Ta có $\begin{cases} \text{Pol}(x,y) = (r,\theta) \\ \text{Rec}(r,\theta) = (x,y) \end{cases}$

Nếu tọa độ Descartes của điểm *M* là $M(x;y)$ (*M* khác gốc tọa độ *O*), thì tọa độ cực của điểm đó là $M(r,\theta)$. Trong đó $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ox}\right) = MOx \end{cases}$

Để tính tọa độ cực của điểm $M(a,b)$, ta sử dụng lệnh [SHIFT] [+] (Pol) và nhập vào màn hình $\text{Pol}(a,b)$. Ấn [=] máy hiện kết quả gồm (r,θ). Khi đó *r* (tọa độ bán kính) sẽ tự động được lưu vào biến nhớ X, và θ (tọa độ góc) được lưu vào biến nhớ Y.

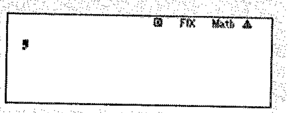


Để tính tọa độ chữ nhật của điểm $M(r,\theta)$, ta sử dụng lệnh [SHIFT] [−] (Rec) và nhập vào màn hình $\text{Rec}(r,\theta)$. Ấn [=] máy hiện kết quả gồm (X,Y) và các kết quả này sẽ tự động được lưu lần lượt và các biến nhớ X và Y.



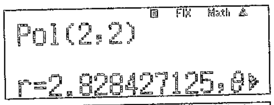
CHÚ Ý

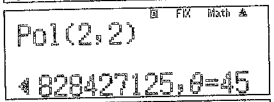
Để nhập vào màn hình dấu phẩy (,) ta ấn [SHIFT] [)].

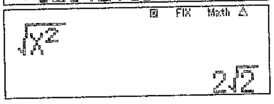


Ví dụ 14.1: Tìm tọa độ cực của điểm $M(2;2)$

Quy trình bấm máy







– **Bước 1:** Nhập vào màn hình $\text{Pol}(2,2)$: SHIFT + 2 SHIFT) 2)

– **Bước 2:** Ấn = máy hiện kết quả bằng $r = 2{,}828427125, \theta = 45$. Khi đó r được lưu vào biến nhớ X, và θ được lưu vào biến nhớ Y.

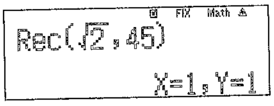
– **Bước 3:** Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$: √ ALPHA) x². Ấn = máy hiện kết quả là $2\sqrt{2}$. Suy ra $r = 2\sqrt{2}$.

Vậy điểm $M(2;2)$ có tọa độ cực là $\left(2\sqrt{2};45°\right)$.

Ví dụ 14.2: Tìm tọa độ Descartes (tọa độ chữ nhật) của điểm $M\left(\sqrt{2};45°\right)$.

Quy trình bấm máy

– **Bước 1:** Nhập vào màn hình $\text{Rec}\left(\sqrt{2},45\right)$: SHIFT − √ 2 ▶ SHIFT) 4 5)



– **Bước 2:** Ấn = máy hiện kết quả là $X = 1, Y = 1$. Khi đó các kết quả này sẽ tự động được lưu vào các biến nhớ X và Y.

Vậy điểm $M\left(\sqrt{2};45°\right)$ có tọa độ chữ nhật là $M(1;1)$.

PHẦN 2

Các chủ đề toán sử dụng Casio

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên *K*.

a, Nếu $f'(x)>0$ với mọi *x* thuộc *K* thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên *K*.

b, Nếu $f'(x)<0$ với mọi *x* thuộc *K* thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên *K*.

Định lý mở rộng:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên *K*. Nếu $f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right)$ với $\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên *K*.

B. Các phương pháp sử dụng máy tính giải bài toán liên quan đến tính đơn điệu của hàm số

Có hai cách phổ biến trong việc sử dụng máy tính để giải bài toán về tính đơn điệu của hàm số.

> **Cách 1:** Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 (TABLE) (đã được giới thiệu ở phần chức năng). Quan sát bảng kết quả nhận được ta xét được tính đơn điệu của hàm số trên khoảng cần xét.
>
> **Cách 2:** Sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm (với bài toán không chứa tham số). Hoặc tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm, cô lập *m* và đưa về dạng $m\ge f(x)$ hoặc $m\le f(x)$. Tìm min, max của hàm số $f(x)$ rồi kết luận.
>
> **Cách 3:** Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương tình INEQ của máy tính Casio để giải bất phương tình từ đó tìm được điều kiện của *x*.

C. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x$ đồng biến trên khoảng nào? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty;1)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

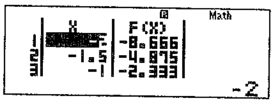
Lời giải

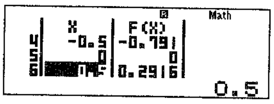
Cách 1: *Sử dụng bảng giá trị.*

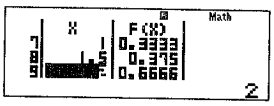
Do ở các phương án có các khoảng $\mathbb{R};(-\infty;1);(1;+\infty)$ nên ta sẽ sử dụng TABLE trên đoạn từ -2 đến 2 với STEP bằng 0,5.

Ta thực hiện nhập

MODE 7 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ 3 ▶ − ALPHA) x^2 + ALPHA) = = (−) 2 = 2 = 0 . 5 =





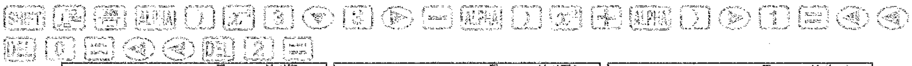


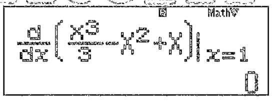
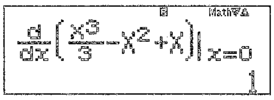
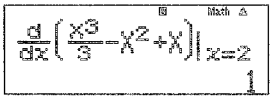
Ta thấy giá trị của hàm số tăng khi *x* chạy từ -2 đến 2. Do vậy ta chọn A.

Cách 2: *Sử dụng đạo hàm tại một điểm.*

Thực hiện kiểm tra giá trị của đạo hàm tại $x=1; x=0; x=2$.

Ta nhập



Ta thấy tại cả ba trường hợp thì $f'(x) \geq 0$. Do vậy ta loại cả B; C; D. Từ đây ta chọn A.

STUDY TIPS
Lí do ta thực hiện tính giá trị đạo hàm tại các điểm đó bởi vì trong các phương án chỉ xuất hiện hai khoảng $(1;+\infty)$ và $(-\infty;1)$.

Cách 3: Giải toán thông thường.

Ta nhẩm thấy $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dấu "=" xảy ra khi $x = 1$ (hữu hạn điểm).

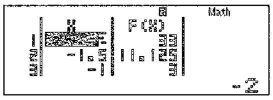
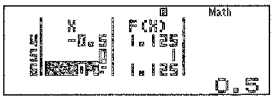
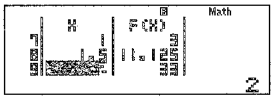
Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. B. $(0;+\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. D. $(-\infty;0)$.

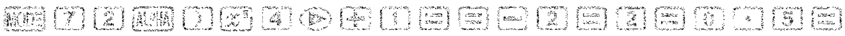
Lời giải

Cách 1: Sử dụng bảng giá trị.

Từ các phương án ta sẽ sử dụng TABLE trên đoạn từ -2 đến 2 với STEP bằng 0,5.

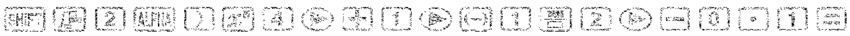
Ta thực hiện nhập

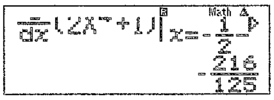


Từ bảng giá trị hiện trên màn hình ta thấy trên $[0;2]$ hàm số đồng biến. Do vậy ta chọn B.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm tại một điểm.

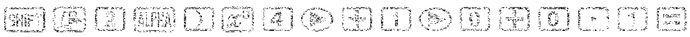
Với A: Kiểm tra trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ thì ta tính $f'\left(-\frac{1}{2}-0,1\right)$.

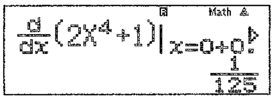




Đạo hàm của hàm số âm, do vậy ta loại A.

Với B: Kiểm tra trên khoảng $(0;+\infty)$ ta tính $f'(0+0,1)$





Kết quả ra $\frac{1}{125} > 0$ do vậy ta chọn B mà không cần thử C và D nữa.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

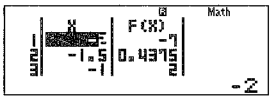
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

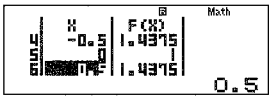
Lời giải

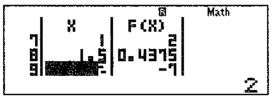
Cách 1: Sử dụng bảng giá trị.

Từ các phương án ta sẽ sử dụng TABLE trên –2 đến 2 với STEP 0,5.

[MODE] [7] [(-)] [ALPHA] [)] [x^n] [4] [▶] [+] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [=] [=] [(-)] [2] [=] [2] [=] [0] [.] [5] [=]







Từ bảng giá trị kết quả hiện ra ta thấy trên $\left[-2;-1\right]$ giá trị của hàm số tăng dần, do đó hàm số đồng biến trên $\left[-2;-1\right]$. Do vậy A đúng.

Ta có thể xét thêm các khoảng còn lại.

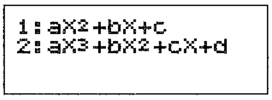
Với B, nhìn vào bảng giá trị ta thấy trên $\left(-1;0\right)$ giá trị của hàm số giảm dần, do vậy B sai. Ta loại B.

Với C ta thấy trên $\left(1;2\right)$ thì giá trị của hàm số giảm dần, do vậy ta cũng loại C, từ đây ta cũng loại được D.

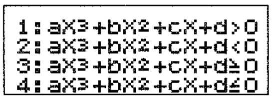
Cách 2: Sử dụng chức năng INEQ.

Ta nhẩm được đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = -4x^3 + 4x$.

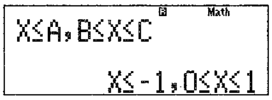
[MODE] [▼] [1] [2]



Do ở đây tất cả các phương án đều là hàm số đồng biến trên... do vậy ta sử dụng bất phương trình dạng 3 để giải.



[MODE] [▼] [1] [2] [3] [(-)] [4] [=] [0] [=] [4] [=] [0] [=] [=]



Từ kết quả ta kết luận hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$.

Đáp án A.

> **Ví dụ 4:** Với giá trị nào của m để hàm số $y = mx^3 - 3x^2 + \left(m-2\right)x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
>
> A. $m = -1$ B. $m = 0$. C. $m > -1$. D. $m \le -1$.

Lời giải

Với bài toán này ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng đạo hàm.

Nhập biểu thức $mx^3 - 3x^2 + \left(m-2\right)x + 3$ vào máy tính và thay $m = Y$.

Với A: Ta CALC cho $Y = -1; X = 10$.

Với B: Ta không cần thử do nếu $m = 0$ thì hàm số trở thành hàm số bậc hai, không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Với C: Ta CALC cho $Y = 100; X = 10$.

Với D: Ta CALC $Y = -100; X = 100$.

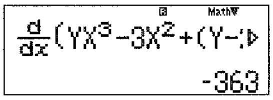
STUDY TIPS

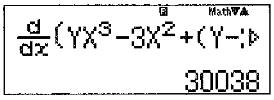
Do đề bài cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta sẽ tìm đạo hàm với $X = 10$ và sử dụng X cố định trong tất cả các phép thử.

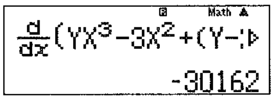
Với C và D, ta thử $Y = 100; Y = -100$ để thử giá trị rất xa so với biên xem có thỏa mãn hay không.

Ta có

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [x^n] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [S⇔D] [−] [2] [)] [ALPHA] [)] [+] [3] [▶] [1] [0] [CALC] [(-)] [1] [=] [1] [0] [=] [CALC] [1] [0] [0] [=] [=] [CALC] [(-)] [1] [0] [0] [=] [=]







Từ đây ta thấy C không thỏa mãn do C ra đạo hàm dương, còn A và D thỏa mãn, ta chọn D.

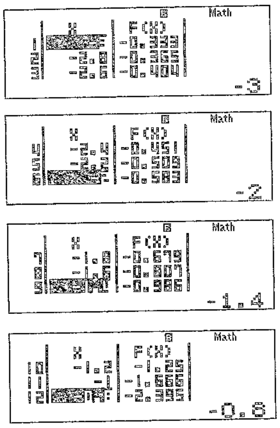
Đáp án D.

> **Ví dụ 5:** Tìm m để hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên đoạn $\left[-3;0\right]$.
>
> A. $m = -1$. B. $m = \pm 1$. C. $3m \ne \pm 1$. D. $m = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3mx^2 - 2x + 3$.

Hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên $[-3;0]$



$\Leftrightarrow 3mx^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2x-3}{3x^2} = f(x), \forall x \in [-3;0)$.

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[-3;0)} f(x)$.

Ta đi tìm $\max\limits_{[-3;0)} f(x)$ bằng lệnh MODE 7.

Ta nhập

MODE 7 (phân số) 2 ALPHA) − 3 ▼ 3 ALPHA) x^2 = = (−) 3 = 0 = 0 . 2 =

Ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-3;0) \Rightarrow \max\limits_{[-3;0)} f(x) = f(-3) = -\dfrac{1}{3}$. Do vậy để thỏa mãn yêu cầu thì $m \geq -\dfrac{1}{3}$. Trong các phương án chỉ có D thỏa mãn.

Đáp án D.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^4 + (2-m)x^2 + 4 - 2m$ nghịch biến trên $[-1;0]$.

A. $m \geq 4$. B. $m > 4$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

STUDY TIPS

Với những bài toán cho khoảng rộng thì ta ưu tiên sử dụng chức năng tính đạo hàm, còn những bài toán cho khoảng hẹp thì ta sử dụng TABLE.

Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta để ý các phương án A; B; C; D thì thấy A; B khác nhau ở dấu bằng, C và D cũng khác nhau dấu bằng, do vậy ta sẽ thử phương án $m > 4$ trước. Ta thử như vậy để nếu $m > 4$ không thỏa mãn ta có thể loại A luôn, tương tự với C và D.

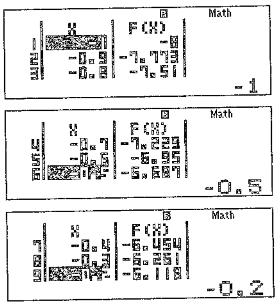
Do ở bài toán này, đề bài yêu cầu xét trên $[-1;0]$ là một đoạn ngắn nên ta sử dụng TABLE để giải quyết.

Ta thay m bằng các giá trị thử và nhập vào TABLE.

Với B: Ta thay $m = 5$.

Ta nhập

MODE 7 ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▶ + (2 − 5) ALPHA) x^2 + 4 − 2 × 5 = = (−) 1 = 0 = 0 . 1 =



Với B

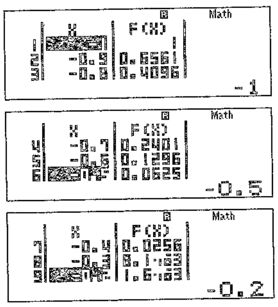
Qua đây ta thấy hàm số đồng biến trên $[-1;0]$ do khi cho x chạy từ -1 đến 0 thì giá trị của hàm số tăng dần. Vậy ta loại B, từ đây ta loại luôn A.

Còn hai phương án C và D thì ta sẽ thử C trước (tức ta thử $m = 2$) do nếu C không thỏa mãn hay thỏa mãn thì ta đều cho thể chọn được đáp án mà không cần thử thêm lần nữa.

Với C: Ta thay $m = 2$.

Ta nhập

MODE 7 ALPHA) $x^\blacksquare$ 4 ▶ + (2 − 2) ALPHA) x^2 + 4 − 2 × 2 = = (−) 1 = 0 = 0 . 1 =



Với C

Ta thấy với $m = 2$ thỏa mãn hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;0]$. Ta chọn C.

2. Giải toán thông thường.

Cách 1: Ta đặt $t = x^2$, do $x \in [-1;0]$ nên $t \in [0;1]$

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y=f(t)=t^2+(2-m)t+4-2m$ phải đồng biến trên $[0;1]$.

Ta có $y'=f'(t)=2t+2-m$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ $\Leftrightarrow f'(t)\geq 0,\forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\leq 2t+2,\forall t\in[0;1]$ $\Leftrightarrow m\leq 2$

Cách 2: Xét hàm số $y=x^4+(2-m)x^2+4-2m$ có

$y'=4x^3+2.(2-m).x=2x(2x^2+2-m)$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;0]$ thì $y'\leq 0,\forall x\in[-1;0]$.

Ta có $2x\leq 0,\forall x\in[-1;0]$, nên để thỏa mãn điều kiện thì

$$(2x^2+2-m)\geq 0,\forall x\in[-1;0]\Leftrightarrow 2-m\geq 0\Leftrightarrow m\leq 2.$$

Đáp án C.

> **CHÚ Ý**
>
> Khi giải toán thông thường, rất nhiều độc giả gặp vấn đề trong việc sau khi đặt t, lại giải quyết bài toán theo hướng sau "để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y=f(t)=t^2+(2-m)t+4-2m$ phải nghịch biến trên $[0;1]$." Đây là một hướng giải sai. Cũng với bài toán này, trong sách Công phá Toán trang 35 tôi đã rút ra nhận xét. Tôi sẽ nhắc lại ở phần cuối cùng trong ví dụ này.

Nhận xét:

Xét hàm số $f(x)=g(u(x))$ trên I (với I là khoảng (đoạn), nửa khoảng). Đặt $u(x)=t;t\in K$ (với K là một khoảng (đoạn), nửa khoảng được tính chặt chẽ theo điều kiện của x).

1. Nếu $u(x)$ là hàm số đồng biến trên I thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ cùng tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.

2. Nếu $u(x)$ là hàm số nghịch biến trên I thì thường hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ ngược tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.

Thường trong trường hợp này ta không đặt ẩn mà giải quyết bài toán bằng cách đạo hàm trực tiếp.

Ví dụ 7: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 2017$. B. $m<0$. C. $m\geq\frac{1}{2017}$. D. $m\geq -\frac{1}{2017}$.

Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có $y'=\cos x+\sin x+2017\sqrt{2}m$.

$$y'\geq 0\Leftrightarrow m\geq\frac{-\sin x-\cos x}{2017\sqrt{2}}=f(x)$$

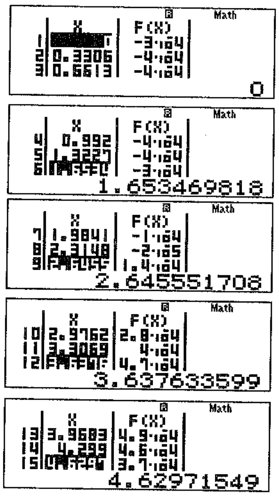
Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m\geq f(x)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

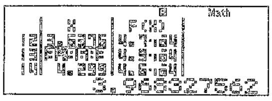
$\Leftrightarrow m\geq\max_{\mathbb{R}} f(x)$.

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta sử dụng chức năng TABLE.

Đưa về chế độ SHIFT MODE 4

Do hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ tuần hoàn với chu kì 2π nên ta sẽ thiết lập Start 0; End 2π; Step $\frac{2\pi}{19}$.





Ta nhập

[MODE] [7] [▭] [(-)] [sin] [ALPHA] [)] [)] [−] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▽] [2] [0] [1] [7] [√] [2] [=] [=]
[0] [=] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [=] [2] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [1] [9] [=]

Quan sát bảng giá trị của $F(X)$ ta thấy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(3{,}9683) \approx 4{,}9.10^{-4}$.

STUDY TIPS

Vì chu kì của hàm số trên là 2π nên ngoài cách thiết lập Start, End, Step như ở trên ta có thể thiết lập Start $-\pi$; End π.

Đây là một giá trị $\approx \dfrac{1}{2017}$. Vậy $m \ge \dfrac{1}{2017} \Rightarrow$ đáp án C.

2. Giải toán thông thường.

Tính đạo hàm $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$.

$$y' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{-\sin x - \cos x}{2017\sqrt{2}} = f(x)$$

Áp dụng bất đẳng thức Buniakovsky ta có

$$(-\sin x - \cos x)^2 \le \left((-1)^2 + (-1)^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le (-\sin x - \cos x) \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}}$$

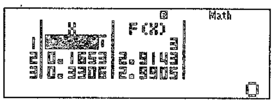
$f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2017} \Rightarrow m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{2017}$.

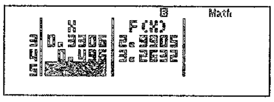
Đáp án C.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \ge \dfrac{5}{2}$. B. $m \le \dfrac{5}{2}$. C. $m \le \dfrac{5}{4}$. D. $m \ge \dfrac{5}{4}$.

Lời giải





Tương tự như ở ví dụ 6, để ý các phương án thì ta sẽ tìm được cách thử nhanh nhất.

Ta sẽ cho A; D thành một cặp; C và B thành một cặp.

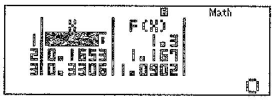
* Lúc này để thử hai phương án A và D ta sẽ thử như sau:

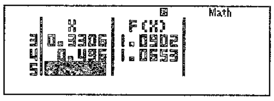
Chọn $m = 3$, thì ta sử dụng TABLE như sau

[MODE] [7] [▭] [3] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▽] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [=] [=] [0] [=] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [6] [=] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [1] [9] [=]

Ta thấy giá trị của hàm số lúc tăng lúc giảm, do vậy ta loại A và D.

* Với B và C ta sẽ thử một giá trị nằm trong khoảng $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{2}\right)$.





Chọn $m = 1{,}3$ ta sử dụng TABLE như sau

[MODE] [7] [▭] [1] [.] [3] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▽] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [=] [=] [0] [=] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [6] [=] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [1] [9] [=]

Ta thấy với $m = 1{,}3$ thì thỏa mãn điều kiện hàm số $y = \dfrac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$. Do vậy ta chọn B.

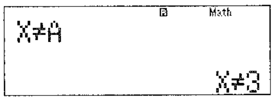
Đáp án B.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{matrix} m>6 \\ m<0 \end{matrix}\right.$. B. $m>6$. C. $m<0$. D. $m=9$.

Lời giải

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

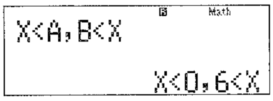


$y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2-36(m-2)>0 \Leftrightarrow m\neq 3$.

MODE ▽ 1 1 1 9 = − 9 × 2 − 3 6 = 9 + 3 6 × 2 = =

Áp dụng định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$.

Do hệ số $a=6>0$ nên để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3 $\Rightarrow |x_1-x_2|>3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-9>0$



$\Leftrightarrow (1-m)^2-4(m-2)-9>0 \Leftrightarrow m^2-6m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m>6 \\ m<0 \end{matrix}\right.$.

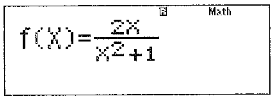
Ta nhập MODE ▽ 1 1 1 1 = − 6 = 0 = = để giải bất phương trình.

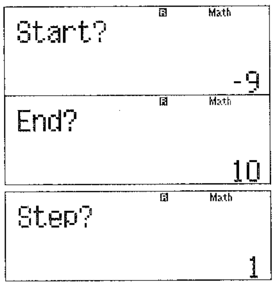
Đáp án A.

Ví dụ 10: Tìm m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]$. B. $(-\infty;-1)$. C. $[-1;1]$. D. $[1;+\infty)$.

Lời giải





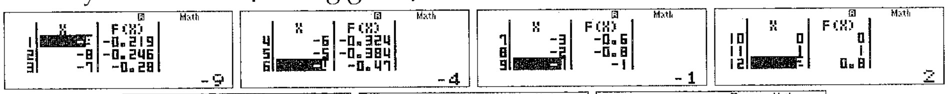
Cách 1: Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+1}-m$. Hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

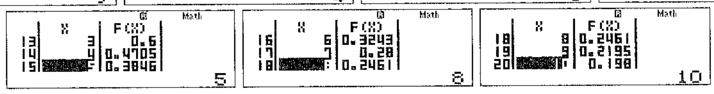
$\Leftrightarrow y'=\frac{2x}{x^2+1}-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq \frac{2x}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\leq \min_{\mathbb{R}}\frac{2x}{x^2+1}$.

Ta sử dụng TABLE để tìm $\min_{\mathbb{R}}\frac{2x}{x^2+1}$ với thiết lập Start −9; End 10; Step 1.

MODE 7 ÷ 2 ALPHA) ▽ ALPHA) x² + 1 = = (−) 9 = 1 0 = 1 =

Lúc này màn hình hiện bảng giá trị như sau



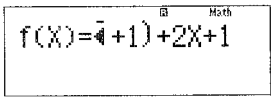


Quan sát toàn bảng giá trị ta thấy tại $x=-1$ thì $f(x)=-1$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số nên $\min_{\mathbb{R}}\frac{2x}{x^2+1}=-1$. Vậy $m\leq -1$.

Cách 2: Để ý 4 phương án thì nếu ta thử m là một số nhỏ hơn −1 hoặc lớn hơn 1 ta sẽ biết được loại C; D hay loại A; B, sau đó chỉ cần thử thêm 1 giá trị m nữa để chọn đáp án chính xác.

Ta thử với $m=-2$ lúc này hàm số trở thành $y=\ln(x^2+1)+2x+1$. Sử dụng TABLE để kiểm tra ta có

MODE 7 ln ALPHA) x² + 1) + 2 ALPHA) + 1 = = (−) 1 0 = 9 = 1 =

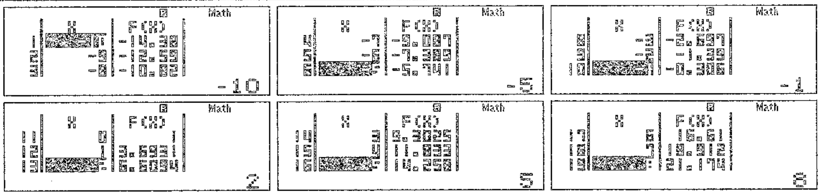


STUDY TIPS

Ngoài ra nếu không sử dụng máy tính ta có thể làm như sau

$\frac{2x}{x^2+1}\geq\frac{-2|x|}{x^2+1}\geq\frac{-2|x|}{2|x|}=-1$

$\Leftrightarrow m\geq -1$.

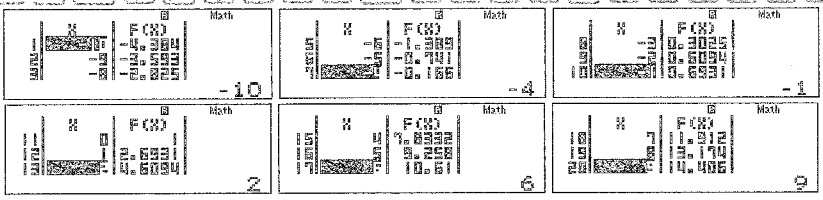


Quan sát bảng giá trị ta thấy $m=-2$ thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do vậy ta loại C; D.

Để phân biệt A; B ta chỉ cần thử thêm trường hợp $m=-1$.

Với $m=-1$, sử dụng TABLE ta có

[MODE] [7] [ln] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [)] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [=] [(−)] [1] [0] [=] [9] [=] [1] [=]



Quan sát bảng giá trị ta thấy $m=-1$ thỏa mãn, ta chọn A.

Đáp án A.

> **STUDY TIPS**
> Với cách 2 khi sử dụng [MODE] [7]
> Cách 1: làm như cách 2 ở bên.
> Cách 2: Đạo hàm rồi sử dụng TABLE xét tính âm dương, tuy nhiên cách này chỉ sử dụng khi đạo hàm có thể tính được một cách nhanh chóng.

Ví dụ 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(2-m)x^2-(2m-3)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1+\sqrt{6};+\infty\right)$.　　　　B. $m\in\left[-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\right]$.

C. $m\in\left(-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\right)$.　　　　D. $m\in\left(-\infty;-1-\sqrt{6}\right)$.

Lời giải

1. Giải toán thông thường.

Ta có $y'=3x^2+2(2-m)x-(2m-3)$.

Xét phương trình $y'=0$ có $\Delta'=(2-m)^2+3(2m-3)=m^2+2m-5$

Để hàm số $y=x^3+(2-m)x^2-(2m-3)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2+2m-5\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{6}\le m\le -1+\sqrt{6}.$$ Đáp án B.

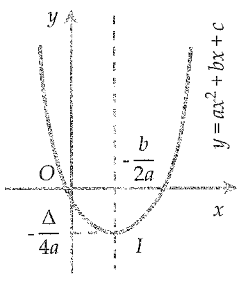
> *Phân tích:* Trong bài toán này ta sẽ giải toán theo cách suy luận thông thường trước, từ đó đưa ra cách làm bằng máy tính, do cách sử dụng máy tính dựa trên cơ sở là suy luận tự luận.

2. Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay.

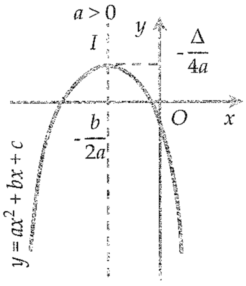
Phân tích suy luận: Với bài này ta sẽ gán $m=100$ và giải phương trình $y'=0$ bằng máy tính.

Trong máy tính cầm tay Fx-570 VN plus khi giải phương trình bậc hai với chức năng [MODE] [5] [3] thì máy tính sẽ hiện giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) của tam thức bậc hai trên toàn trục số. Mà ta có kết luận sau:

> Xét tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.
> - Nếu $a>0$ thì giá trị nhỏ nhất của tam thức trên $\mathbb{R}$ là $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$.
> - Nếu $a<0$ thì giá trị lớn nhất của tam thức trên $\mathbb{R}$ là $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$.
> (nhìn đồ thị để hiểu rõ hơn).



$a>0$



$a<0$

Ta thấy nếu sử dụng máy tính cầm tay ta sẽ tìm được giá trị của $-\frac{\Delta}{4a}$. Từ đó tìm được Δ tính theo $m=100$. Từ giá trị đó ta phân tích theo phương pháp phân tích đa thức bằng cách gán 100 (phụ lục 1), từ đó tìm được Δ theo m, và giải tìm điều kiện m.

Y-Value Minimum= $-\frac{10195}{3}$

Lời giải theo hướng sử dụng máy tính:

Thay 100 cho m thì $y'=3x^2+2(2-100)x-(2.100-3)$

Sử dụng MODE 5 3 để giải phương trình $y'=0$ ta được

MODE 5 3 3 = 2 × (2 − 1 0 0) = (−) (2 × 1 0 0 − 3) = = = = ▽

Máy hiện Y-Value minimum $=-\frac{10195}{3}$. Tức $-\frac{\Delta}{4.3}=-\frac{10195}{3}\Rightarrow\Delta=40780$.

Ta có $\Delta=40780=4.100^2+7.100+100-20=4.m^2+8m-20$

Giải bất phương trình $\Delta\le 0$ ta sử dụng máy tính MODE ▽ 1 1 4

MODE ▽ 1 1 4 4 = 8 = − 2 0 = =

A≤X≤B
$-1-\sqrt{6}\le X\le -1+\sqrt{6}$

STUDY TIPS

Thực chất khi tìm được Y-Value minimum thì ta để ý do hệ số $a=3>0$ nên ta chỉ cần bỏ mẫu và đổi dấu, tức là ta sử dụng luôn 10195 và tách $10195=100^2+200-5$ $=m^2+2m-5=\Delta'$

$\Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-5\le 0.$

Đáp án B.

Ví dụ 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+mx^2-3x+4$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. $m\in[-9;+\infty)$. B. $m\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

C. $m\in[-9;9]$. D. $m\in[-3;3]$.

Lời giải

Tương tự ví dụ trên ta gán $m=100$ và dùng MODE 5 3 để giải phương trình $y'=0$ và tìm Y-value maximun.

MODE 5 3 (−) 3 = 2 × 1 0 0 = − 3 = = = = =

Y-Value Maximum= $\frac{9991}{3}$

Ta thu được Y – Value Maximun $=\frac{9991}{3}$. Do hệ số $a=-3<0$ nên ta bỏ mẫu nhưng không đổi dấu tử số, tức ta có $9991=100^2-9=m^2-9$.

Do $-1<0$ nên để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta\le 0$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm) $\Leftrightarrow m^2-9\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le 3$.

Đáp án D.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-mx+5$. Giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ là

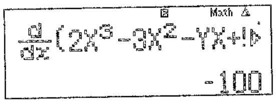
A. $m=0$. B. $m\ge 0$. C. $m\ne 0$. D. $m\le 0$.

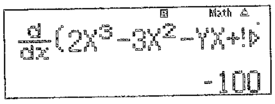
Lời giải

Vì hệ số của y' có $a=6>0$ nên đồ thị y' là parabol quay bề lõm lên trên (hình ở trang trước). Kết hợp hình dạng này với yêu cầu $y'\le 0$ trên $[0;1]$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm) thì ta cần tìm m sao cho $y'(0)\le 0$ và $y'(1)\le 0$.

1. Gán $m=100$ sau đó sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm để tìm $y'(0)$ và $y'(1)$.

100→Y
100





2. Nhập vào màn hình

[1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [S⇔D] [SHIFT] [∫□] [2] [ALPHA] [)] [x□] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [S⇔D]
[ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [0] [=]
[◀] [◀] [DEL] [1] [=]

Cả hai trường hợp đều cho kết quả $-100=-m \Rightarrow -m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$.

Đáp án B.

> Kết luận và chú ý: Từ các ví dụ từ ví dụ 11 đến ví dụ 13 ta thấy phương pháp gán *m* này có thể giải quyết nhanh bài toán, tuy nhiên chú ý ta chỉ nên áp dụng khi bài toán là hàm số bậc ba có các hệ số chứa tham số *m* có bậc 1 (bởi khi bậc lớn hơn 1 thì *m* biến thiên sẽ dễ ra kết quả sai).

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-4$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 3: Hàm số $y=2x^3+3x^2+1$ nghịch biến trên khoảng (hoặc các khoảng) nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$. B. $(-1;0)$.

C. $(0;1)$. D. $(-\infty;1)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 4: Hàm số nào trong các hàm số sau có bảng biến thiên như hình phía dưới

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

A. $y=x^3+3x^2+1$ B. $y=2x^3+6x^2-1$

C. $y=x^3+3x^2-1$ D. $y=3x^3+9x^2-1$

Câu 5: Hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến trên

A. $(2;3)$. B. $(\sqrt{2};3)$. C. $(2;4)$ D. $(3;4)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+7}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5;0)$ và $(0;5)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;0)$.

Câu 7: Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. B. $(-1;1)$. C. $(-\infty;+\infty)$ D. $(-\infty;0)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3m^2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. B. $m\le 0$. C. $m<0$. D. $m=0$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=2$. B. $m>1$. C. $m=1$. D. $m<1$.

Câu 12: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2-(m+1)x+1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ là

A. $-2<m\le -1$. B. $-2\le m\le -1$.

C. $-2\le m<-1$. D. $-2<m<-1$.

Câu 13: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 7 B. 4 C. 6 D. 5

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5 B. 4 C. Vô số D. 3

Câu 15: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-mx+1$. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m=3$. B. $m\le 3$. C. $m\ge 3$. D. $m>3$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{mx^2}{2}+2x+2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$. B. $m\le 2\sqrt{2}$.

C. $-2\sqrt{2}\le m$. D. $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-mx^2+3x+1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. B. $m=-2$. C. $m=3$. D. $m=0$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2\le m\le 1$.
B. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.
C. $-2<m<1$.
D. $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ (m là tham số thực). Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $-2<m<1$.
B. $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.
C. $-2\le m\le 1$.
D. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 20: Tìm tất cả các tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $1<m<2$.
B. $1\le m\le 2$.
C. $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Câu 21: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]$.
B. $(-\infty;1)$.
C. $[-1;1]$.
D. $[1;+\infty)$.

Câu 22: Hàm số $y=\sqrt{x^2-x+1}-mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m<-1$.
B. $m\le -1$.
C. $m\ge \sqrt{2}$.
D. $-\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2}$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.
B. $m\le -\sqrt{2}$.
C. $m\ge \sqrt{2}$.
D. $-\sqrt{2}\le m\le \sqrt{2}$.

Câu 24: Tìm m để hàm số $y=mx-\sin x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 1$. B. $m=1$. C. $m\ge -1$. D. $m<1$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $(-\infty;-1]$. B. $(-\infty;-1)$. C. $[-1;1]$. D. $[1;+\infty)$.

Câu 26: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ đồng biến trên $(-\infty;-3)$.

A. $S=(-\infty;-2)\cup(2;3]$.
B. $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
C. $S=(-\infty;-2]\cup(2;3]$.
D. $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

Câu 27: Để hàm số $y=x^4-2mx^2-3m+1$ đồng biến trên $(1;3)$ thì điều kiện của m là

A. $m>1$. B. $m\le 1$. C. $m\ge 2$. D. $m\le 2$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\frac{2}{3}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

A. $m>2$. B. $m\le 2$. C. $m<1$. D. $m\ge 1$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+mx+2$ nghịch biến trên $[0;3]$.

A. $m\ge 3$. B. $m\le 0$. C. $m\ge 4$. D. $m<0$.

Câu 30: Hàm số $y=2x^3+3x^2+6(m+1)x+m^2$ nghịch biến trên $[-2;0]$ khi m thỏa mãn

A. $m\le -1$. B. $m\le -\frac{3}{4}$. C. $m>-\frac{3}{4}$. D. $m\le -3$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3-mx^2+2x$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ là

A. $m\ge -\frac{13}{2}$.
B. $m\ge -2\sqrt{3}$.
C. $m\le 2\sqrt{3}$.
D. $m\ge \frac{13}{2}$.

Câu 32: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+x+m^2-4m+1$ đồng biến trên $[1;3]$.

A. $(-\infty;1]$.
B. $(-\infty;-1)$.
C. $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right)$.
D. $\left(-\infty;\frac{10}{3}\right]$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m>-3$. B. $m\le 0$. C. $m\le -3$. D. $m>0$.

Câu 34: Tìm tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S=[-1;0]$.
B. $S=\varnothing$.
C. $S=\{-1\}$.
D. $S=[0;1]$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2-(m+1)x-m+3$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$. B. $m=-1$. C. $m\notin\varnothing$. D. $m=2$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $-4\le m<-1$.
B. $\left[\begin{array}{l} -4\le m<-1 \\ m>2 \\ m\le -6 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$.
D. $-1<m<2$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x}{2}-\sqrt{x^2-x+m}$ đồng biến trên $(-\infty;2)$.

A. $m=\frac{1}{4}$. B. $m\ge\frac{1}{4}$. C. $m>2$. D. $m\ge 7$.

Câu 38: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx+(m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D=[2;+\infty)$.

A. $[0;+\infty)$.
B. $(-\infty;-1]$.
C. $[-2;-1]$.
D. $(-\infty;-1)$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;1)$.

A. $m\ge -2$. B. $m\le -2$. C. $m>1$. D. $m<1$.

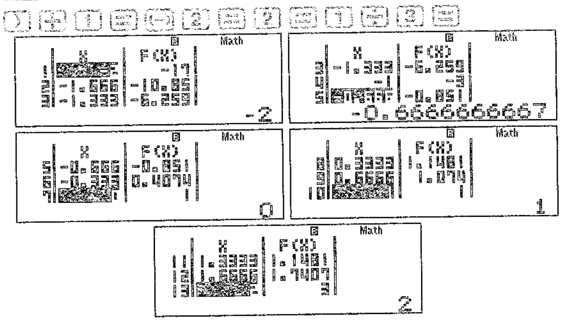
Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3\le m\le -\frac{1}{5}$.
B. $-3<m<-\frac{1}{5}$.
C. $m<-3$.
D. $m\ge -\frac{1}{5}$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án A.

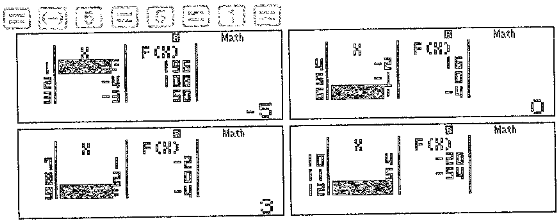
Sử dụng lệnh MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -2; End 2; Step $\frac{1}{3}$.



Quan sát bảng giá trị ta thấy trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$ giá trị của hàm số giảm dần, tức hàm số nghịch biến. Do vậy A đúng, ta chọn A.

Câu 2: Đáp án A.

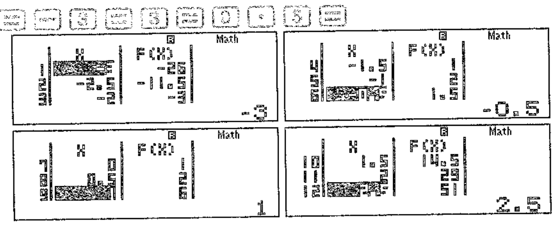
Sử dụng lệnh MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -5; End 5; Step 1.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy khi x chạy từ 0 đến 2 thì giá trị của hàm số tăng dần, do vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. Ta chọn A.

Câu 3: Đáp án B.

Sử dụng lệnh MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -3; End 3; Step 0,5.

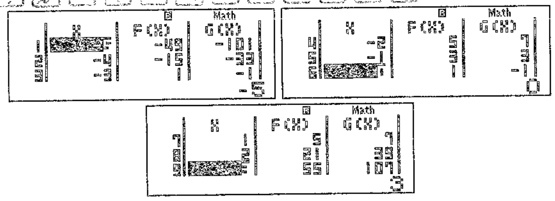


Ta thấy khi cho x chạy từ -1 đến 0 thì giá trị của hàm số giảm dần, do vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;0)$. Ta chọn B.

Câu 4: Đáp án C.

Với bài toán này ta sẽ sử dụng MODE 7 (TABLE) với hai hàm số SHIFT MODE ▽ 5 2 với thiết lập Start -5; End 5; Step 1.

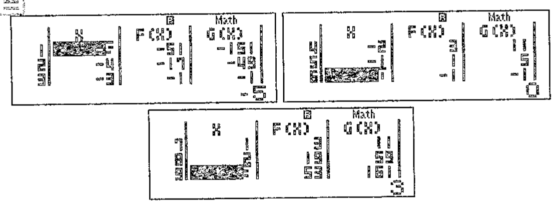
Với A và B: Ta nhập



Ta thấy với hàm số $f(x)$ (tức phương án A) thì $f(0)=1$ không thỏa mãn, ta loại A.

Với hàm số $g(x)$ (tức phương án B) thì $g(-2)=7\neq 3$ không thỏa mãn, do đó ta loại B.

Với C và D ta cũng thiết lập tương tự như với A và B.

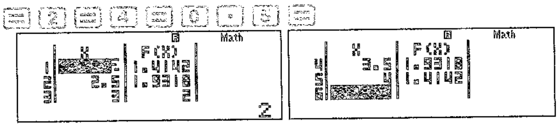


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $f(x)$ (tức phương án C) thỏa mãn (có sự biến thiên như bảng biến thiên đề bài cho), do vậy ta chọn C.

Câu 5: Đáp án D.

Tập xác định $D=[2;4]$.

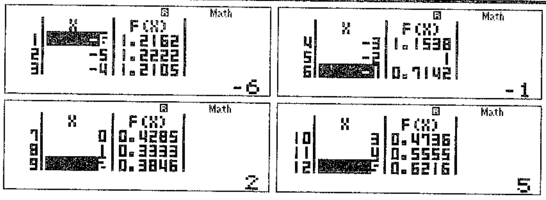
Ta sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start 2; End 4; Step 0,5.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy khi x chạy từ 3 đến 4 thì giá trị của hàm số giảm dần, do vậy hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến trên $(3;4)$. Ta chọn D.

Câu 6: Đáp án C.

Ta sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -6; End 6; Step 1.



Ta thấy khi cho x chạy từ -5 đến 0 thì giá trị của hàm số giảm, do vậy ta loại A.

Ta thấy khi cho x chạy từ -1 đến 0 thì giá trị của hàm số giảm, do vậy hàm số không đồng biến trên $(-1;0)$, ta loại B.

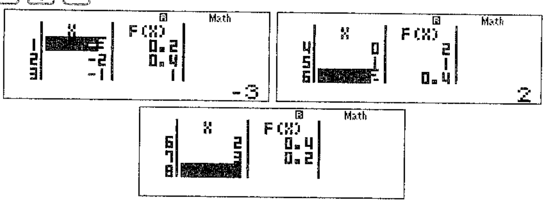
Ta thấy khi cho x chạy từ -5 đến 1 thì giá trị của hàm số giảm dần, do vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$, thỏa mãn, do vậy ta chọn C.

Câu 7: Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng máy tính.

Ta sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -3; End 3; Step 1.

MODE 7 2 ÷ ALPHA) x² + 1 = = − 3 = 3 = 1 =



Ta thấy khi x chạy từ 0 đến $+\infty$ giá trị của hàm số giảm, do vậy hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$, ta chọn A.

Cách 2: Giải toán thông thường.

Đạo hàm $y' = -\dfrac{2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

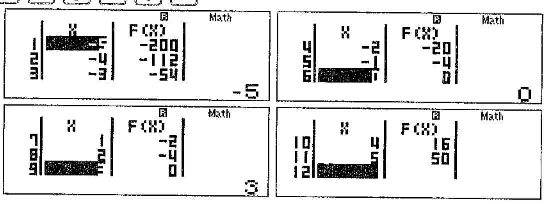
Ta có $y'<0, \forall x \in (0;+\infty)$ và $y'>0, \forall x \in (-\infty;0)$. Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Ta chọn A.

Câu 8: Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -5; End 5; Step 1.

MODE 7 ALPHA) x³ 3 ▶ − 3 ALPHA) x² = = − 5 = 5 = 1 =



Ta thấy khi cho x chạy từ 0 đến 2 thì giá trị của hàm số giảm dần, do vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$, ta chọn A.

Cách 2: Giải toán thông thường.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

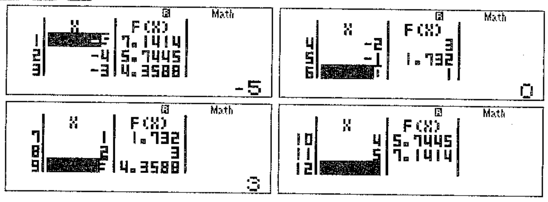
Do $y'<0, \forall x \in (0;2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và $y'>0, \forall x \in (-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách 1: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -5; End 5; Step 1.

MODE 7 √ 2 ALPHA) x² + 1 = = − 5 = 5 = 1 =



Ta thấy trên $(-1;1)$ giá trị của hàm số lúc tăng lúc giảm nên ta loại A.

Ta thấy giá trị của hàm số tăng khi cho x chạy từ 0 đến $5 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, ta chọn B.

Cách 2: Giải toán thông thường.

Xét hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm

$$y' = \frac{\left(2x^2+1\right)'}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}};\ y'=0 \Leftrightarrow x=0.$$

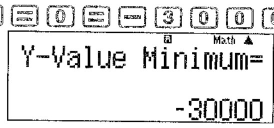
Ta có $y'<0, \forall x \in (-\infty;0)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$; $y'>0, \forall x \in (0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 10: Đáp án D.

Áp dụng phương pháp sử dụng máy tính cầm tay trong ví dụ 11 phần lí thuyết ta được.

Thay 100 cho m thì ta được $y' = 3x^2 - 3.100^2$.

MODE 5 3 3 = 0 = − 3 0 0 0 0 = =



Ta có $-30000 = -3.100^2 = -3.m^2$

Do hệ số $a=3>0$ nên ta đổi dấu

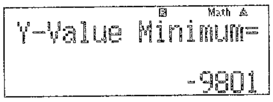
Giải bất phương trình $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 3m^2 \le 0 \Leftrightarrow m=0$.

Ta chọn D.

Câu 11: Đáp án C.

Thay $m=100$ ta có $y'=x^2-2.100x+2.100-1$.

Giải phương trình $y'=0$ ta có



$-9801=-\left(100^2-200+1\right)=-\left(m^2-2m+1\right)=-\left(m-1\right)^2$

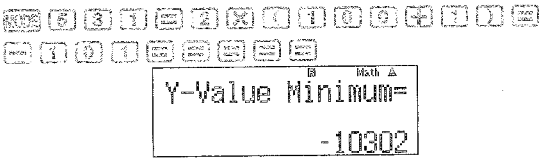
Do hệ số $a>0$ nên ta đổi dấu tức

$\Delta\le 0\Leftrightarrow\left(m-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow m=1$.

Câu 12: Đáp án B.

Gán $m=100$ ta được $y'=x^2+2.\left(100+1\right)x-\left(100+1\right)$

Ta có

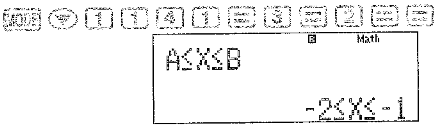


Ta có $a=1>0$ nên ta đổi dấu

$10302=100^2+3.100+2=m^2+3m+2$.

Ta có $\frac{1}{3}>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

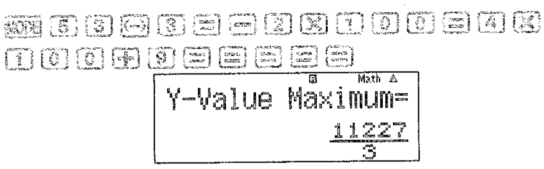
$m^2+3m+2\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le -1$.



Câu 13: Đáp án A.

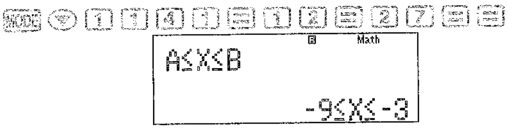
Gán $m=100$ ta có $y'=-3x^2-2.100x+\left(4.100+9\right)$

Ta có



Do hệ số $a<0$ nên ta sẽ bỏ mẫu và giữ nguyên dấu tử số $11227=100^2+12.100+27=m^2+12m+27$

Giải bất phương trình $m^2+12m+27\le 0$ ta có



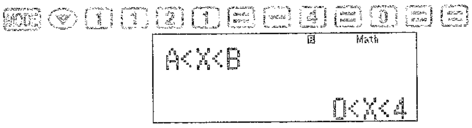
Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\right\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Đáp án D.

Ta có $y'=\frac{m^2-4m}{\left(x+m\right)^2},\left(x\ne -m\right)$. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi

$y'<0,\forall x\ne -m\Leftrightarrow m^2-4m<0$

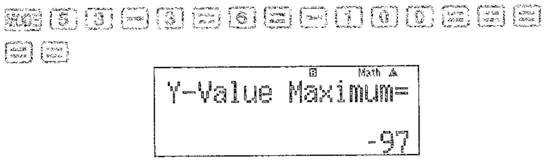


Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{1;2;3\right\}$. Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Đáp án C.

Gán $m=100$ ta có $y'=-3x^2+6x-100$.

Ta có



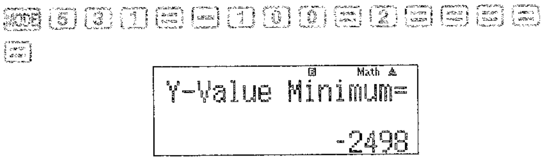
Do hệ số $a<0$ nên ta giữ nguyên dấu

$-97=-100+3=-m+3$.

Giải bất phương trình $-m+3\le 0\Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 16: Đáp án A.

Gán $100=m$ ta có $y'=x^2-100x+2$.



$-\frac{\Delta}{4a}=-2498\Rightarrow\Delta=2498.4=9992$

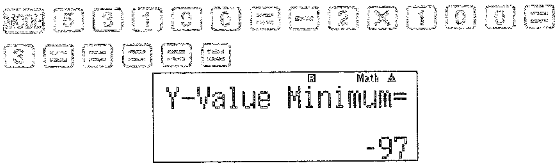
$9992=100^2-8=m^2-8$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì

$m^2-8\le 0\Leftrightarrow -2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$.

Câu 17: Đáp án D.

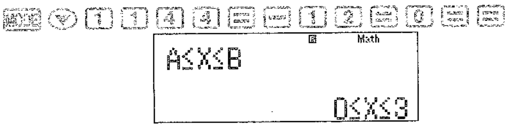
Gán 100 cho m ta có $y'=100x^2-2.100x+3$.



$-\frac{\Delta}{4a}=-97$

$\Leftrightarrow\Delta=38800=3.100^2+\left(100-12\right).100=4m^2-12m$

$\Delta\le 0\Leftrightarrow 4m^2-12m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 3$



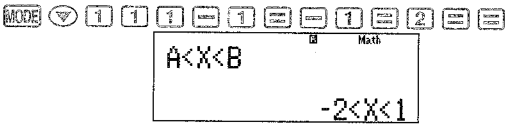
Vậy giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m=0$. Chọn D.

Câu 18: Đáp án C.

Điều kiện $x \neq m$.

$$y' = \frac{-m(m+1)+2}{(x-m)^2} = \frac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng khác định thì $-m^2-m+2>0$.



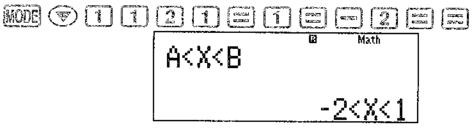
Suy ra $-2<m<1$ thỏa mãn, ta chọn C.

Câu 19: Đáp án A.

Điều kiện $x \neq m$.

$$y' = \frac{m(m+1)-2}{(x-m)^2} = \frac{m^2+m-2}{(x-m)^2}.$$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định thì $m^2+m-2<0$.



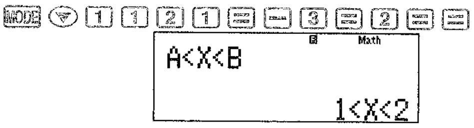
Vậy $-2<m<1$ thỏa mãn.

Câu 20: Đáp án A.

Điều kiện $x \neq 3-m$.

Ta có $y' = \dfrac{m(m-3)+2}{(x+m-3)^2} = \dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó thì $m^2-3m+2<0$



Vậy $1<m<2$ thỏa mãn, ta chọn A.

Câu 21: Đáp án A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$

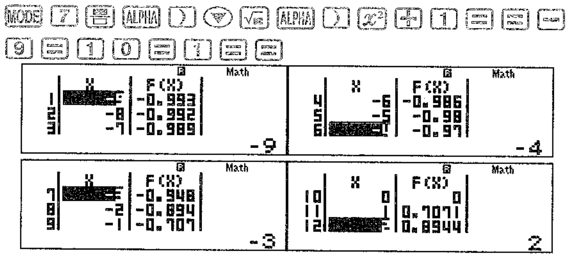
Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì

$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Sử dụng TABLE để tìm $\min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ta thiết lập Start -9; End 10; Step 1.



Nhìn vào bảng giá trị kết hợp với các phương án A; B; C; D ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \Rightarrow m \leq -1$ (thỏa mãn yêu cầu), ta chọn A.

Câu 22: Đáp án B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

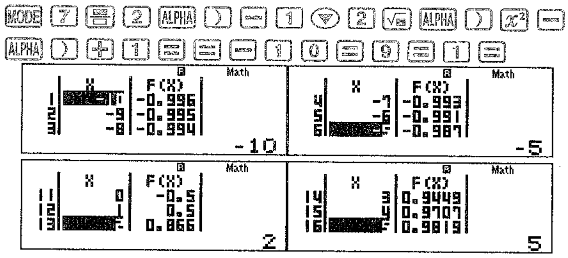
Ta có $y' = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - m$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

Ta sử dụng TABLE để tìm $\min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ với thiết lập Start -10; End 9; Step 1.



Từ bảng giá trị và kết hợp với các phương án ta đưa ra kết luận $\min\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = -1 \Rightarrow m \leq -1$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài), chọn B.

Câu 23: Đáp án C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m$

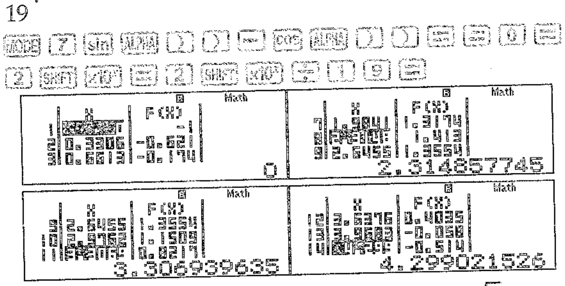
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \geq \sin x - \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[0;2\pi]}(\sin x - \cos x)$ (do hàm số tuần hoàn với chu kì 2π nên ta xét trên $[0;2\pi]$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2π; Step $\frac{2\pi}{19}$.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\max_{[0;2\pi]} \approx 1;413 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow m \ge \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta chọn C.

Câu 24: Đáp án A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = m - \cos x$.

Hàm số đã cho đồng biến trên

$\mathbb{R} \Leftrightarrow m - \cos x \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm).

$\Leftrightarrow m \ge \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \ge \max_{\mathbb{R}}(\cos x) \Leftrightarrow m \ge 1$.

Câu 25: Đáp án A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

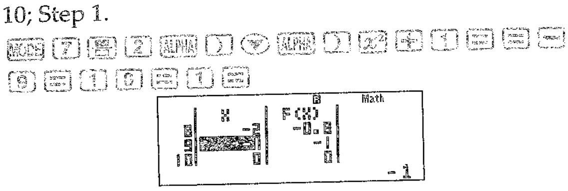
Ta có $y' = \frac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm).

$\Leftrightarrow m \le \frac{2x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le \min_{\mathbb{R}} \frac{2x}{x^2+1}$.

Sử dụng TABLE để tìm min với thiết lập Start -9; End 10; Step 1.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy

$\min_{\mathbb{R}} \frac{2x}{x^2+1} = -1 \Leftrightarrow x = -1$. $\Rightarrow m \le -1$. Ta chọn A.

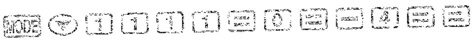
Câu 26: Đáp án A.

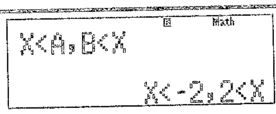
Điều kiện: $x \ne -m$.

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$ thì

$$\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ -m \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ 2 < m \le 3 \end{array}\right.$$



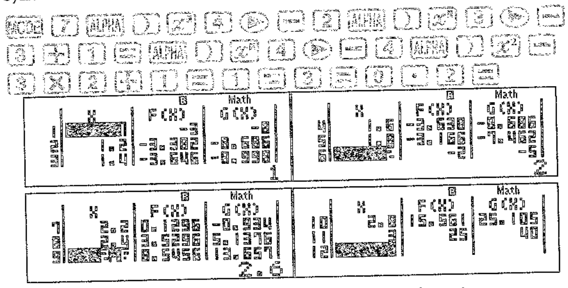


$\Rightarrow S = (-\infty; -2) \cup (2; 3]$. Ta chọn A.

Câu 27: Đáp án B.

Ta thấy ba phương án B; C; D đều xuất hiện 1, nên ta sẽ thử $m = 1$. Do lệnh TABLE có thể hiển thị bảng giá trị của hai hàm số cùng một lúc nên ta sẽ thử cùng với 1 phương án khác luôn, ta chọn $m = 2$ (vì có thể xét được cả A và D).

Sử dụng lệnh TABLE với thiết lập Start 1; End 3; Step 0,2.



Ta thấy với $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow$ loại A.

Với $m = 2$ hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ loại C và Loại C. Từ đây ta chọn B.

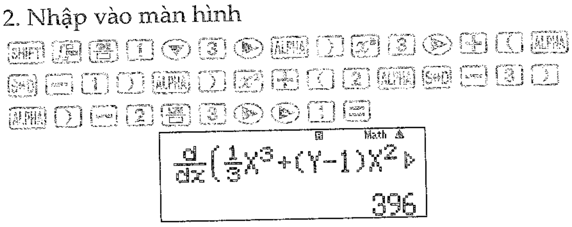
Câu 28: Đáp án D.

Ta có hệ số y' có $a = 1 > 0$ nên đồ thị y' là parabol quay bề lõm lên trên. Kết hợp với yêu cầu $y' \ge 0; \forall x \in [1; +\infty)$ thì ta cần tìm m sao cho $y'(1) \ge 0$.

1. Gán $m = 100$ sau đó sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm để tìm $y'(1)$.



2. Nhập vào màn hình



Ta có $396 = 400 - 4 = 4m - 4 \Rightarrow y'(1) = 4m - 4$.

$4m - 4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1$. Ta chọn D.

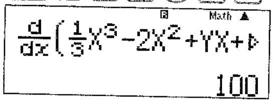
Câu 29: Đáp án B.

Gán $m = 100$

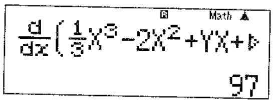
Hệ số y' có $a = 1 > 0$ nên đồ thị $g(x) = y'$ là parabol quay bề lõm lên trên. Kết hợp với yêu cầu $y' \le 0, \forall x \in [0; 3]$ thì ta cần tìm m sao cho $y'(0) \le 0$ và $y'(3) \le 0$

Gán 100 cho Y sao đó dùng chức năng tính đạo hàm tại một điểm để tìm $y'(0)$ và $y'(3)$.

[1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]
[SHIFT] [d/dx] [1] [▭/▭] [3] [▶] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [−] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [+] [2] [▶] [0] [=]



[◀] [◀] [DEL] [3] [=]



$y'(0)=100=m; y'(3)=97=m-3$

$\begin{cases} m\le 0 \\ m-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0.$

Câu 30: Đáp án D.

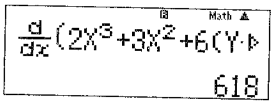
Vì $y'=6x^2+6x+6(m+1)$ có hệ số $a=6>0$ nên đồ thị y' là parabol quay bề lõm lên trên (dạng chữ U).

Kết hợp hình dạng này với yêu cầu $y'\le 0$ trên $[-2;0]$ của đề bài thì ta cần tìm m sao cho $y'(-2)\le 0$ và $y'(0)\le 0$.

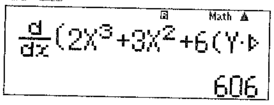
Gán $100\to Y$ (Y ở đây là m).

Tìm $y'(-2)' y'(0)$

[SHIFT] [d/dx] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [+] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [6] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [▶] [−] [2] [=]



[◀] [◀] [DEL] [DEL] [0] [=]



Ta có $\begin{cases} 618=6m+18 \\ 606=6m+6 \end{cases}$

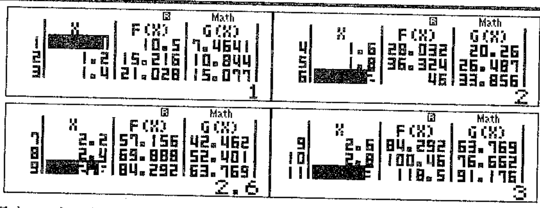
$\begin{cases} 6m+18\le 0 \\ 6m+6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -3 \\ m\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le -3.$

Câu 31: Đáp án A.

Với A và B, ta sẽ thử với $m=-\frac{13}{2}$ và $m=-2\sqrt{3}$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 1; End 3; Step 0,2.

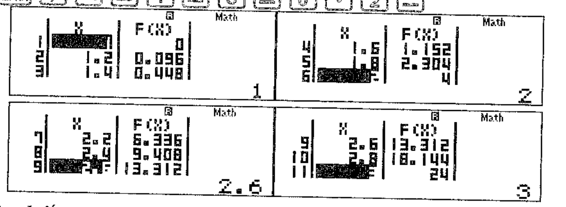
[MODE] [7] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [+] [1] [3] [▭/▭] [2] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [=] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [+] [2] [√] [3] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [=] [1] [=] [3] [=] [0] [.] [2] [=]



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy cả hai giá trị $n=-\frac{13}{2}; m=-2\sqrt{3}$ đều thỏa mãn, do vậy ta loại B, từ đây ta cũng loại được D.

Với C ta thử $m=4$.

[MODE] [7] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [−] [4] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [=] [=] [1] [=] [3] [=] [0] [.] [2] [=]



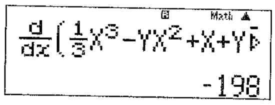
Ta thấy $m=4$ thỏa mãn, do vậy ta loại C, chọn A.

Câu 32: Đáp án A.

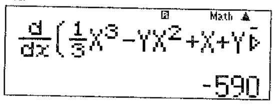
Gán $100\to Y$

Tìm $y'(1); y'(3)$

[SHIFT] [d/dx] [▭/▭] [1] [▼] [3] [▶] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [−] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [−] [4] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [▶] [1] [=]



[◀] [◀] [DEL] [3] [=]



$\begin{cases} -198=-2m+2 \\ -590=-6m+10 \end{cases}$

$\begin{cases} -2m+2\ge 0 \\ -6m+10\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 1 \\ m\le \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\le 1.$ Chọn A.

Câu 33: Đáp án B.

Ta có $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$

$\Leftrightarrow y=\sin^3 x-3\left(1-\sin^2 x\right)-m\sin x-1$

$\Leftrightarrow y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4.$

Đặt $\sin x=t\in[0;1]$.

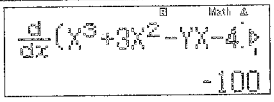
Bài toán trở thành tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=t^3+3t^2-mt-4$ đồng biến trên $[0;1]$.

Tương tự như các bài trước, ta gán $m=100$

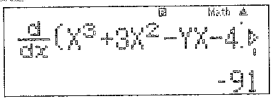
$100\to Y$ [1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

Tính $y'(0); y'(1)$.

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [+] [3] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [−] [4] [▶] [0] [=]







Ta có $\begin{cases}-100=-m\\-91=-100+9=-m+9\end{cases}$

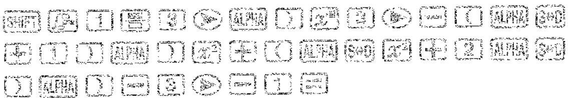
$\begin{cases}-m\ge 0\\-m+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\m\le 9\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$

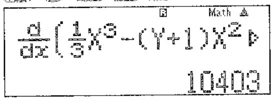
Ta chọn B.

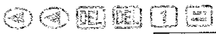
Câu 34: Đáp án C.

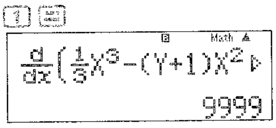
$100\to Y$

Tìm $y'(-1);y'(1)$









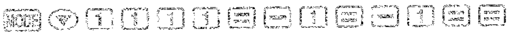
Ta có $\begin{cases}10403=100^2+4.100+3=m^2+4m+3\\9999=100^2-1=m^2-1\end{cases}$

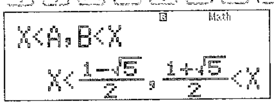
$\begin{cases}m^2+4m+3\le 0\\m^2-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le m\le -1\\-1\le m\le 1\end{cases}\Rightarrow m=-1.$

Câu 35: Đáp án A.

Ta có $y'=-x^2+2mx-(m+1)$.

$\Delta'=m^2-m-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$



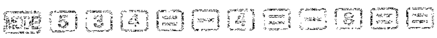


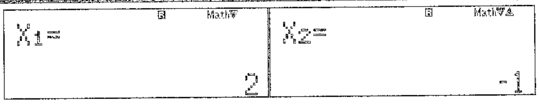
Áp dụng định lí Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m+1\end{cases}$

Do hệ số $a=-\frac{1}{3}<0$ nên hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2

$\Leftrightarrow|x_1-x_2|=2\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-8=0$





Kết hợp cả hai điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$ thỏa mãn.

Câu 36: Đáp án B.

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t\in(4;6)$

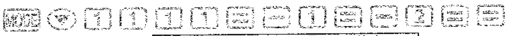
Bài toán trở thành tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)t+2}{t+m}$ đồng biến trên $(4;6)$.

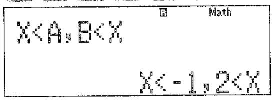
$y'=\frac{m^2-m-2}{(t+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(4;6)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\-m\notin(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}-m\le 4\\-m\ge 6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m\ge -4\\m\le -6\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le m<-1\\m>2\\m\le -6\end{array}\right.$



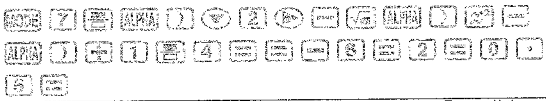


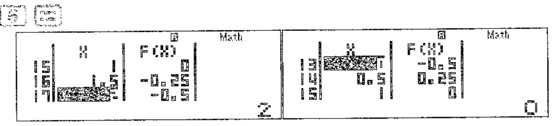
Vậy ta chọn B.

Câu 37: Đáp án D.

Do A và B cùng xuất hiện $m=\frac{1}{4}$ nên ta xét $m=\frac{1}{4}$ trước.

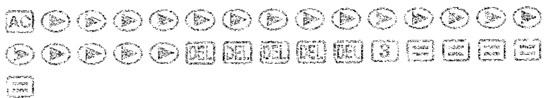
Sử dụng TABLE với thiết lập Start −6 End 2; Step 0,5.

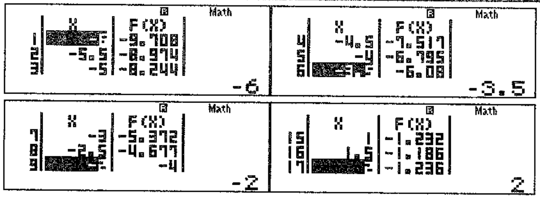




Ta thấy với $m=\frac{1}{4}$ khi cho x chạy như thiết lập thì giá trị của hàm số lúc tăng lúc giảm, do vậy $m=\frac{1}{4}$ không thỏa mãn. Ta loại A và B.

Ta thử với $m=3$.





Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $m=3$ thì khi x chạy từ -6 đến 2, giá trị của hàm số lúc tăng lúc giảm, do vậy không thỏa mãn yêu cầu, loại C, chọn D.

Câu 38: Đáp án B.

Điều kiện $x\ge 2$.

Ta có $y=m(x-2)+(m+1)\sqrt{x-2}+2m$

Đặt $\sqrt{x-2}=t\,(t\ge 0)$.

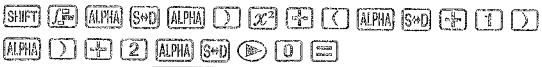
Bài toán trở thành, tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mt^2+(m+1)t+2m$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

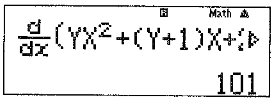
Với $m=0$ thì không thỏa mãn, do vậy ta xét $m\ne 0$. Từ đây ta cũng có thể loại được A.

Nhìn vào các phương án còn lại ta thấy đều là số âm, do vậy ta xét $m<0$

Với $m<0$ thì hàm số $g(x)=y'$ nghịch biến, do vậy ta chỉ cần tìm m để $y'(0)\le 0$ là thỏa mãn.

Gán $100\to Y$





Ta có $101=100+1=m+1$

$m+1\le 0\Leftrightarrow m\le -1$. Ta chọn B.

Câu 39: Đáp án B.

Điều kiện $x\le 1$.

Ta có

$y=(m-x^3)\sqrt{1-x^3}=(m-1+1-x^3)\sqrt{1-x^3}$

$=(1-x^3)\sqrt{1-x^3}+(m-1)\sqrt{1-x^3}$

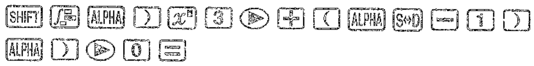
Đặt $t=\sqrt{1-x^3};t\ge 0$.

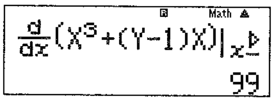
Do hàm số $t=\sqrt{1-x^3}$ nghịch biến trên $(0;1)$ do vậy:

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y=t^3+(m-1)t$ nghịch biến trên $(0;1)$ (phần ví dụ đã giải thích vấn đề này)

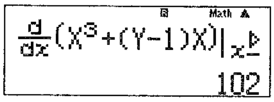
Gán $100\to Y$.

Tìm $y'(0);y'(1)$









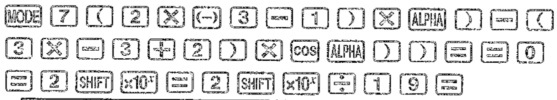
$\begin{cases}99=m-1\\102=m+2\end{cases}$

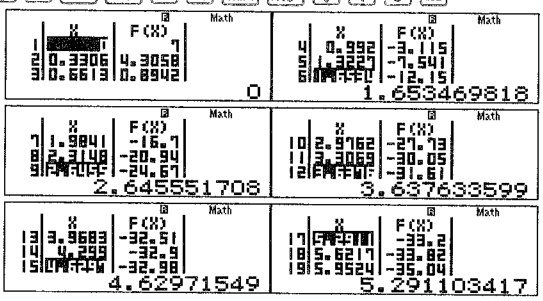
$\begin{cases}m-1\le 0\\m+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\m\le -2\end{cases}\Leftrightarrow m\le -2$. Ta chọn B.

Câu 40: Đáp án A.

Do các bài toán chỉ xuất hiện $-3;-\frac{1}{5}$. Nên ta sẽ thử $m=-3$ trước, vì nếu $m=-3$ thỏa mãn, ta có thể loại được cả B và C.

Với $m=-3$ sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2π; Step $\frac{2\pi}{19}$.





Ta thấy $m=-3$ thỏa mãn, do vậy ta loại B và C; D. Vậy ta chọn A.

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng

Định lý

Định lý 1

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

a. Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b. Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

STUDY TIPS

Từ định lý 1 ta có thể đưa ra kết luận "nôm na" về cực trị của hàm số như sau.
Để tìm điểm cực trị của hàm số bằng máy tính ta có thể sử dụng chức năng đạo hàm để xét sự đổi dấu của đạo hàm qua điểm đó, từ đó đưa ra kết luận về cực trị của hàm số.

Định lý 2

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0-h;x_0+h)$, với $h>0$. Khi đó

a. Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu;

b. Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Quy tắc tìm cực trị.

Quy tắc 1.

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2.

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu $x_i\ (i=1;2;...)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ ta suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

B. Các phương pháp cơ bản sử dụng máy tính giải bài toán liên quan đến cực trị của hàm số

Có hai cách cơ bản để tìm cực trị của hàm số.

Cách 1: Sử dụng lệnh tính đạo hàm tại một điểm của hàm số.
Cách 2: Sử dụng TABLE.

C. Các ví dụ minh họa

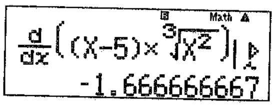
Dạng 1: Các bài toán cơ bản về cực trị của hàm số.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
D. Hàm số không có cực tiểu.

Lời giải

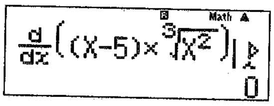
1. Sử dụng máy tính cầm tay.



Với A: Ta nhập

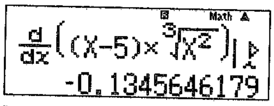
[SHIFT] [∫] [(] [ALPHA] [)] [−] [5] [)] [×] [SHIFT] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [ALPHA] [)] [x^2] [▶] [▶] [1] [=]

Ta thấy tại $x=1$ đạo hàm của hàm số đã cho không bằng 0, do vậy $x=1$ không phải là điểm cực trị của hàm số, loại A.



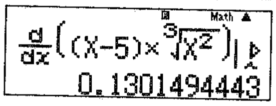
Với B: Ta nhập tiếp tục trên màn hình của phương án A [◀] [◀] [DEL] [2] [=]

Ta thấy tại đây $y'(2)=0$. Ta tiếp tục kiểm tra điều kiện để $x=2$ là điểm cực tiểu. Để $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ thì đạo hàm của hàm số đổi dấu từ âm sang dương qua $x=2$



Kiểm tra $y'(2-0,1)$ ta tiếp tục nhập trên màn hình trước đó

[◀] [◀] [−] [0] [.] [1] [=]



Kiểm tra $y'(2+0,1)$ ta tiếp tục nhập trên màn hình trước đó

[◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [DEL] [+] [=]

Từ kiểm tra trên ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=2$ và $y'(2)=0$, do vậy $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Đáp án B.

2. Giải toán thông thường.

Tính đạo hàm $y'=\sqrt[3]{x^2}+(x-5).\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{3x+2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$.

$y'=0\Leftrightarrow 5(x-2)=0\Leftrightarrow x=2.$

$$y'>0\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0\\x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0\\x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right..$$

$y'<0\Leftrightarrow 0<x<2.$

Vậy $y'(2)=0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua $x=2$. Ta chọn B.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Số điểm cực trị của hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ bằng

A. 2. B. 0. C. 3. D. 4.

Lời giải

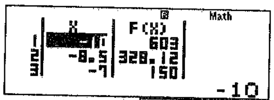
Cách 1: Sử dụng TABLE.

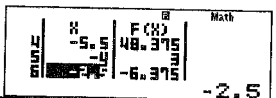
Ta sẽ sử dụng TABLE với một khoảng khá rộng để xét tính đơn điệu của hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ từ đó xét được số điểm cực trị của hàm số.

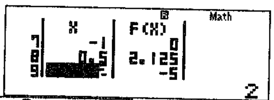
Ta sẽ áp dụng Start -10; End 10; Step 1,5.

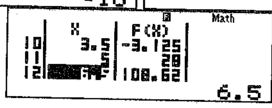
Cách nhập

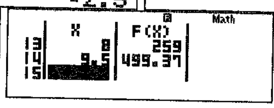
[MODE] [7] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [−] [4] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [3] [=] [=] [(−)] [1] [0] [=] [1] [0] [=] [1] [.] [5] [=]











Từ kết quả hiện trên màn hình ta phân tích như sau:

- Ta thấy giá trị của hàm số giảm dần khi cho x chạy từ -10 đến $-2,5$. Sau đó giá trị hàm số lại tăng khi x chạy từ -1 đến $0,5$. Do vậy ở đây ta có một điểm cực trị $x = x_0$ với $x_0 \in (-2,5;-1)$.
- Sau đó khi cho x chạy từ 2 đến $-3,5$ thì giá trị của hàm số lại giảm. Do đó hàm số lại có một điểm cực trị $x = x_1$ với $x_1 \in (0,5;2)$.
- Tiếp theo giá trị của hàm số lại tăng khi x chạy từ 5 đến 9,5 thì giá trị của hàm số tăng dần, tức hàm số lại có một điểm cực trị $x = x_2$ với $x_2 \in (3,5;5)$.

STUDY TIPS

Bài toán này ta nên sử dụng khoảng rộng để không bỏ sót điểm cực trị của hàm số. Với bài toán này, để chắc chắn không bỏ sót điểm cực trị nào của hàm số ta có thể xét thêm TABLE trên các khoảng $(-\infty;-10)$ và $(-10;+\infty)$ xem hàm số có thực sự nghịch biến trên $(-\infty;-10)$ và đồng biến trên $(-10;+\infty)$ hay không.

Để dễ hình dung phân tích trên ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Do vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách 2: Tính đạo hàm sau đó sử dụng máy tính giải phương trình.

Nếu $x<0$ thì $\left(|x|^3\right)' = \left(-x^3\right)' = -3x^2$.

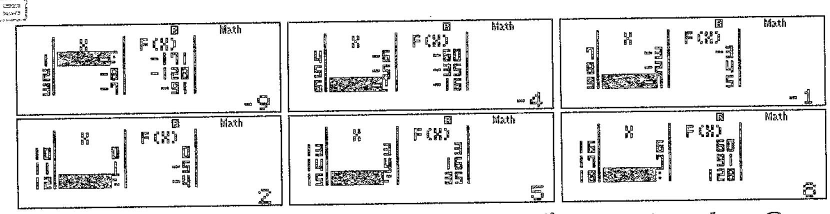
Nếu $x>0$ thì $\left(|x|^3\right)' = \left(x^3\right)' = 3x^2$.

Vậy $y' = \left(|x|^3 - 4x^2 + 3\right)' = 3x|x| - 8x$.

Số điểm cực trị của hàm số ứng với số nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Ta sử dụng chức năng MODE 7 để dò nghiệm và sự đổi dấu của y' qua nghiệm.

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 8 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



STUDY TIPS

Với các bài toán tính đạo hàm của hàm số đề cho không phức tạp thì ta nên sử dụng cách 2, vì như vậy ta sẽ dễ xét tính đổi dấu qua các dấu dương âm, còn cách 1 dễ nhầm lẫn khi xét tính đơn điệu.

Ta thấy y' đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$ hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, ta chọn C.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ là

A. $x=-1; x=3$

B. $x = -\frac{22}{3}; x = \frac{10}{3}$

C. $x=-1; x=5$

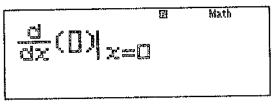
D. $x=4; x=3$

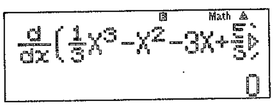
Lời giải

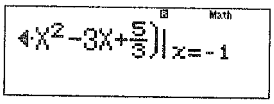
Cách 1: Sử dụng MTCT.

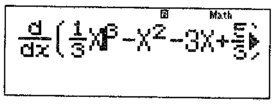
Ta sẽ sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính.

Ấn SHIFT ∫ ($\frac{d}{dx}$) thì máy hiện như hình bên.









Nhập hàm số $\frac{1}{3}X^3 - X^2 - 3X + \frac{5}{3}$ tại giá trị $X = -1$ (Ta lần lượt thử các phương án).

Tại $x = -1$ thì $y' = 0$ suy ra $x = -1$ là một điểm cực trị của hàm số.

Tương tự ta giữ nguyên màn hình và thay $x = -1$ thành $x = 3$ thì được kết quả tương tự. Từ đó ta chọn A.

Cách 2: Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$-\frac{22}{3}$	↗	$+\infty$

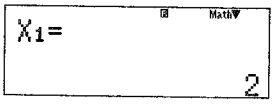
Từ BBT ta thấy hàm số có điểm cực đại $x = -1$ và điểm cực tiểu $x = 3$.

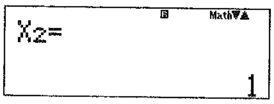
Đáp án A.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải





Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1;\ y'' = 2x - 2m$.

Để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ thì $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases}$

Để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 1$ thì $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$.

Ta sử dụng chương trình [MODE] [5] [3] để giải phương trình bậc hai

[MODE] [5] [3] [1] [=] [(−)] [3] [=] [2] [=] [=]

Tiếp theo với $m = 2$ thì $y''(1) = 2.1 - 2.2 = -2 < 0$ thỏa mãn.

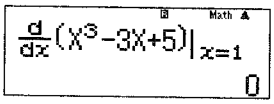
Với $m = 1$ thì $y''(1) = 0$ không thỏa mãn. Vậy ta chọn C.

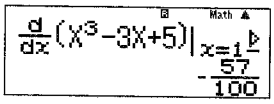
Đáp án C.

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 + 5$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Lời giải





Ta thấy nếu ta thử với $m = 0$ thì có thể so sánh giữa A và D.

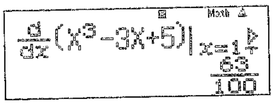
- Kiểm tra khi $m = 0$ thì hàm số có đạt cực đại tại $x = 1$ không.

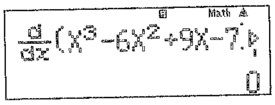
[SHIFT] [∫] [ALPHA] [)] [$x^{\blacksquare}$] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [1] [=]

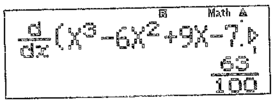
Tiếp theo ta lần lượt kiểm tra dấu của đạo hàm tại $x = 1 - 0,1$ và tại $x = 1 + 0,1$.

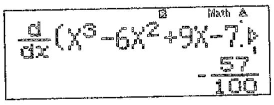
[◀] [◀] [−] [0] [.] [1] [=]

[◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [DEL] [+] [=]









Ta thấy dấu của y' đổi từ âm sang dương khi qua $x=1 \Rightarrow x=1$ không phải là điểm cực đại của hàm số. Do vậy ta loại A và D.

- Tương tự ta kiểm tra khi $m=2$.

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [)] [x³] [3] [▶] [−] [6] [ALPHA] [)] [x²] [+] [9] [ALPHA] [)] [−] [7] [▶] [1] [=]

[◀] [◀] [−] [0] [.] [1] [=]

[◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [DEL] [+] [=]

Ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm

$\Rightarrow$ Hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2+5$ đạt cực đại tại $x=1$

Đáp án B.

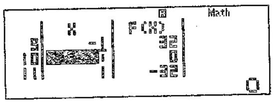
Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m-1\right)x^2+2$ có đúng một điểm cực đại và không có cực tiểu.

A. $m<1$. B. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$. C. $m<0$. D. $m\ge 1$.

Lời giải

Tính $y'=4mx^3+2\left(m-1\right)x$. Để hàm số có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu thì $y'=0$ có đúng 1 nghiệm và $y'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm đó.

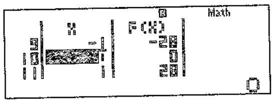
Chọn $m=-5$. Dùng [MODE] [7] tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'\left(x\right)$.



[MODE] [7] [4] [×] [(] [−] [5] [)] [ALPHA] [)] [x³] [3] [▶] [+] [2] [(] [−] [5] [−] [1] [)] [ALPHA] [)] [=] [=] [−] [6] [=] [1] [0] [=] [1] [=]

Ta thấy $f'\left(x\right)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=-5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là A, B, C

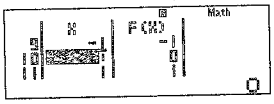
Chọn $m=5$. Dùng [MODE] [7] tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'\left(x\right)$



[AC] [▶] [▶] [▶] [▶] [DEL] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [DEL] [=] [=] [=] [=] [=]

Ta thấy $f'\left(x\right)$ đổi dấu 1 lần từ âm sang dương $\Rightarrow m=5$ loại $\Rightarrow$ Đáp án B sai

Chọn $m=0,5$. Dùng [MODE] [7] tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'\left(x\right)$.



[AC] [▶] [▶] [▶] [−] [0] [.] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [▶] [−] [0] [.] [=] [=] [=] [=] [=]

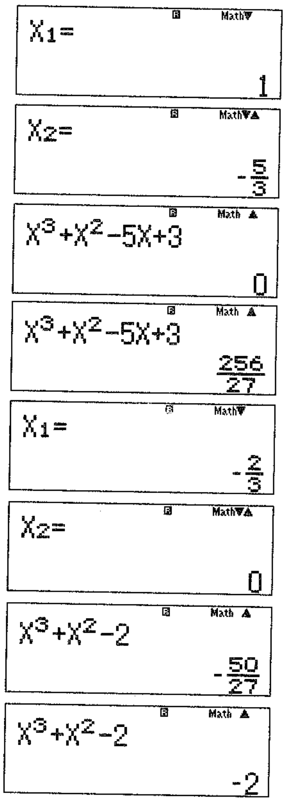
Ta thấy $f'\left(x\right)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=0.5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án C.

Đáp án C.

Ví dụ 7: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có hai điểm cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành.

A. $\left(-\infty;0\right)$. B. $\left(-\infty;-1\right)\setminus\left\{-5\right\}$. C. $\left(-\infty;0\right]$. D. $\left(-\infty;1\right)\setminus\left\{-5\right\}$.

Lời giải



- Ta có $y' = 3x^2 + 2x + m$. Để hàm số có đúng hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} \Rightarrow$ cả bốn phương án đều thỏa mãn.

- Chọn $m = -5$. Hàm số có dạng $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Tìm hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh MODE 5 3

MODE 5 3 3 = 2 = (-) 5 = = =

Từ đó suy ra $f(x_1) = f(1) = 0; f(x_2) = f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27}$.

Để hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành thì $f(x_1).f(x_2) < 0 \Rightarrow m = -5$ không thỏa mãn, từ đây ta loại được A và C.

- Chỉ còn hai phương án B và D, ta thử với $m = 0$.

Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = x^3 + x^2 - 2$. Tương tự ta sử dụng lệnh MODE 5 3 để tìm hai điểm cực trị của hàm số.

MODE 5 3 3 = 2 = 0 = = =

Từ đó suy ra $f(x_1) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{50}{27}; f(x_2) = f(0) = -2$.

Để hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f(x_1)f(x_2) < 0 \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn, từ đây ta loại C. Vậy ta chọn B.

Đáp án B.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x) = Q(x).f'(x) + Ax + B$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x_1) = Ax_1 + B \\ f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$ (Do $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$).

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = Ax + B$.

STUDY TIPS

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo y'; y''; y là

$\Rightarrow g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$

Đến đây ta quay trở về với bài toán toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y'' = 6ax + 2b$.

Xét phép chia y cho y' thì ta được:

$y = y'.\left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right) + g(x)$ $(*)$, ở đây $g(x)$ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.

Tiếp tục ta có $(*) \Leftrightarrow y = y'.\frac{3ax + b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y'.\frac{6ax + 2b}{18a} + g(x) \Leftrightarrow y = y'.\frac{y''}{18a} + g(x)$

$$\Rightarrow g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$$

Một công thức khác về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là:

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$. Sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo a, b, c, d là $\boxed{y=\left(\dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}\right)x+d-\dfrac{bc}{9a}}$

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2-3x+1$ là

A. $26x+9y-15=0$ B. $-25x+9y-15=0$

C. $26x-9y+15=0$ D. $25x-9y+15=0$

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi:

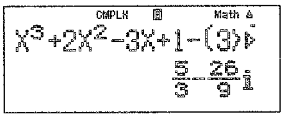
$g(x)=x^3+2x^2-3x+1-(3x^2+4x-3).\dfrac{6x+4}{18}$

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập: MODE 2 (CMPLX)

Nhập vào máy tính biểu thức $g(x)$ như sau:

$X^3+2X^2-3X+1-(3X^2+4X-3).\dfrac{6X+4}{18}$

Ấn CALC, gán X bằng i (ở máy tính i là nút ENG) khi đó máy hiện: $\dfrac{5}{3}-\dfrac{26}{9}i$.



Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $y=\dfrac{5}{3}-\dfrac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x+9y-15=0$.

Đáp án A.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH

Sử dụng tính toán với số phức để giải quyết bài toán.

Tiếp theo ta có một bài tham số:

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3(1-m)x+1+3m$, tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $m\geq 0$; $\Delta: 2mx+y-2m-2=0$ B. $m>0$; $\Delta: 2mx+y-2m-2=0$

C. $m<0$; $\Delta: y=202-200x$ D. $m\geq 0$; $\Delta: y=202-200x$

Lời giải

STUDY TIPS

Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.

Ta có $y'=3x^2-6x+3(1-m)$, $y''=6x-6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta'=3^2-9.(1-m)>0 \Leftrightarrow m>0$.

Với $m>0$ thì ta thực hiện:

Chuyển máy tính sang chế độ MODE 2 (CMPLX)

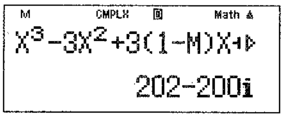
Nhập vào máy tính biểu thức $y-y'\dfrac{y''}{18a}$ ta có

$X^3-3X^2+3(1-M)X+1+3M-(3X^2-6X+3(1-M))\dfrac{6X-6}{18}$

Ấn CALC

Máy hiện X? nhập i =

Máy hiện M? nhập 100 =



Khi đó máy hiện kết quả là $202-200i$

Ta thấy $202-200i=2.100+2-2.100.i \Rightarrow y=2m+2-2mx$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx+y-2m-2=0$.

Đáp án B.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

Bước 1: Xác định $y';y''$.

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức

[MODE] [2] (CMPLX)

Nhập biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$.

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kì trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn [CALC], gán X với i, gán M với 100

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và i để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

STUDY TIPS

Với bước cuối cùng, ta cần có kĩ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay đã được giới thiệu ở phần chức năng ban đầu.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m=1$. B. $m=-2$. C. $m=2$. D. $m=-1$.

Lời giải

Ta có $y'=-3x^2+6mx; y''=-6x+6m$.

Chuyển máy tính sang chế độ [MODE] [2] (CMPLX)

Nhập vào máy tính biểu thức $y-y'\dfrac{y''}{18a}$ ta có

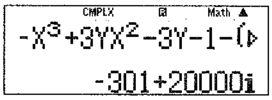
[MODE] [2] [(-)] [ALPHA] [)] [x■] [3] [▶] [+] [3] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [−] [(] [(-)] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [6] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [)] [)] [×] [▭/▭] [(-)] [6] [ALPHA] [)] [+] [6] [ALPHA] [S⇔D] [▼] [1] [8] [×] [(-)] [1]

Ấn [CALC]

Máy hiện X? nhập i =

Máy hiện Y? nhập 100 =

[CALC] [ENG] [=] [1] [0] [0] [=]



Ta có $-301+20000i=-3.100-1+2.100^2.i \Rightarrow y=-3m-1+2m^2x$

$\Rightarrow \Delta: 2m^2x-y-3m-1=0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$.

Để đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có hai điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$ thì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ và d đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

* $d \perp \Delta \Leftrightarrow 2m^2.\left(-\dfrac{1}{8}\right)=-1 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

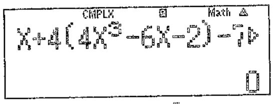
STUDY TIPS

Hệ phương trình phía dưới được tạo nên bởi

1. Áp dụng định lí Viet cho phương trình $y'=0$.
2. Hai điểm $A; B$ nằm trên đường thẳng Δ.

* d đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, suy ra nếu gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của hàm số thì

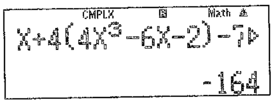
$$\Rightarrow \frac{(x_1+x_2)}{2}+8\frac{(y_1+y_2)}{2}-74=0\ (*).$$



Với $m=2$

Mặt khác ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ y_1+y_2=2m^2(x_1+x_2)-6m-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2m \\ y_1+y_2=4m^3-6m-2 \end{cases}$

Thay vào $(*)$ ta được $m+4(4m^3-6m-2)-74=0$



Với $m=-2$

Ta CALC với $m=2; m=-2$ từ đó chọn đáp án đúng.

ALPHA) + 4 (4 ALPHA) x³ 3 ► − 6 ALPHA) − 2) − 7 4
CALC 2 =

Vậy chỉ có $m=2$ thỏa mãn, chọn C.

Đáp án C.

Dạng 3: Các bài toán cực trị liên quan đến hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c, (a\neq 0)$.

Về dạng toán này ở trang 63 đến trang 70 sách Công phá Toán 3 tôi đã đưa ra chứng minh cụ thể, do vậy ở đây tôi chỉ đưa ra bảng công thức tính nhanh cho từng bài toán.

Giả sử hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right) \text{(trong đó } \Delta=b^2-4ac\text{)}$$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện.

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab<0$
1, Tam giác ABC vuông cân tại A.	$8a+b^3=0$ hay $\frac{b^3}{a}=-8$
2, Tam giác ABC đều.	$24a+b^3=0$ hay $\frac{b^3}{a}=-24$
3, Tam giác ABC có góc $BAC=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$
4, Tam giác ABC có diện tích bằng S_0.	$S_0^{\ 2}=\frac{-b^5}{32a^3}$
5, Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.	tìm $\max\left(\frac{-b^5}{32a^3}\right)$
6, Tam giác ABC trong đó $B;C\in Ox$.	$\begin{cases} c\neq 0 \\ -\frac{\Delta}{4a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$
7, Tam giác ABC trong đó $BC=kAB=kAC;(k>0)$.	$b^3k^2-8a(k^2-4)=0$
8, Tam giác ABC có ba điểm cực trị tạo thành ba góc nhọn.	$\frac{b^3+8a}{b^3-8a}>0.$ Hoặc $b(b^3+8a)>0$

9, Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là r.	$r=\dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{8a}}\right)}$
10, Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.	$R=\dfrac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$
11, Tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm a. Trọng tâm. b. Trực tâm. c. Tâm đường tròn ngoại tiếp.	a. $b^2-6ac=0$. b. $b^3+8a-4abc=0$. c. $b^3-8a-8abc=0$.
12, Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.	$b^2=4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
13, Tam giác ABC có ba điểm $A; B; C$ cách đều trục hoành.	$b^2-8ac=0$
14, Tam giác ABC cùng gốc tọa độ O tạo thành hình thoi.	$b^2-2ac=0$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ có điểm cực tiểu là

A. $(1;-2)$. B. $(-1;0)$. C. $(-1;-2)$. D. $(1;0)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=2x^3-5x^2+4x+1999$. Gọi $x_1;x_2$ lần lượt là hoành độ hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_2-x_1=\frac{2}{3}$. B. $2x_2-x_1=\frac{1}{3}$.

C. $2x_1-x_2=\frac{1}{3}$. D. $x_1-x_2=\frac{1}{3}$.

Câu 3: Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại

A. $x=-1$. B. $x=1$. C. $x=0$. D. $x=-2$.

Câu 4: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. 4. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=e^x\left(x^2-3x-5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 6: Hàm số $y=|x|^3-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 7: Số điểm cực trị của hàm số $y=3x^4-2017$ là

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 8: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$ là điểm

A. $Q(3;1)$. B. $M(1;3)$.

C. $P(7;-1)$. D. $N(-1;7)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(2x+3)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 10: Hàm số $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 11: Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 12: Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=(x+1)(x-2)^2$ là

A. 2. B. $5\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 5.

Câu 13: Tất cả các điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2x^2-1$ là

A. $(0;-1)$. B. $(\sqrt{2};-3)$ và $(-\sqrt{2};-3)$.

C. $(-\sqrt{2};-3)$. D. $(\sqrt{2};-3)$.

Câu 14: Giá trị của m để hàm số $y=-x^3-2x^2+mx+2m$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ là

A. $m<-1$. B. $m\neq-1$. C. $m=-1$. D. $m>-1$.

Câu 15: Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có ba cực trị.

A. $k=1$. C. $k=2$. C. $k=3$. D. $k=4$.

Câu 16: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

A. $2x+3y+9=0$. B. $2x+3y-6=0$.

C. $2x-3y+9=0$. D. $-2x+3y+6=0$.

Câu 17: Gọi $x_1;x_2$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^2+m$. Tìm m để ${x_1}^2+{x_2}^2-x_1x_2=7$.

A. $m=0$. B. $m=\pm\frac{9}{2}$. C. $m=\pm\frac{1}{2}$. D. $m=\pm2$.

Câu 18: Hàm số $y=x^3-3mx^2+\left(m^2-1\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi m bằng

A. $m\le1$. B. $m=1$. C. $m>1$. D. $m=2$.

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì m bằng

A. $m=\pm2$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. $m=\pm1$.

Câu 20: Hàm số $y=-x^3+(2m-1)x^2-(2-m)x-2$ có cực đại và cực tiểu khi m thỏa mãn

A. $m\in(-\infty;-1)$. B. $m\in\left(-1;\frac{5}{4}\right)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. D. $m\in(-1;+\infty)$.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d:x+8y-74=0$ khi m bằng

A. $m=1$. B. $m=-2$. C. $m=-1$. D. $m=2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=2x^3-3(2a+1)x^2+6a(a+1)x+2$. Nếu gọi $x_1;x_2$ lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì giá trị của $|x_2-x_1|$ là

A. $a+1$. B. $a-1$. C. a. D. 1.

Câu 23: Cho hàm số $y=4x^3+mx^2-3x$. Tìm m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1=-4x_2$. Chọn đáp án **đúng** nhất.

A. $m=\pm\frac{9}{2}$. B. $m=\pm\frac{3}{2}$. C. $m=0$. D. $m=\pm\frac{1}{2}$.

Câu 24: Hàm số $y=-x^4+2(2m-1)x^2+3$ có đúng một điểm cực trị khi m thỏa mãn

A. $m>\frac{1}{2}$. B. $m\geq\frac{1}{2}$. C. $m\leq\frac{1}{2}$. D. $m<\frac{1}{2}$.

Câu 25: Đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông khi

A. $m=2$. B. $m=1$. C. $m=3$. D. $m=0$.

Câu 26: Hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1 thì m bằng

A. $m=-1; m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $m=1; m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

C. $m=1; m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. D. $m=1; m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 27: Hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ có điểm cực đại và cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì điều kiện của m là

A. $m\in(1;3)$. B. $m\in(-1;4)$.

C. $m\in(3;4)$. D. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$.

Câu 28: Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có các điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt là $A(0;-3)$ và $B(-1;-5)$. Khi đó giá trị $a; b; c$ lần lượt là

A. $-3;-1;-5$. B. $2;-4;-3$.

C. $2;4;-3$. D. $-2;4;-3$.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại $A(2;3)$ thì

A. $m=\frac{3}{2}$. B. $m=-\frac{3}{2}$. C. $m=-\frac{1}{2}$. D. $m=\frac{1}{2}$.

Câu 30: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2$ là

A. $y=x-1$. B. $y=x+1$. C. $y=x$. D. $y=-x$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=2x^4-4x^2+3$. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $S=1$. B. $S=\frac{1}{2}$. C. $S=4$. D. $S=2$.

Câu 32: Tìm tập hợp S gồm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)\sqrt{4-x^2}$ có ba điểm cực trị.

A. $S=(-5;7)\setminus\{1\}$. B. $S=[-5;7]\setminus\{1\}$.

C. $S=(-1;3)\setminus\{1\}$. D. $S=[-1;3]\setminus\{1\}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=(1-m)x^4-mx^2+2m-1$. Tìm m để đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị.

A. $m<0$. B. $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>1\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}m\leq0\\m\geq1\end{array}\right.$. D. $m>1$.

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$, với m là tham số và có đồ thị (C_m). Tất cả các giá trị thực của tham số m để (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành là

A. $m<2$. B. $m\leq3$. C. $m<3$. D. $m\leq2$.

Câu 35: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho $A; B$ nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. B. 6. C. −6. D. 3.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x-2y=0$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 37: Đường cong $y=x^4+mx^2+1$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác đều. Giá trị của tham số thực m là

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. B. $m=-\sqrt[3]{24}$.

C. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $m=-\sqrt[3]{3}$.

Câu 38: Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để đồ thị hàm số $y=3x^4-mx^2-2$ đạt cực tiểu tại hai điểm $B; C$ và đạt cực đại tại $A(0;-2)$ sao cho $|x_C-x_B|<\sqrt{6m(m-1)}$.

A. $m=1$. B. $m=2$. C. $m=3$. D. $m=4$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường cong $y=2x^4-m^2x^2+m^2-1$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ sao cho $A; B; C; O$ lập thành bốn đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

A. $m\in\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$. B. $m=\sqrt{2}$.

C. $m=-\sqrt{2}$. D. $m\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

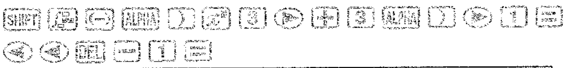
Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị phân biệt $A; B; C$ sao cho $OA+OB+OC=3$.

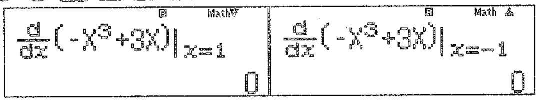
A. $m=0$. B. $m=1$.

C. $m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $m\in\left\{0;1;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án C.



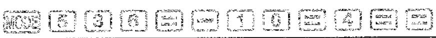


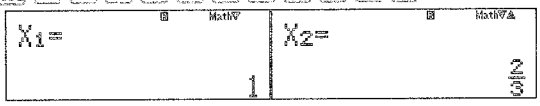
Ta thấy $x=-1;\ x=1$ là các điểm cực trị của hàm số.
Hệ số $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N ngược $\Rightarrow x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Rightarrow (-1;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Câu 2: Đáp án C.

Ta có $y'=6x^2-10x+4$.

Giải phương trình $y'=0$ ta có





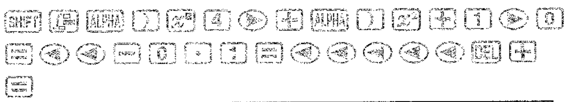
Do hệ số $a=2>0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức $x=\frac{2}{3}$ là điểm cực đại của hàm số và $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Rightarrow 2x_1-x_2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

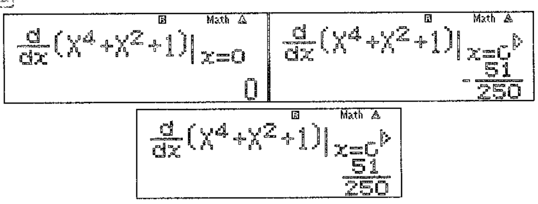
Chọn C.

Câu 3: Đáp án C.

Ngoài cách thử lần lượt từng đáp án để lấy kết quả. Nếu ta áp dụng một chút tư duy thì phép thử sẽ diễn ra nhanh hơn. Đồ thị hàm bậc 4 đối xứng nhau qua trục tung. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì sẽ đạt cực tiểu tại $x=1$. $\Rightarrow$ Đáp án A và B loại vì ta chỉ được chọn 1 đáp án.

Thử với $x=0$



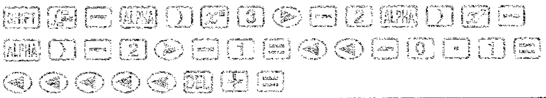


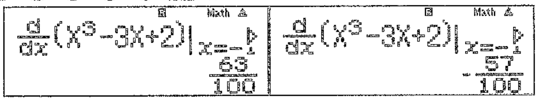
Ta thấy $f'(0)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=0$ là cực tiểu. Chọn C.

Câu 4: Đáp án A.

$y'=3x^2-3; y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị $x=-1$ bằng cách tính $f'(-1-0.1)$ và $f'(-1+0.1)$



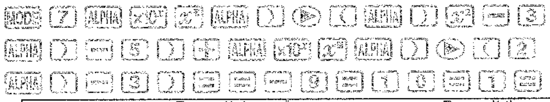


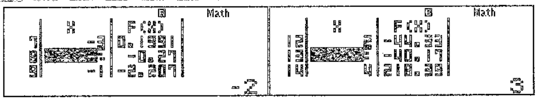
Vậy $x=-1$ là điểm cực đại của hàm số đã cho $\Rightarrow f(-1)=4$ là giá trị cực đại của hàm số. Ta chọn A.

Câu 5: Đáp án A.

Ta có $y'=e^x(x^2-3x-5)+e^x(2x-3)$.

Sử dụng TABLE để khảo sát sự đổi dấu của y'.





Ta thấy y' đổi dấu hai lần $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. Ta chọn A.

Câu 6: Đáp án C.

Nếu $x>0$ thì $\left(|x|^3\right)'=\left(x^3\right)'=3x^2$.

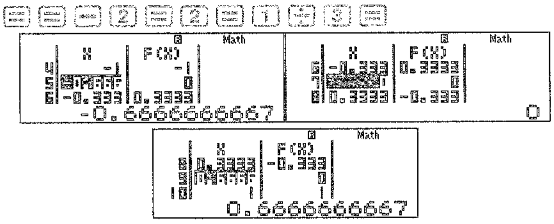
Nếu $x<0$ thì $\left(|x|^3\right)'=\left(-x^3\right)'=-3x^2$.

Suy ra ta có $y'=3x|x|-2x$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Dùng TABLE với thiết lập sao cho x chạy qua ba giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'.



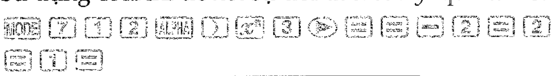


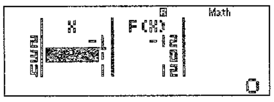
Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu ba lần $\Rightarrow$ ta chọn C.

Câu 7: Đáp án A.

Ta có $y'=12x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

Sử dụng TABLE để xét sự đổi dấu của y' qua $x=0$.



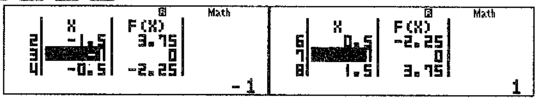


Thỏa mãn, vậy ta chọn A.

Câu 8: Đáp án B.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

MODE 7 3 ALPHA) x^2 − 3 = = (−) 2 = 2 = 0 . 5 =



Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương qua $x=1 \Rightarrow$ $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

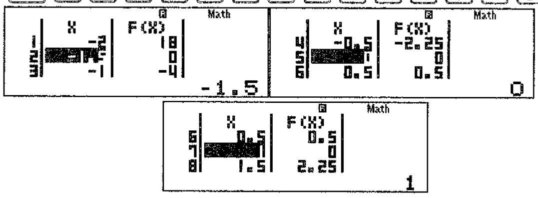
$\Rightarrow M(1;3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 9: Đáp án C.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Sử dụng TABLE để xét sự đổi dấu của y' qua ba điểm.

MODE 7 ALPHA) × (ALPHA) − 1) x^2 × (2 ALPHA) + 3) = = − 2 = 2 = 0 . 5 =



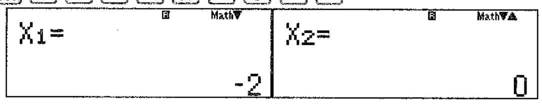
Ta thấy y' chỉ đổi dấu khi qua $x=-\frac{3}{2}$ và $x=0$, còn qua $x=1$ thì y' không đổi dấu, do vậy hàm số chỉ có hai điểm cực trị là $x=-\frac{3}{2}$ và $x=0$. Ta chọn C.

Câu 10: Đáp án B.

Ta có $y'=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

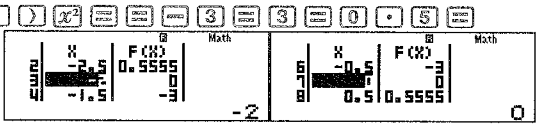
Giải phương trình $y'=0$

MODE 5 3 1 = 2 = 0 = =



Sử dụng TABLE để xét sự đổi dấu của y' qua hai điểm.

MODE 7 ▭ ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) ▽ (ALPHA) + 1) x^2 = = − 3 = 3 = 0 . 5 =



Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 11: Đáp án A.

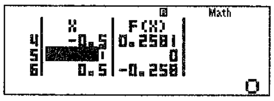
Điều kiện $-2\le x\le 2$.

Ta có $y'=\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0$; y' không xác định tại $x=\pm 2$.

Sử dụng TABLE để xét sự đổi dấu của y' qua ba điểm.

MODE 7 ▭ − ALPHA) ▽ √ 4 − ALPHA) x^2 = = − 2 = 2 = 0 . 5 =

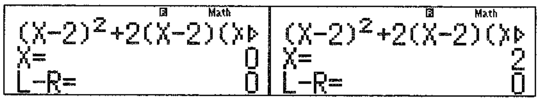


Ta thấy chỉ có $x=0$ thỏa mãn y' đổi dấu qua, tuy nhiên y' lại đổi dấu từ dương sang âm qua $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực đại của hàm số, chứ không phải điểm cực tiểu, do vậy ta chọn A.

Câu 12: Đáp án C.

Ta có $y'=(x-2)^2+2(x-2)(x+1)$

Giải phương trình $y'=0$ bằng SHIFT SOLVE



$\Rightarrow (0;4);(2;0)$ lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho $\Rightarrow$ khoảng cách

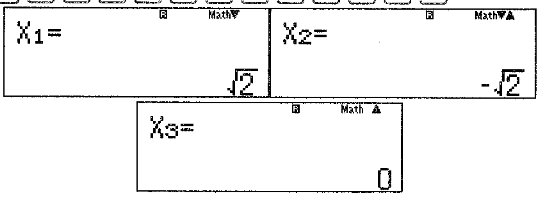
$l=\sqrt{(0-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$. Ta chọn C.

Câu 13: Đáp án A.

Ta có $y'=2x^3-4x$

Giải phương trình $y'=0$

MODE 5 4 2 = 0 = − 4 = 0 = =

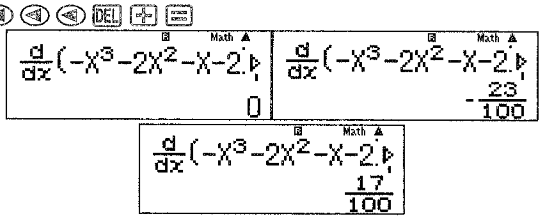


Do hệ số $a>0$ nên đồ thị hàm số có dạng W, vậy đồ thị hàm số có một điểm cực đại $(0;-1)$. Chọn A.

Câu 14: Đáp án C.

Khi thử phương án, ta ưu tiên thử giá trị xác định trước. Với C khi $m=-1 \Rightarrow y=-x^3-2x^2-x-2$.

SHIFT ∫ − ALPHA) x^3 3 ▶ − 2 ALPHA) x^2 − ALPHA) − 2 ▶ − 1 = ◀ ◀ − 0 . 1 = ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL + =



Ta thấy $f'(-1)=0$; $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow x=-1$ là điểm cực tiểu $\Rightarrow$ chọn C.

Câu 15: Đáp án A.

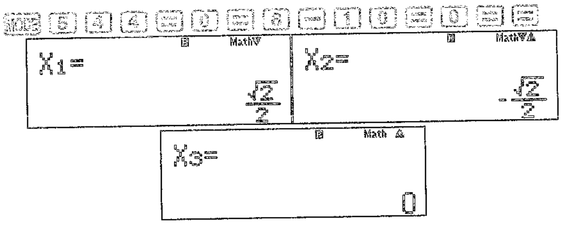
Tính đạo hàm $y'=4kx^3+2(4k-5)x$

Để hàm số đã cho có ba điểm cực trị thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta chỉ cần giải phương trình bậc ba

$4kx^3+2(4k-5)x=0$

Với A: $k=1$.

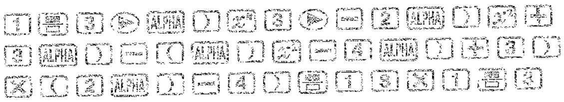


Vậy $k=1$ thỏa mãn, ta chọn A.

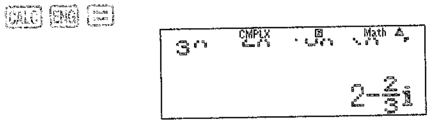
Câu 16: Đáp án C.

$y'=x^2-4x+3; y''=2x-4.$

Chuyển máy tính sang môi trường số phức và nhập vào màn hình biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$ ta có



CALC $X=i$



$2-\dfrac{2}{3}i=2-\dfrac{2}{3}x\Rightarrow y=2-\dfrac{2}{3}x\Leftrightarrow 2x+3y-6=0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x.$

Câu 17: Đáp án D.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$.

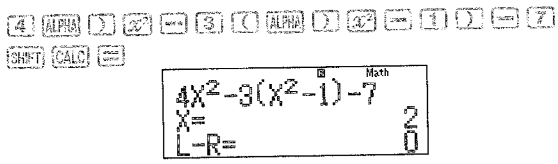
Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow(-3m)^2-9.(m^2-1)>0\Leftrightarrow 9>0$ thỏa mãn.

Áp dụng định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-x_1x_2=7$

$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7\ \Leftrightarrow 4m^2-3(m^2-1)=7.$

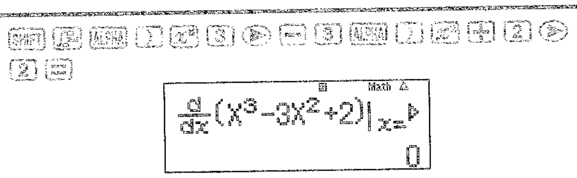


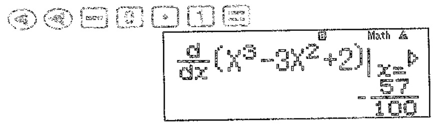
Chọn D.

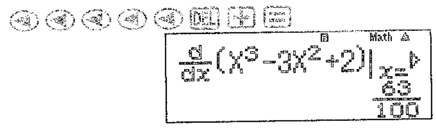
Câu 18: Đáp án B.

Ta ưu tiên thử giá trị xác định trước.

Với $m=1$ ta có

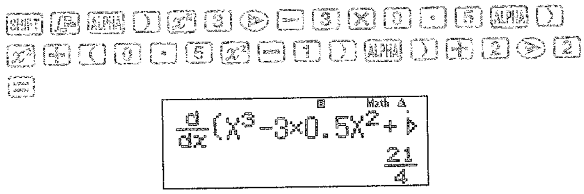






Ta thấy $m=1$ thỏa mãn, do vậy ta loại C và D.

Ta thử với $m=0,5$



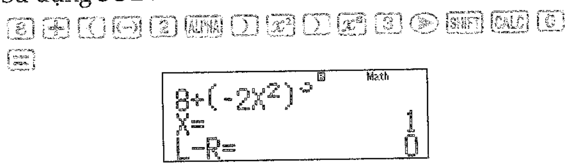
Không thỏa mãn, vậy ta loại A, chọn B.

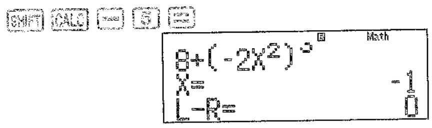
Câu 19: Đáp án D.

Áp dụng công thức đã đưa ra ở phần lý thuyết ta có

$8a+b^3=0\Leftrightarrow 8+(-2m^2)^3=0$

Sử dụng SOLVE ta có





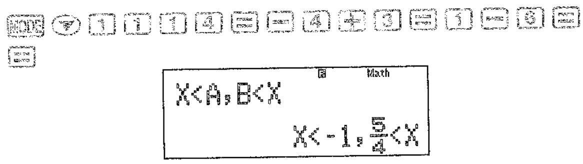
Vậy ta chọn D. $m=\pm1$.

Câu 20: Đáp án C.

Ta có $y'=-3x^2+2(2m-1)x-(2-m)$.

Hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu khi

$\Delta'>0\Leftrightarrow(2m-1)^2-3(2-m)>0$



Vậy $m\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$. Ta chọn C.

Câu 21: Đáp án D.

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$.

Chuyển máy tính sang môi trường số phức.

Nhập vào màn hình biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$ và CALC cho $X=i; Y=100.$

MODE 2 (−) ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ► + 3 ALPHA S⇔D ALPHA) x^2 − 3 ALPHA S⇔D − 1 − (− 3 ALPHA) x^2 + 6 ALPHA S⇔D ALPHA)) × ▭ (−) 6 ALPHA) + 6 ALPHA S⇔D ▼ (−) 1 8 CALC ENG = 1 0 0 =

```
-X³+3YX²-3Y-1-(▶
        -301+20000i
```

$-301+20000i=2m^2x-3m-1$

⇒ phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $y=2m^2x-3m-1$.

Để đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có hai điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$ thì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ và d đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

* $d\perp\Delta \Leftrightarrow 2m^2.\left(-\dfrac{1}{8}\right)=-1 \Leftrightarrow m=\pm 2.$

* d đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, suy ra nếu gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của hàm số thì

$\Rightarrow \dfrac{(x_1+x_2)}{2}+8\dfrac{(y_1+y_2)}{2}-74=0\ (*).$

Mặt khác ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ y_1+y_2=2m^2(x_1+x_2)-6m-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2m \\ y_1+y_2=4m^3-6m-2 \end{cases}$

Thay vào $(*)$ ta được $m+4(4m^3-6m-2)-74=0$

Ta CALC với $m=2; m=-2$ từ đó chọn đáp án đúng.

ALPHA) + 4 (4 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ► − 6 ALPHA) − 2) − 7 4 CALC 2 =

```
X+4(4X³-6X-2)-7▶        X+4(4X³-6X-2)-7▶
               0                    -164
```

Với $m=2$ — Với $m=-2$

Vậy chỉ có $m=2$ thỏa mãn, chọn D.

Câu 22: Đáp án D.

Ta có $y'=6x^2-6(2a+1)x+6a(a+1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=(2a+1)^2-4a(a+1)=1>0$

Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị $x=x_1; x=x_2$ với $x_1;x_2$ lần lượt là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta có $|x_2-x_1|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a+1)^2-4a(a+1)$

$\Rightarrow |x_2-x_1|=\sqrt{(2a+1)^2-4a(a+1)}.$

Nhập vào màn hình $\sqrt{(2X+1)^2-4X(X+1)}$ CALC cho $X=100.$

√▭ (2 ALPHA) + 1) x^2 − 4 ALPHA) (ALPHA) + 1) CALC 1 0 0 =

```
√(2X+1)²-4X(X+1▶
                1
```

$\Rightarrow |x_2-x_1|=1.$ Vậy ta chọn D.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có $y'=12x^2+2mx-3.$

Ta thử các phương án.

Với A

* $m=\dfrac{9}{2}$

MODE 5 3 1 2 = 2 × 9 ▭ 2 = = − 3 = = ▼

```
X1=             X2=
   1/4              -1
```

$\Rightarrow m=\dfrac{9}{2}$ thỏa mãn.

* $m=-\dfrac{9}{2}$

AC ► − 9 = =

```
X1=             X2=
     1             -1/4
```

Vậy $m=-\dfrac{9}{2}$ thỏa mãn. Từ đây ta chọn luôn A.

Câu 24: Đáp án C.

Ta có $y'=-4x^3+4(2m-1)x=-4x(x^2-2m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2m+1=0(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có đúng một điểm cực trị thì phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có đúng một nghiệm $x=0$

$\Leftrightarrow -2m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{1}{2}.$

Câu 25: Đáp án D.

Để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông thì $8a+b^3=0 \Leftrightarrow 8-8(m+1)^3=0$

8 − 8 (ALPHA) + 1) $x^{\blacksquare}$ 3 SHIFT CALC 1 =

```
8-8(X+1)³
X=          0
L-R=        0
```

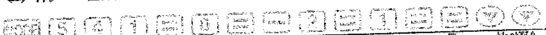
Vậy $m=0$ thỏa mãn, ta chọn D.

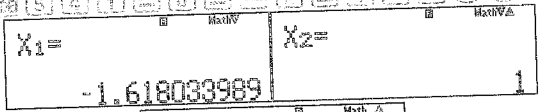
Câu 26: Đáp án B.

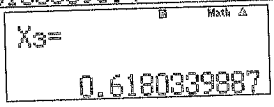
Áp dụng công thức số 10 trong bảng đưa ra ở phần lí thuyết ta có

$$R=\frac{b^3-8a}{8|a|b}\Leftrightarrow 1=\frac{(-2m)^3-8}{8.(-2m)}\Leftrightarrow 1=\frac{m^3+1}{2m}$$

$\Leftrightarrow m^3-2m+1=0$







Vậy ta chọn B.

Câu 27: Đáp án D.

Ta có

$y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)=6\left[x^2+(m-1)x+(m-2)\right]$.

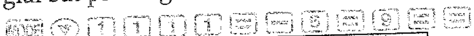
Đặt $f(x)=x^2+(m-1)x+(m-2)$.

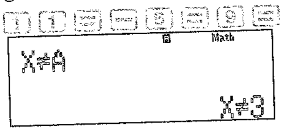
Để hàm số đã cho có điểm cực đại và cực tiểu $x_1;x_2$ nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $-2<x_1<x_2<3$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\1.f(-2)>0\\1.f(3)>0\\-2<\frac{x_1+x_2}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-4(m-2)>0\\(-2)^2+(m-1).(-2)+(m-2)>0\\3^2+(m-1).3+(m-2)>0\\-2<\frac{-m+1}{2}<3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+9>0\\4-m>0\\4+4m>0\\-4<-m+1<6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<3\\m>3\end{array}\right.\\m<4\\m>-1\\-5<m<5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m<3\\3<m<4\end{array}\right.$$

(Giải hệ bất phương trình ta sử dụng MODE ▼ 1 để giải bất phương trình đầu của hệ).





Vậy ta chọn D.

Câu 28: Đáp án B.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu là $B(-1;-5)$.

Từ các dữ kiện trên ta thiết lập được hệ phương trình

$$\begin{cases}c=-3\\a+b+c=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3\\a+b=-2\end{cases}$$

Ta thấy chỉ có các giá trị ở B thỏa mãn hệ phương trình, do vậy ta chọn B.

Câu 29: Đáp án D.

Ta có $y'=3x^2-3m$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3m=0\Leftrightarrow x^2-m=0$

Với $m>0$ thì hàm số có hai điểm cực trị.

$$x^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{m}\Rightarrow y=m\sqrt{m}-3m\sqrt{m}+1\\x=-\sqrt{m}\Rightarrow y=-m\sqrt{m}+3m\sqrt{m}+1\end{array}\right.$$

$\Rightarrow B\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+1\right),C\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right)$.

Tam giác ABC cân tại $A\Rightarrow AB=AC$

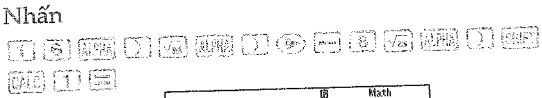
$\Leftrightarrow AB^2=AC^2$

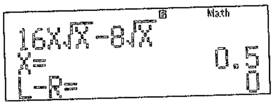
$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{m}\right)^2+\left(2+2m\sqrt{m}\right)^2=\left(2+\sqrt{m}\right)^2+\left(2-2m\sqrt{m}\right)^2$

$\Leftrightarrow -4\sqrt{m}+8m\sqrt{m}-4\sqrt{m}+8m\sqrt{m}=0$

$\Leftrightarrow 16m\sqrt{m}-8\sqrt{m}=0$

Nhấn

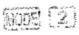




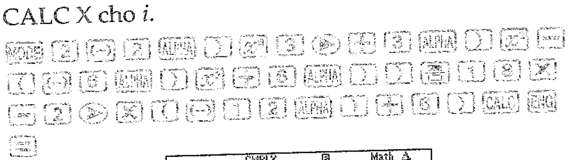
Ta chọn D.

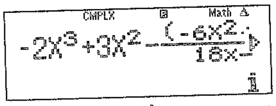
Câu 30: Đáp án C.

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức



Nhập vào màn hình biểu thức $y-y'.\frac{y''}{18a}$ sau đó CALC X cho i.



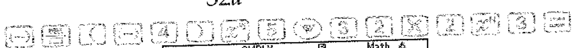


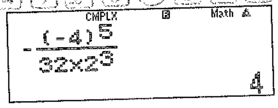
Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2$ là $y=x$.

Ta chọn C.

Câu 31: Đáp án C.

Áp dụng công thức số 4 trong bảng đưa ra ở phần lí thuyết ta có $S^2=-\frac{b^5}{32a^3}$





Vậy ta chọn C.

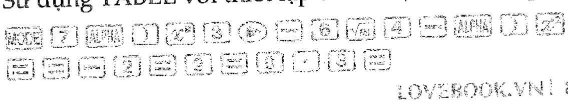
Câu 32: Đáp án A.

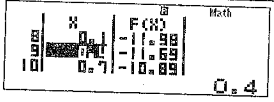
Nhìn vào các phương án ta thấy các phương án "na ná" nhau, do vậy ta sẽ sử dụng phương án thử.

Điều kiện $-2\le x\le 2$.

* Với $m=-5$ ta có $y=x^3-6\sqrt{4-x^2}$

Sử dụng TABLE với thiết lập Start –2; End 2; Step 0,3.

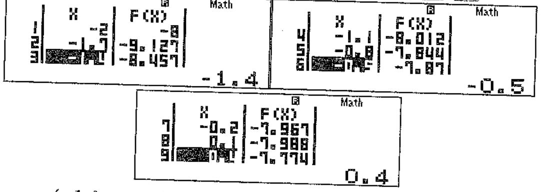




Nhìn vào bảng giá trị ta thấy đồ hàm số chỉ đổi chiều 1 lần, do vậy hàm số không thỏa mãn có ba điểm cực trị, ta loại B.

* Với $m=-4$ ta sử dụng TABLE với thiết lập Start -2; End 2; Step 0,3.





Quan sát bảng giá trị ta thấy đồ thị hàm số đổi chiều ba lần, thỏa mãn hàm số có ba điểm cực trị, do vậy ta có thể loại được C và D. Ta chọn A.

Câu 33: Đáp án C.

Ta có thể chọn luôn C bởi với $m=1$ thì hàm số trở thành hàm số bậc hai, đồ thị hàm số luôn là một parabol có đúng một điểm cực trị. Từ đây ta loại được A; B; D.

Câu 34: Đáp án C.

Nếu đặt hai điểm cực trị của (C_m) lần lượt là $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$

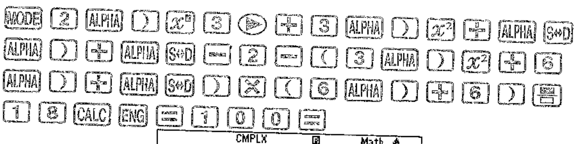
Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y_1y_2<0$ $(*)$

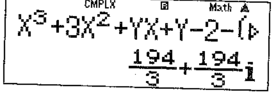
Ta có $y'=3x^2+6x+m$.

Lúc này $x_1;x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=3^2-3m>0 \Leftrightarrow m<3$. (Từ đây ta có thể loại B).

Do nếu biểu diễn $y_1;y_2$ theo $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ thì bất phương trình $(*)$ sẽ có bậc 6, quá lớn, do vậy ta sẽ sử dụng cách viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) bằng máy tính cầm tay, từ đó thế vào bất phương trình.

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức, nhập $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$ CALC cho $X=i; Y=100$ (Y ở đây là m).





Ta có $\dfrac{194}{3}+\dfrac{194}{3}i=\dfrac{2.100-6}{3}+\dfrac{2.100-6}{3}i$

$$\Rightarrow y=\frac{2m-6}{3}+\frac{2m-6}{3}x \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}(m-3)(1+x)$$

Vậy với $m<3$ ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m-3)^2(1+x_1)(1+x_2)<0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)<0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2\left(\frac{m}{3}-2+1\right)<0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2\left(\frac{m}{3}-1\right)<0 \Leftrightarrow m<3$$

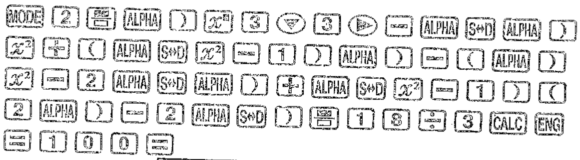
Vậy ta chọn C.

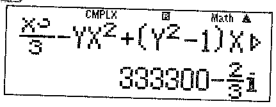
Câu 35: Đáp án A.

$y'=x^2-2mx+(m^2-1)$; $y''=2x-2m$.

Tương tự như câu 34, để tránh việc tính toán với m bậc quá cao, ta sẽ tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức và nhập vào màn hình $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$ CALC cho $X=i; Y=100$.





$$333300-\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}(100^3-100)-\frac{2}{3}i$$

$$\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}m(m^2-1)$$

Lúc này

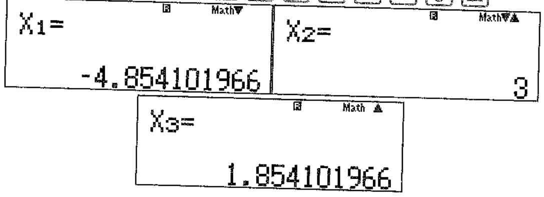
$$A\left(x_1;-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}m(m^2-1)\right), B\left(x_2;-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}m(m^2-1)\right)$$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trung điểm $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};-\dfrac{x_1+x_2}{3}+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)\right)$ của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $y=5x-9$.

$$-\frac{2m}{3}+\frac{1}{3}m(m^2-1)=5.\frac{2m}{2}-9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3-6m+9=0$$





Ta thấy tổng ba nghiệm của phương trình bằng 0. Ta chọn A.

Câu 36: Đáp án B.

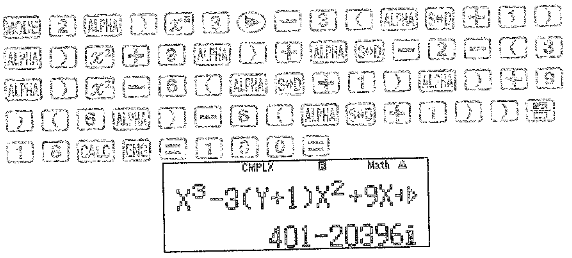
Tương tự ta có

$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9; y'' = 6x - 6(m+1)$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C).

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức và nhập vào màn hình $y - y'.\dfrac{y''}{18a}$ CALC cho

$X = i; Y = 100$.

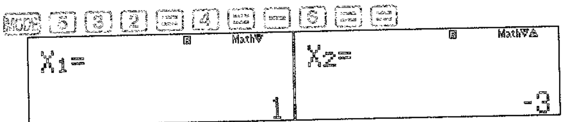


$\Rightarrow (AB): y = -(2m^2 + 4m - 4)x + 4m + 1$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì

$AB \perp d \Leftrightarrow 1.(2m^2 + 4m - 4) + (-2).1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$



Đến đây ta chưa kết luận được m do chưa xét điều kiện trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên d.

- Hàm số có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m^2 + 2m - 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Theo hệ thức Viet ta tìm được $x_A + x_B = 2(m+1)$.

$\Rightarrow I\left(m+1; -(2m^2 + 4m - 4)(m+1) + 4m + 1\right)$

Thay vào d ta thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn. Do vậy ta chọn B.

Câu 37: Đáp án B.

Áp dụng công thức thần lý thuyết ta có

$24a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 24.1 + m^3 = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt[3]{24}$.

Câu 38: Đáp án B.

Trong phần lý thuyết ta đã đưa ra dạng 3 về bài toán cực trị liên quan đến hàm bậc bốn trùng phương.

Trong phần đó tôi có đưa ra công thức

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị

$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ *(trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$)*

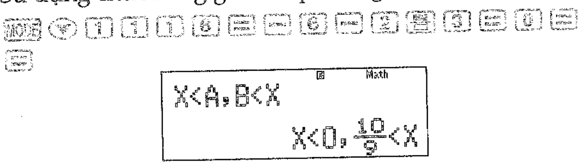
Từ đây kết hợp với dữ kiện đề bài ta suy ra $c = -2$.

$|x_C - x_B| = 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} = 2\sqrt{\dfrac{m}{6}}$

Lúc này ta có $|x_C - x_B| < \sqrt{6m(m-1)}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{m}{6}} < \sqrt{6m(m-1)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \geq 1 \\ \dfrac{2}{3}m < 6m^2 - 6m \end{array}\right. (*)$

Sử dụng chức năng giải bất phương trình



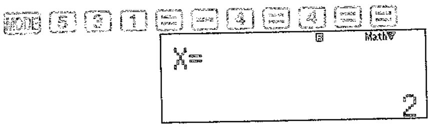
$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{10}{9} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \dfrac{10}{9}$.

Mặt khác ta tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m thỏa mãn điều kiện, do vậy ta chọn B.

Câu 39: Đáp án A.

Áp dụng công thức ta có

$b^2 - 2ac = 0 \Leftrightarrow m^4 - 4(m^2 - 1) = 0$



$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. Ta chọn A.

Câu 40: Đáp án D.

Trong phần lý thuyết ta đã đưa ra dạng 3 về bài toán cực trị liên quan đến hàm bậc bốn trùng phương.

Trong phần đó tôi có đưa ra công thức

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị

$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ *(trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$)*

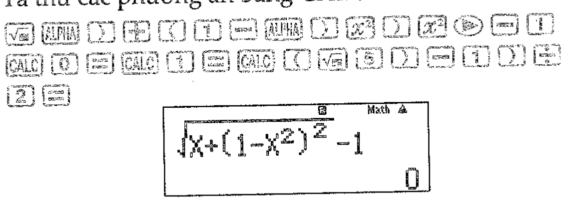
Từ đây ta có $A(0;1), B(-\sqrt{m}; 1 - m^2), C(\sqrt{m}; 1 - m^2)$

$OA + OB + OC = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 1^2} + 2\sqrt{(-\sqrt{m})^2 + (1 - m^2)^2} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{m + (1 - m^2)^2} = 1$

Ta thử các phương án bằng CALC



Ta thấy tất cả các phương án A; B; C đều thỏa mãn, do vậy ta chọn D.

III. ĐẠO HÀM

A. Kiến thức nền tảng

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

> **STUDY TIPS**
> Nếu $\Delta x = x - x_0$
> $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
> thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
> + Δx gọi là số gia của đối số tại điểm x_0.
> + Δy gọi là số gia của hàm số tương ứng.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

Vậy $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

a) Đạo hàm bên trái

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x < x_0$.

b) Đạo hàm bên phải

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và $x > x_0$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó: $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

> **STUDY TIPS**
> - Hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
> - Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

a) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

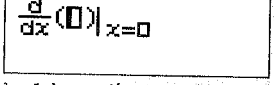
b) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

B. Phương pháp sử dụng máy tính giải bài toán liên quan đến đạo hàm của hàm số

Ta sẽ sử dụng lệnh tính đạo hàm tại một điểm của máy tính SHIFT ∫□



Từ đó tính các đạo hàm của hàm số.

1. Tính đạo hàm cấp 1: Ta thường sử dụng bảng đạo hàm với các hàm số đơn giản, với các hàm số phức tạp hơn ta có thể kết hợp với máy tính SHIFT ∫□ sau đó CALC $X = 100$ từ đó phân tích đa thức, tuy nhiên cách này cũng hạn chế với các số lẻ.

2. Công thức tính đạo hàm cấp 2: $y''(x_0)=\dfrac{y'(x_0+0,000001)-y'(x_0)}{0,000001}$.

3. Dự đoán công thức đạo hàm cấp n

Bước 1: Tính đạo hàm cấp 1, đạo hàm cấp 2, đạo hàm cấp 3.

Bước 2: Tìm quy luật về dấu, về hệ số, về số biến, về số mũ rồi rút ra công thức tổng quát.

C. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2\sqrt{x^3}.\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$. B. $\dfrac{4\sqrt{x}+2x^2-3}{x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$.

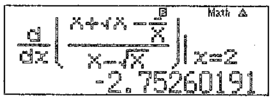
C. $\dfrac{\sqrt{x}-2x^2-2}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$. D. $\dfrac{\sqrt{x}+2x^2+1}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$.

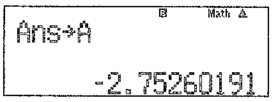
Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bài toán này ta sẽ sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính sau đó so sánh với các phương án.

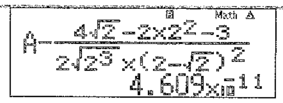
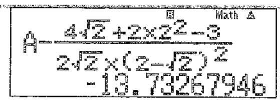
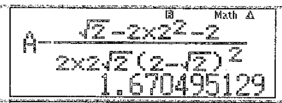
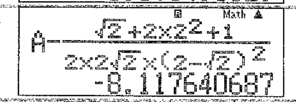
- Nhập vào máy tính





SHIFT ∫ ▭ ALPHA) + √ ALPHA) ▶ − 1 ▭ ALPHA) ▼ ALPHA) − √ ALPHA) ▶ ▶ ▶ 2 =

Gán giá trị vừa tính được vào A SHIFT RCL (−)

Với A: ALPHA (−) − ▭ 4 √ 2 ▶ − 2 × 2 x² − 3 ▼ 2 √ 2 x■ 3 ▶ ▶ × (2 − √ 2) x² =	
Với B: Giữ nguyên màn hình ấn ◀ để sửa biểu thức đạo hàm theo B.	
Với C	
Với D	

Ta thấy phương án A có độ lệch nhỏ nhất ≈ 0. Do vậy ta chọn A.

2. Giải toán thông thường.

Ta có $y'=\dfrac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$

$=\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

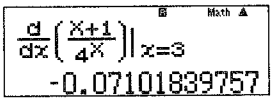
Ta thấy khi sử dụng máy tính có thể cho ra sai số. Tuy nhiên sai số rất nhỏ nên ta có thể lựa chọn được đáp án chính xác.

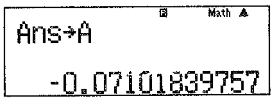
Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.　　B. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.　　D. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải





Tương tự như ví dụ 1 ta sẽ sử dụng lệnh tính đạo hàm tại một điểm.

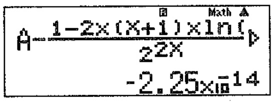
Chọn $x=3$ ta có [SHIFT] [∫] [▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [4] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [▶] [3] [=]

Tiếp tục gán $y'(3)\to A$. [SHIFT] [RCL] [(−)]

Gán $3\to X$ ta thử từng phương án.

Với A:

[ALPHA] [(−)] [−] [▭/▭] [1] [−] [2] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [×] [ln] [2] [)] [▽] [2] [$x^{■}$] [2] [ALPHA] [)] [CALC] [=] [3] [=]



Ta thấy sai số rất ít (tương tự như ví dụ 1), do vậy ta chọn A luôn.

Đáp án A.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\ln|\cos 3x|$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ bằng

A. –3.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

Lời giải

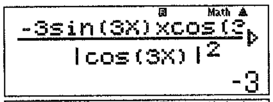
Cách 1: Đạo hàm trực tiếp rồi CALC.

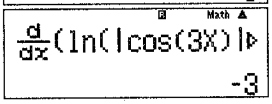
Ta có $(\ln|\cos 3x|)'=\dfrac{1}{|\cos 3x|}.(|\cos 3x|)'$

$(|\cos 3x|)'=\left(\sqrt{\cos^2 3x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\cos^2 3x}}(\cos^2 3x)'=\dfrac{-3\cos 3x\sin 3x}{|\cos 3x|}$

$\Rightarrow(\ln|\cos 3x|)'=\dfrac{-3\sin 3x\cos 3x}{|\cos 3x|^2}$

Ta đi tìm $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.





[SHIFT] [MODE] [4] [▭/▭] [−] [3] [sin] [3] [ALPHA] [)] [)] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [▽] [SHIFT] [hyp] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [▶] [x^2] [CALC] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [1] [2] [=]

Cách 2: Sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính.

[SHIFT] [∫] [ln] [SHIFT] [hyp] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [▶] [)] [▶] [SHIFT] [$\times10^x$] [÷] [1] [2] [=]

Máy hiện –3. Vậy ta chọn A.

Đáp án A.

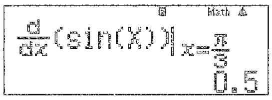
Ví dụ 4: Tính vi phân của hàm số $y=\sin x$ tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

A. $dy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}dx$.　　B. $dy=\dfrac{1}{2}dx$.　　C. $dy=\cos x dx$.　　D. $dy=-\cos x dx$.

Lời giải

Từ $y=\sin x$ ta tiến hành vi phân hai vế $(y')dy=(\sin x)dx \Leftrightarrow dy=(\sin x)'dx$

Tính $(\sin x)'$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.





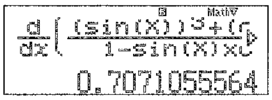
Vậy ta chọn B.

Đáp án B.

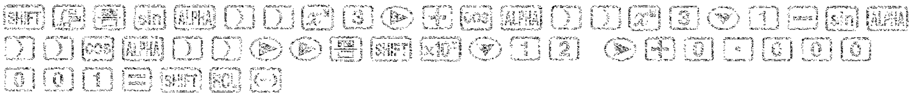
> **Ví dụ 5:** Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Khi đó ta có
>
> A. $y''=y$. B. $y''=-y$. C. $y''=2y$. D. $y''=-2y$.

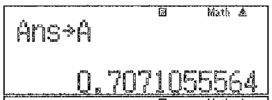
Lời giải

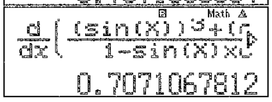
Vì ở cả bốn phương án đều xuất hiện y'' nên ta sẽ thực hiện tính y'' theo công thức $y''(x_0)=\dfrac{y'(x_0+0,000001)-y'(x_0)}{0,000001}$.



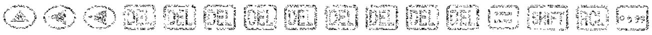
Chọn $x=\dfrac{\pi}{12}$. Tính $y'\left(\dfrac{\pi}{12}+0,000001\right)$ rồi gán vào A.

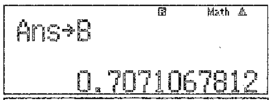




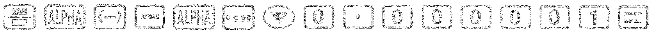


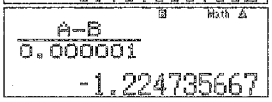
Tiếp theo ta tính $y'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ rồi gán vào B.





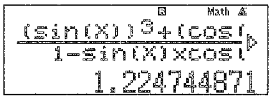
Tính $y''\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{A-B}{0,000001}$.





Tính $y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$





Từ hai kết quả vừa nhận được ta thấy $y''\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Đáp án B.

> **Ví dụ 6:** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$ bằng
>
> A. $y=\dfrac{2\left(7x^3+15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$ B. $y=\dfrac{2\left(7x^3-15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.
>
> C. $y=\dfrac{2\left(7x^3+15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$. D. $y=\dfrac{2\left(7x^3-15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

Lời giải

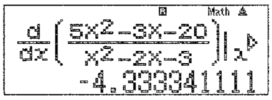
Tương tự như câu trên ta sẽ sử dụng công thức tính

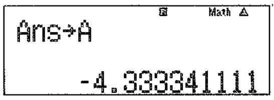
$$y''(x_0)=\frac{y'(x_0+0,000001)-y'(x_0)}{0,000001}.$$

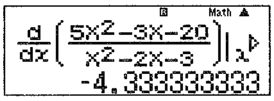
1. Tìm $y'(2+0,000001)$.

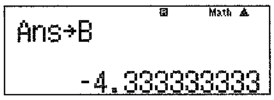
Ta nhập

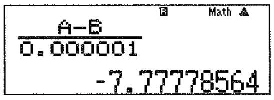












Gán cho A. [SHIFT] [RCL] [(-)]

2. Tìm $y'(2)$.

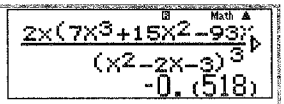
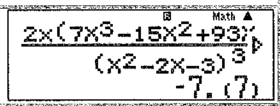
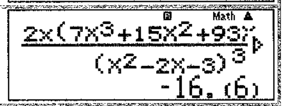
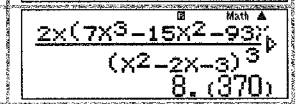
[◄] [◄] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [=]

Gán cho B. [SHIFT] [RCL] [°'"]

3. Tính $y''(2)$.

[▭/▭] [ALPHA] [(-)] [−] [ALPHA] [°'"] [▼] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]

4. Thử CALC các phương án cho $X = 2$.

[ON] [▭/▭] [2] [×] [(] [7] [ALPHA] [)] [x³] [3] [►] [+] [1] [5] [ALPHA] [)] [x²] [−] [9] [3] [ALPHA] [)] [+] [7] [7] [)] [▼] [(] [ALPHA] [)] [x²] [−] [2] [ALPHA] [)] [−] [3] [)] [x³] [3] [CALC] [2] [=] [S⇔D]	
Ta chỉnh lại dấu để phù hợp với phương án B và ấn [=]	
Tương tự trên.	
Tương tự trên.	

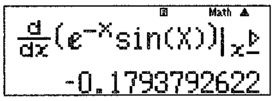
Quan sát ta thấy chỉ có phương án B là đưa ra kết quả giống với ta đã tính ở trên, do vậy ta chọn B.

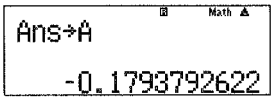
Đáp án B.

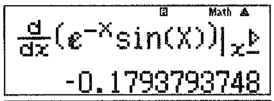
Ví dụ 7: Cho hàm số $y = e^{-x}\sin x$, đặt $F = y'' + 2y'$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

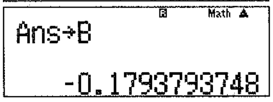
A. $F = -2y$. B. $F = y$. C. $F = -y$. D. $F = 2y$.

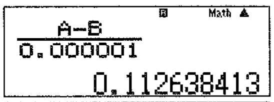
Lời giải

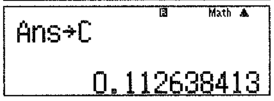


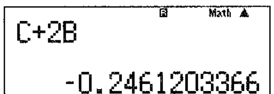


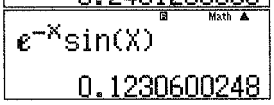












Áp dụng công thức $f''(x_0) = \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$.

Chọn $x = 2; \Delta x = 0,000001$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y = e^{-x}\sin x$.

1. Tính $y'(2 + 0,000001)$ và gán vào A.

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [×10ˣ] [xⁿ] [−] [ALPHA] [)] [►] [sin] [ALPHA] [)] [)] [►] [2] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [(-)]

2. Tính $y'(2)$ và gán vào B.

[▲] [◄] [◄] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]

3. Tính $y''(2)$ và gán vào C.

$$y''(2) = \frac{A - B}{0,000001}$$

[▭/▭] [ALPHA] [(-)] [−] [ALPHA] [°'"] [▼] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [hyp]

4. Tính $F = C + 2B$

[ALPHA] [hyp] [+] [2] [ALPHA] [°'"] [=]

5. Tính $y(2)$.

[ALPHA] [×10ˣ] [xⁿ] [−] [ALPHA] [)] [►] [sin] [ALPHA] [)] [)] [CALC] [2] [=]

Nhìn vào kết quả ta có thể đưa ra kết luận $y''(2) = -2y(2) \Rightarrow$ ta chọn A.

Đáp án A.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $y'+2y\ln 2=0.$ B. $y'+3y\ln 2=0.$

C. $y'-8y\ln 2=0.$ D. $y'+8y\ln 2=0.$

Lời giải

1. Tính đạo hàm tại $x=2$ vào lưu giá trị này vào A.

SHIFT d/dx 2 0 1 6 ALPHA ×10^x x^■ ALPHA) × ln ■/■ 1 ▽ 8 ▶) ▶ ▶ 1 DEL 2 = SHIFT RCL (−)

$\frac{d}{dx}\left(2016e^{x\times\ln\left(\frac{1}{8}\right)}\right)$ = -65.50240856

Ans→A = -65.50240856

2. Tính giá trị $y(2)$ và lưu vào B.

2 0 1 6 ALPHA ×10^x x^■ ALPHA) × ln ■/■ 1 ▽ 8 ▶) CALC 2 = S⇔D SHIFT RCL °'"

$2016e^{x\times\ln\left(\frac{1}{8}\right)}$ = 31.5

Ans→B = $\frac{63}{2}$

3. Thử các phương án.

ALPHA (−) + 2 ALPHA °'" ln 2) =	A+2Bln(2) = -21.83413619
ALPHA (−) + 3 ALPHA °'" ln 2) =	A+3Bln(2) = 1.121×10^{10}
ALPHA (−) − 8 ALPHA °'" ln 2) =	A-8Bln(2) = -240.1754981
ALPHA (−) + 8 ALPHA °'" ln 2) =	A+8Bln(2) = 109.1706809

Từ các kết quả hiện trên màn hình ta thấy chỉ có B là đáp án đúng, ta chọn B.

Đáp án B.

Ví dụ 9: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$. Khi đó $T=\frac{a}{b}$ bằng

A. $T=-5.$ B. $T=5.$ C. $T=10.$ D. $T=-10.$

Lời giải

Phân tích: Do bài toán này cho sẵn dạng thức của biểu thức đạo hàm nên ta có thể sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm, trong bài toán này ta sẽ tính tại $x=100$ sau đó sử dụng phép khai triển đa thức để tìm *a; b*.

Ta có $y'(100)=\frac{100a+b}{\sqrt{5.100^2-2.100+1}}\Rightarrow 100a+b=y'(100).\sqrt{5.100^2-2.100+1}$

Ta sử dụng máy tính để tìm vế phải.

SHIFT d/dx √■ 5 ALPHA) x² − 2 ALPHA) + 1 ▶ ▶ 1 0 0 × √■ 5 × 1 0 0 x² − 2 × 1 0 0 + 1 =

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{5X^2-2X+1}\right)\Big|_{x}$ = 499

Suy ra $100a+b=499=500-1=5.x-1=ax+b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{-1}=-5.$

Đáp án A.

Ví dụ 10: Một vật rơi tự do theo phương trình $S=\frac{1}{2}gt^2$ với $g=9,8\left(m/s^2\right)$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=5s$ là :

A. $122,5(m/s)$ B. $29,5(m/s)$ C. $10(m/s)$ D. $49(m/s)$

Lời giải

Vận tốc tức thời trong chuyển động biến đổi tại thời điểm $t=t_1$ có giá trị là $S(t_1)$

SHIFT d/dx ■/■ 1 ▽ 2 ▶ × 9 . 8 ALPHA) x² ▶ 5 =

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\times9.8X^2\right)\Big|_{x=5}$ = 49

Ta thấy vận tốc tại $t_1=5$ là 49.

Đáp án D.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+1}{4^x}$.

A. $y'=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. B. $y'=\frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. D. $y'=\frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=e^x(3-x^2)$. Đạo hàm của hàm số triệt tiêu tại các điểm

A. $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$. D. $x=0$.

Câu 3: Cho hàm số $y=2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $y'+2y\ln 2=0$. B. $y'+3y\ln 2=0$.

C. $y'-8y\ln 2=0$. D. $y'+8y\ln 2=0$.

Câu 4: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau $y=(1-2x)^4$ tại $x=2$.

A. 81. B. 432. C. 108. D. −216.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=e^x.\sin x$. Tính $f''(0)$.

A. $-2e$. B. 1. C. 2. D. $2e$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\ln|\cos 3x|$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ bằng

A. −3. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $y=x.e^{x^2}$. Khi đó $f''(1)$ bằng

A. $10e$. B. $6e$. C. $4e^2$. D. 10.

Câu 8: Cho hàm số $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Khi đó ta có

A. $y''=y$. B. $y''=-y$.

C. $y''=2y$. D. $y''=-2y$.

Câu 9: Cho hàm số $y=e^{-x}\sin x$, đặt $F=y''+2y'$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $F=-2y$. B. $F=y$. C. $F=-y$. D. $F=2y$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{-x^2+2x-3}{x-2}$. Đạo hàm y' của hàm số là biểu thức nào sau đây?

A. $-1-\frac{3}{(x-2)^2}$. B. $1+\frac{3}{(x-2)^2}$.

C. $-1+\frac{3}{(x-2)^2}$. D. $1-\frac{3}{(x-2)^2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Đạo hàm y' của hàm số đã cho là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. B. $-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $\frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. D. $-\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}$ là

A. $y'=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. B. $y'=\frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

C. $y'=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$. D. $y'=\frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=k.\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'(1)=\frac{3}{2}$.

A. $k=1$. B. $k=\frac{9}{2}$. C. $k=-3$. D. $k=3$.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{2x-3}{5+x}-\sqrt{2x}$ là

A. $y'=\frac{13}{(x+5)^2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}$. B. $y'=\frac{17}{(x+5)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

C. $y'=\frac{13}{(x+5)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2x}}$. D. $y'=\frac{17}{(x+5)^2}-\frac{x}{\sqrt{2x}}$.

Câu 15: Hàm số $y=\sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là

A. $y'=\frac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. B. $y'=\frac{-(1+\tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

C. $y'=\frac{1+\cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. D. $y'=\frac{-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Câu 16: Hàm số $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có đạo hàm bằng

A. $\frac{-x^2.\sin 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$. B. $\frac{-x^2.\sin^2 x}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

C. $\frac{-x^2.\cos 2x}{(\cos x+x\sin x)^2}$. D. $\left(\frac{x}{\cos x+x\sin x}\right)^2$.

Câu 17: Hàm số $y=2\sqrt{\sin x}-2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là

A. $y'=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$. B. $y'=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y'=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$. D. $y'=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}+\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$. Khi đó $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị nào sau đây?

A. 1. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 0.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Biểu thức $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. -3. B. $\frac{8}{3}$. C. 3. D. $-\frac{8}{3}$.

Câu 20: Cho $y=3\sin x+2\cos x$. Giá trị của biểu thức $A=y''+y$ bằng

A. $A=0$. B. $A=2$.

C. $A=4\cos x$. D. $A=6\sin x+4\cos x$.

Câu 21: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y=\tan x+\cot x+\sin x+\cos x$ bằng

A. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x}-\frac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x+\cos x$.

B. 0.

C. $\tan^2 x-\cot^2 x+\cos x-\sin x$.

D. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x-\cos x$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x.\sin x$. Tìm hệ thức **đúng**?

A. $y''+y=-2\cos x$. B. $y''-y'=2\cos x$.

C. $y''+y'=2\cos x$. D. $y''+y=2\cos x$.

Câu 23: Vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$, ứng với $\Delta x=0,1$ là

A. $-0,07$. B. 10. C. $1,1$. D. $-0,4$.

Câu 24: Cho hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$. Vi phân của hàm số là

A. $dy=-\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$. B. $dy=\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$.

C. $dy=-\frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$. D. $dy=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}dx$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$. Biểu thức $0,01.f'(0,01)$ là số nào?

A. 9. B. -9. C. 90. D. -90.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$. Khi đó

A. $d[f(x)]=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}dx$.

B. $d[f(x)]=\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

C. $d[f(x)]=\frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}dx$.

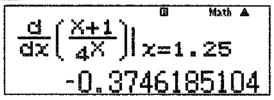
D. $d[f(x)]=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án A.

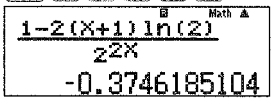
Chọn $x = 1,25$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$ bằng lệnh tính đạo hàm của hàm số tại một điểm.

SHIFT ∫ ▭/▭ ALPHA) + 1 ▽ 4 x■ ALPHA) ▷ ▷ ▷ 1 . 2 5 =



Thử với A:

▭/▭ 1 − 2 (ALPHA) + 1) ln 2) ▽ 2 x■ 2 ALPHA) CALC 1 . 2 5 =



Từ kết quả ta chọn luôn đáp án A mà không cần thử B; C; D.

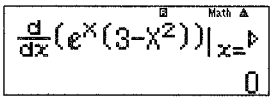
Câu 2: Đáp án A.

Ta hiểu đạo hàm bị triệt tiêu tại điểm $x = x_0$ tức là $f'(x_0) = 0.$

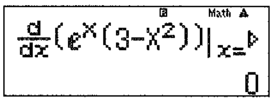
Sử dụng chức năng tính giá trị của đạo hàm tại một điểm.

Với A: Khi $x = 1$

SHIFT ∫ ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) ▷ (3 − ALPHA) x²) ▷ 1 =



Khi $x = -3$ ◁ ◁ DEL (−) 3 =

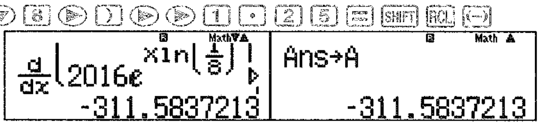


Vậy phương án A thỏa mãn, ta chọn A.

Câu 3: Đáp án B.

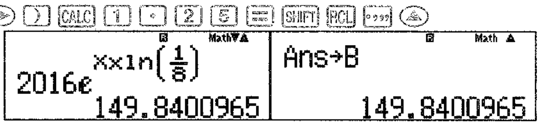
Chọn $x = 1,25$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y = 2016.e^{x.\ln\frac{1}{8}}$ ta có

SHIFT ∫ 2 0 1 6 ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) ln ▭/▭ 1 ▽ 8 ▷) ▷ ▷ 1 . 2 5 = SHIFT RCL (−)



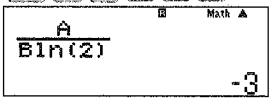
Tính giá trị của y tại $x = 1,25$.

2 0 1 6 ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) × ln ▭/▭ 1 ▽ 8 ▷) CALC 1 . 2 5 = SHIFT RCL °'" △



Ta có $\frac{A}{B\ln 2} = -3 \Rightarrow A + 3B\ln 2 = 0 \Rightarrow$ ta chọn B.

▭/▭ ALPHA (−) ▽ ALPHA °'" ln 2) =

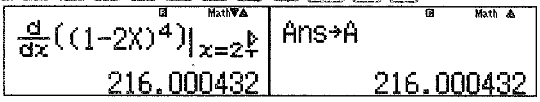


Câu 4: Đáp án B.

Áp dụng công thức $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$.

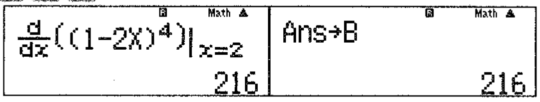
Chọn $\Delta x = 0,000001$ rồi tính đạo hàm của hàm số $y = (1-2x)^4$. Tính $y'(2 + 0,000001) = A$.

SHIFT ∫ (1 − 2 ALPHA)) x■ 4 ▷ ▷ 2 + 0 . 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL (−)



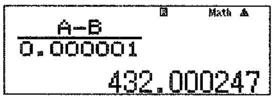
Tính $y'(2) = B$.

△ ◁ ◁ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL =
SHIFT RCL °'"



Lắp vào công thức đầu tiên ta có

▭/▭ ALPHA (−) − ALPHA °'" ▽ 0 . 0 0 0 0 0 1 =



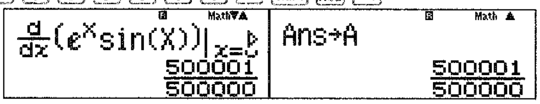
Ta chọn B.

Câu 5: Đáp án C.

Tương tự câu 4. Chọn $\Delta x = 0,000001$.

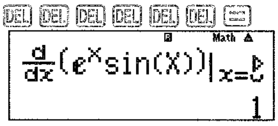
Tính $y'(0 + 0,000001) = A$.

SHIFT ∫ ALPHA ×10ˣ x■ ALPHA) ▷ sin ALPHA)) ▷ 0 . 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL (−)



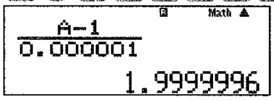
Tính $y'(0) = B$.

△ ◁ ◁ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL =



Lắp vào công thức $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$.

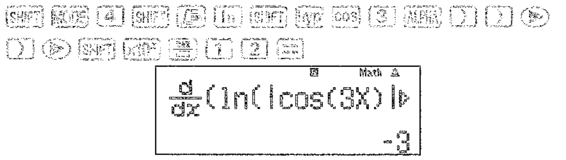
▭/▭ ALPHA (−) − 1 ▽ 0 . 0 0 0 0 0 1 =



Ta chọn C.

Câu 6: Đáp án A.

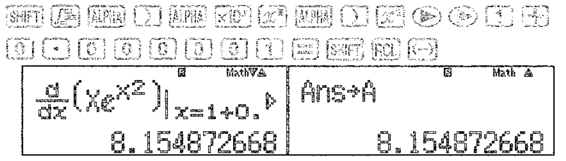
Sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính



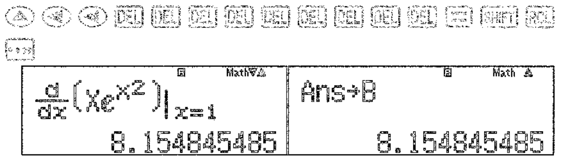
Từ đây ta chọn A.

Câu 7: Đáp án A.

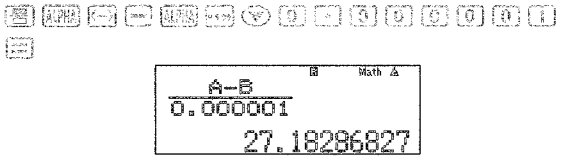
Tính $f'(1+0,000001)$ rồi lưu vào A.

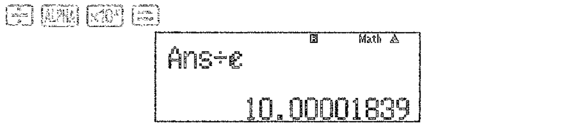


Tính $f'(1)$ rồi lưu vào B.



Thiết lập $y''(1)=\dfrac{A-B}{0,000001}$

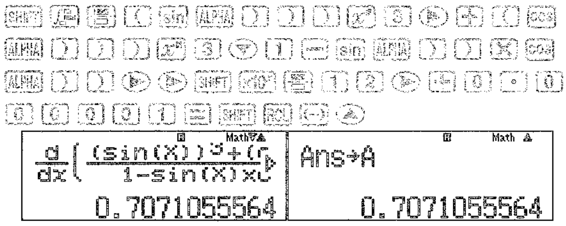




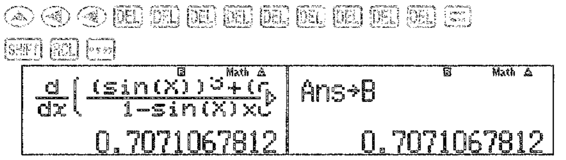
Vậy ta chọn A.

Câu 8: Đáp án B.

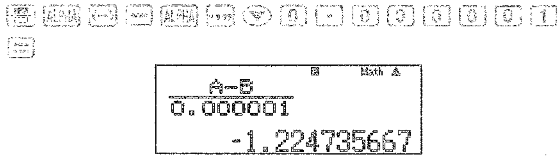
Chọn $x=\dfrac{\pi}{12}$. Tính $y'\left(\dfrac{\pi}{12}+0,000001\right)$ rồi lưu vào A.



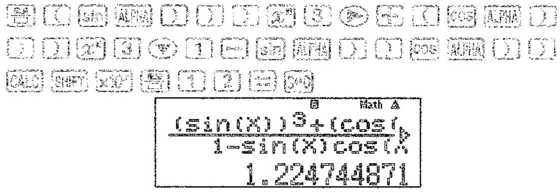
Tính $y'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ rồi lưu vào B.



Tính $y''\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{A-B}{0,000001}$



Tính $y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

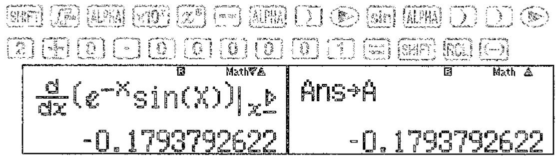


Từ hai kết quả vừa thu được ta kết luận

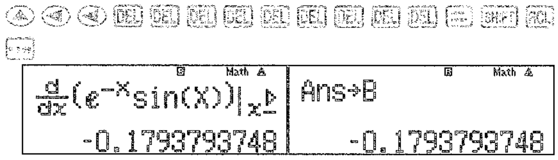
$y''\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-y\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\Rightarrow$ Ta chọn B.

Câu 9: Đáp án A.

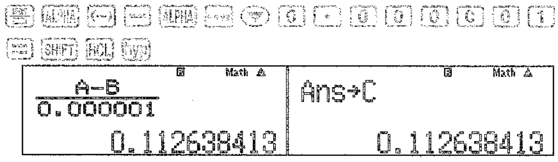
Chọn $x=2,\Delta x=0,000001$ rồi tính $y'(2+0,000001)$ gán vào A.

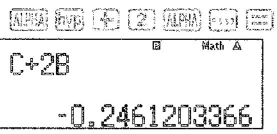


Tính $f'(2)$ lưu vào B.

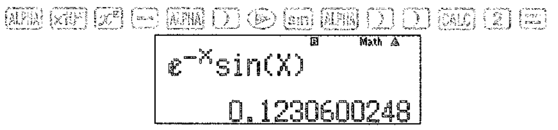


$y''(2)=\dfrac{A-B}{0,000001}$.



Ta có $C+2B=$ 

Tính $y(2)$.



Vậy $F=-2y$. Ta chọn A.

Câu 10: Đáp án C.

1. Sử dụng máy tính.

Tính $y'(1)$.

SHIFT ∫ ▭ (−) ALPHA) x² + 2 ALPHA) − 3 ▼ ALPHA) − 2 ▶ ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-X^2+2X-3}{X-2}\right)\Big|_{x=}$ 2

Thử với các phương án.

Với A:

(−) 1 − 3 ▭ (ALPHA) − 2) x² CALC 1 =

$-1-\frac{3}{(X-2)^2}$ -4

Vậy ta loại A.

Với B: ▶ ▶ DEL ▶ ▶ DEL + CALC 1 =

$1+\frac{3}{(X-2)^2}$ 4

Vậy ta loại B.

Với C: ▶ − CALC 1 =

$-1+\frac{3}{(X-2)^2}$ 2

Thỏa mãn, vậy ta chọn C.

2. Giải toán thông thường.

Ta có $y'=\frac{\left(-x^2+2x-3\right)'(x-2)-\left(-x^2+2x-3\right)(x-2)}{(x-2)^2}$

$=\frac{(-2x+2)(x-2)-\left(-x^2+2x-3\right).1}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}$

$=-1+\frac{3}{(x-2)^2}$.

Câu 11: Đáp án B.

1. Sử dụng máy tính.

Sử dụng máy tính tính đạo hàm của hàm số tại $x=1$.

SHIFT ∫ ▭ 1 ▼ √ ALPHA) x² + 1 ▶ ▶ ▶ 1 = SHIFT RCL (−)

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2+1}}\right)\Big|_{x=1}$ -0.3535533906 | Ans→A -0.3535533906

Thử với các phương án

Với A:

▭ ALPHA) ▼ (ALPHA) x² + 1) √ ALPHA) x² + 1 CALC 1 = S⇔D

$\frac{X}{(X^2+1)\sqrt{X^2+1}}$ 0.3535533906

Ta không cần thử thêm mà suy ra B là đáp án.

2. Giải toán thông thường.

Ta có

$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}$

$=\frac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$.

Từ đây ta chọn B.

Câu 12: Đáp án C.

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Sử dụng máy tính tính đạo hàm tại $x=3$.

SHIFT ∫ ALPHA) √ ALPHA) x² − 2 ALPHA) ▶ ▶ 3 = SHIFT RCL (−)

$\frac{d}{dx}\left(X\sqrt{X^2-2X}\right)\Big|_{x=3}$ 5.196152423 | Ans→A 5.196152423

Thử với các phương án.

Với A:

▭ 2 ALPHA) − 2 ▼ √ ALPHA) x² − 2 ALPHA) CALC 3 = S⇔D

$\frac{2X-2}{\sqrt{X^2-2X}}$ 2.309401077

Vậy ta loại A.

Với B:

◀ ◀ ▲ DEL 4 ALPHA) ◀ ◀ ◀ ◀ DEL 3 ▶ x² CALC 3 = S⇔D

$\frac{3X^2-4X}{\sqrt{X^2-2X}}$ 8.660254038

Với C:

◀ ▲ ◀ ▲ ◀ DEL 3 ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL 2 CALC 3 = S⇔D

$\frac{2X^2-3X}{\sqrt{X^2-2X}}$ 5.196152423

Ta thấy C cho ra kết quả giống kết quả phía trên. Từ đây ta chọn C.

2. Giải toán thông thường.

Ta có $y'=\sqrt{x^2-2x}+x.\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}$

$=\frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Vậy ta chọn C.

Câu 13: Đáp án D.

Sử dụng máy tính cầm tay với lệnh CALC để thử xem phương án nào đúng.

Với A:

SHIFT ∫ ALPHA (−) SHIFT √ ALPHA) ▶ + √ ALPHA) ▶ ▶ 1 CALC 1 = 1 =

$$\frac{d}{dx}\left(A\sqrt[3]{X}+\sqrt{X}\right)\Big|_{x=1}$$
0.8333333333

Với B:

CALC 9 □/□ 2 = S⇔D

$$\frac{d}{dx}\left(A\sqrt[3]{X}+\sqrt{X}\right)\Big|_{x=1}$$
2

Với C:

CALC (−) 3 = =

$$\frac{d}{dx}\left(A\sqrt[3]{X}+\sqrt{X}\right)\Big|_{x=1}$$
-0.5

Với D:

CALC 3 = =

$$\frac{d}{dx}\left(A\sqrt[3]{X}+\sqrt{X}\right)\Big|_{x=1}$$
1.5

Vậy ta chọn D.

Câu 14: Đáp án A.

Tính đạo hàm tại $x=2$.

SHIFT ∫ □/□ 2 ALPHA) − 3 ▼ 5 + ALPHA) ► −
√ 2 ALPHA) ► ► 2 =

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X-3}{5+X}-\sqrt{2X}\right)\Big|_{x=}$$
-0.2346938776

Thử các phương án.

Với A:

□/□ 1 3 ▼ (ALPHA) + 5) x^2 ► − □/□ 1
▼ √ 2 ALPHA) CALC 2 = S⇔D

$$\frac{13}{(X+5)^2}-\frac{1}{\sqrt{2X}}$$
-0.2(3469387755

Vậy ta chọn A.

Câu 15: Đáp án D.

Tính đạo hàm của hàm số đã cho tại $x=\frac{\pi}{12}$.

SHIFT MODE 4 SHIFT ∫ √ □/□ 1 ▼ tan 2 ALPHA))
► ► ► ► ◄ SHIFT ×10ˣ □/□ 1 2 =

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{\tan(2X)}}\right)\Big|_{x=}$$
-3.039342743

Thử với các phương án còn lại:

Với A:

□/□ 1 + (tan 2 ALPHA))) x^2 ▼ √ □/□ 1
▼ tan 2 ALPHA)) CALC SHIFT ×10ˣ ÷ 1 2 =

$$\frac{\dots}{\sqrt{\frac{1}{\tan(2X)}}}$$
1.013114248

Từ đây ta loại A và B.

Với C:

□/□ 1 + □/□ 1 ▼ (tan 2 ALPHA))) x^2 ▼
√ 1 □/□ tan 2 ALPHA)) CALC SHIFT ×10ˣ ÷ 1 2
=

$$\frac{\dots}{\sqrt{\frac{1}{\tan(2X)}}}$$
3.039342743

Từ đây ta loại C chọn D.

Câu 16: Đáp án D.

Sử dụng máy tính cầm tay tính đạo hàm tại $x=\frac{\pi}{12}$.

SHIFT MODE 4 SHIFT ∫ □/□ sin ALPHA)) − cos ALPHA)
) ▼ cos ALPHA)) + ALPHA) sin ALPHA)) ► ►
SHIFT ×10ˣ ÷ 1 2 =

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(X)-X\cos}{\cos(X)+X\sin}\right.$$
0.0641447697

Thử với các phương án A; B; C; D.

Với A:

□/□ − ALPHA) x^2 sin 2 ALPHA)) ▼ (cos ALPHA)
) + ALPHA) sin ALPHA))) x^2 CALC SHIFT ×10ˣ ÷
1 2 =

$$\frac{-X^2\times\sin(2X)}{(\cos(X)+X\sin(X)}$$
-0.03207238485

Vậy ta loại A.

Với B:

◄ ▲ DEL DEL DEL DEL (sin ALPHA))) x^2 CALC SHIFT
×10ˣ ÷ 1 2 =

$$\frac{-X^2\times\cos(2X)}{(\cos(X)+X\sin(X)}$$
-0.05555100008

Vậy ta loại B.

Với C:

◄ ◄ ▲ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL cos 2 ALPHA)
) CALC SHIFT ×10ˣ ÷ 1 2 =

$$\frac{-X^2\cos(2X)}{(\cos(X)+\sin(X))}$$
-0.0395709636

Vậy ta loại C, chọn D.

Câu 17: Đáp án D.

Sử dụng máy tính tính đạo hàm của hàm số tại

$x=\frac{\pi}{12}$.

SHIFT ∫ 2 √ sin ALPHA)) ► − 2 √ cos ALPHA)
) ► ► □/□ SHIFT ×10ˣ ▼ 1 2 =

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{\sin(X)}-2\sqrt{c}\right.$$
2.161997829

Với A:

□/□ 1 ▼ √ sin ALPHA)) ► ► − 1 □/□ √ cos
ALPHA)) CALC SHIFT ×10ˣ ÷ 2 DEL 1 2 =

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(X)}}-\frac{1}{\sqrt{\cos(X)}}$$
0.9481452872

Vậy ta loại A.

Với B:

[◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [DEL] [÷] [CALC] [=]

```
1/√sin(X) + 1/√cos(X)
                  2.983115735
```

Vậy ta loại B.

Với C:

```
cos(X)/√sin(X) − sin(X)/√cos(X)
                  1.635308721
```

Vậy ta loại C. Từ đây ta chọn D.

Câu 18: Đáp án D.

Ta nhập

[▭] [SHIFT] [∫] [cos] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [4] [▷] [−] [2] [ALPHA] [)] [)] [▷] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [8] [▽] [SHIFT] [∫] [cos] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [4] [▷] [−] [2] [ALPHA] [)] [)] [▷] [ALPHA] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [3] [=]

```
d/dx(cos(π/4−2x))|x
                            0
```

Vậy ta chọn D.

Câu 19: Đáp án C.

Sử dụng máy tính nhập

[▭] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▽] [1] [+] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▷] [−] [3] [SHIFT] [∫] [▭] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▽] [1] [+] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▷] [▷] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [4] [CALC] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [4] [=]

```
(cos(X))²/(1+(sin(X))²) − 3 d/dx
                            3
```

Vậy ta chọn C.

Câu 20: Đáp án A.

Ta sẽ tính $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)+y\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Tính $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Chọn $\Delta x=0,000001$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}+0,000001\right)$ và gán cho A.

[SHIFT] [∫] [3] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▷] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [3] [▷] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
d/dx(3sin(X)+2cos▷        Ans→A
      -0.2320544056        -0.2320544056
```

Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gán cho B.

[▲] [◀] [◀] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
d/dx(3sin(X)+2cos▷        Ans→B
      -0.2320508076        -0.2320508076
```

Lúc này $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{A-B}{0,000001}$.

[▭] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'"] [▽] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [)]

```
(A−B)/0.000001            Ans→X
      -3.598078934         -3.598078934
```

[ALPHA] [)] [+] [3] [sin] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [3] [▷] [)] [+] [2] [cos] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [3] [▷] [)] [=]

```
X+3sin(π/3)+2cos(▷
      -2.7226467×10⁻⁶
```

Ta thấy kết quả rất nhỏ ≈ 0, do vậy ta chọn A.

Câu 21: Đáp án D.

Tính đạo hàm của hàm số tại $x=\frac{\pi}{3}+0,000001$.

[SHIFT] [∫] [tan] [ALPHA] [)] [)] [+] [▭] [1] [▽] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▷] [+] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▷] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▽] [3] [▷] [+] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
d/dx(tan(X)+1/tan(X▷      Ans→A
        2.300655293          2.300655293
```

Tính đạo hàm của hàm số $x=\frac{\pi}{3}$.

[▲] [◀] [◀] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [DEL] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
d/dx(tan(X)+1/tan(X▷      Ans→B
        2.300641263          2.300641263
```

Tính $\frac{A-B}{0,000001}$

[▭] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'"] [▽] [0] [.] [0] [0] [0] [0] [0] [1] [=]

```
(A−B)/0.000001
                 14.0300209
```

Vậy ta loại B.

Với A:

[▭] [2] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▽] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▷] [−] [▭] [▭] [2] [▽] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▽] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▷] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [CALC] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [3] [=]

```
2tan(X)/(cos(X))² − tan/(sin(▷
                 11.95078034
```

Với C:

[(] [tan] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [−] [▭] [1] [▽] [(] [tan] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▷] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [CALC] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [3] [=] [S⇔D]

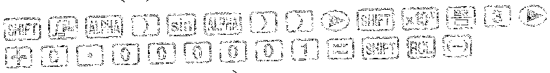
```
(tan(X))² − 1/(tan(▷
                 2.300641263
```

Từ đây ta chọn D.

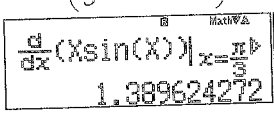
Câu 22: Đáp án D.

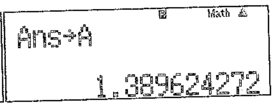
Tính $y''\left(\frac{\pi}{3}\right); y'\left(\frac{\pi}{3}\right); y\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Tính $y''\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

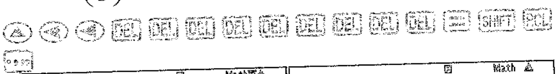


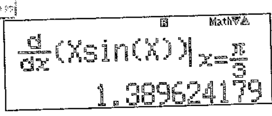
Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}+0,000001\right)$.

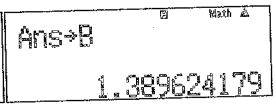




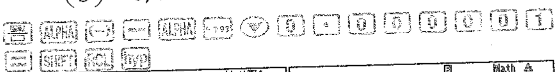
Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

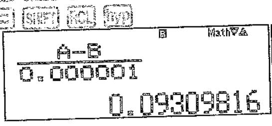


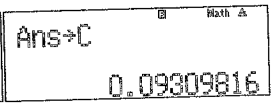




$\Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{A-B}{0,000001}$

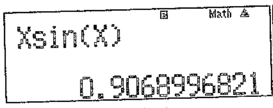


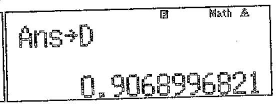




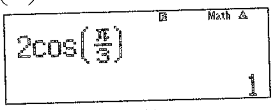
2. Tính $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



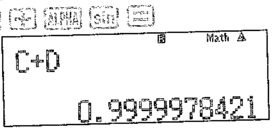




3. Tính $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

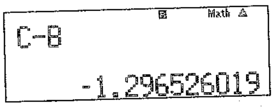


Với A: 

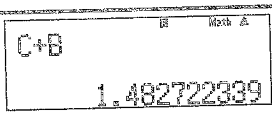


Ta loại A.

Với B: 



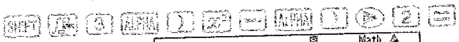
Với C: 

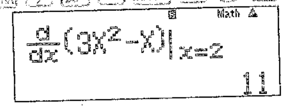


Vậy ta chọn D.

Câu 23: Đáp án C.

Tính $f'(2)$.

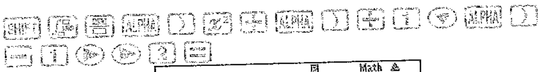


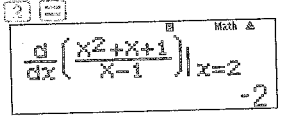


Vậy $df(2)=f'(2).\Delta x=11.0,1=1,1$. Ta chọn C.

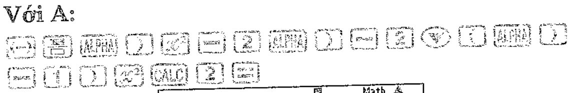
Câu 24: Đáp án D.

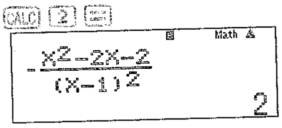
Tính $y'(2)$.





Với A:

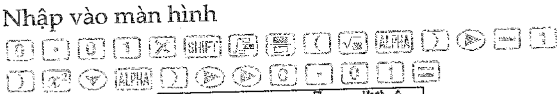


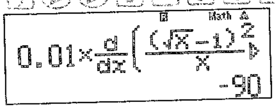


Vậy ta loại A. Từ đây ta chọn luôn được D.

Câu 25: Đáp án D.

Nhập vào màn hình

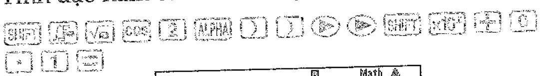


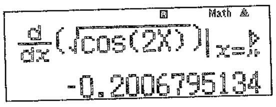


Vậy ta chọn D.

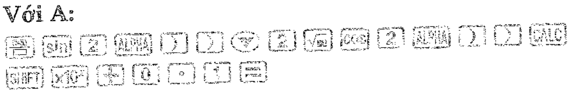
Câu 26: Đáp án D.

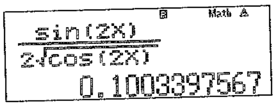
Tính đạo hàm của hàm số tại $x=\pi+0,1$.





Với A:





Từ đây ta loại C, nếu tinh ý có thể suy ra D là đáp án đúng.

IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

a. Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

b. Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.

Định lý

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

B. Phương pháp sử dụng máy tính giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Cách 1: Sử dụng lệnh MODE 7 (TABLE) để giải quyết.

Sử dụng TABLE xét hàm số $f(x)$ trên $[a;b]\rightarrow\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[a;b]} f(x)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)\end{array}\right.$

Các lưu ý cách chọn các giá trị Start, End và Step.

Start? Ta nhập giá trị a.

End? Nhập giá trị b.

Step? Nhập bước nhảy phù hợp (thường ta chọn bước nhảy là $\frac{b-a}{19}$).

Từ đây ta có thể nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $[a;b]$, từ đó chọn giá trị thích hợp.

Cách 2:

1. Giải phương trình $f'(x)=0$ bằng cách sửa dụng nút SOLVE (lấy giá trị của x nằm trên $[a;b]$ để dò nghiệm), ta được các nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.
2. Dùng CALC để tìm các giá trị của $f(x)$ tại các điểm đầu mút và các điểm x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ rồi so sánh từ đó kết luận min, max.

> STUDY TIPS
> Mỗi cách có một thế mạnh riêng, với bài toán ta có thể tìm được biểu thức đạo hàm nhanh chóng thì ta nên SOLVE nghiệm phương trình $f'(x)=0$ để giải quyết thì sẽ đưa kết quả nhanh và chính xác hơn so với TABLE.

C. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^2-2x+3)^2-7$.

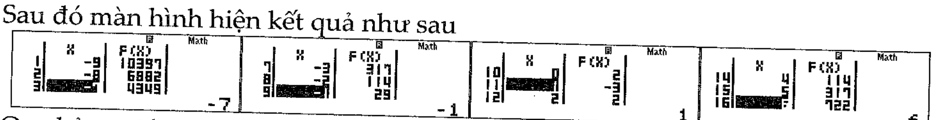
A. $\min y=-5$. B. $\min y=-7$ C. $\min y=-3$ D. Không tồn tại min.

Lời giải

Sử dụng chức năng MODE 7 (TABLE) thiết lập với Start -9; End 10; Step 1.

MODE 7 (ALPHA) x^2 − 2 ALPHA) + 3) x^2 − 7 = = (−) 9 = 1 0 = 1 =

Sau đó màn hình hiện kết quả như sau



Qua bảng giá trị ta thấy ngay $\min y=-3\Leftrightarrow x=1$.

Đáp án C.

STUDY TIPS
Bài toán này ta dễ dàng tính được $f'(x)$ nên sử dụng SOLVE sẽ chính xác hơn. Và các phương án là các số vô tỷ nên khó sử dụng TABLE hơn.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+3x+9}$ trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{13}{22}$.   B. $\dfrac{22+2\sqrt{58}}{63}$.   C. $\dfrac{57+5\sqrt{58}}{161}$.   D. Không tồn tại.

Lời giải

Do bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên toàn bộ tập số thực nên ta sẽ quy ước $\mathbb{R}=[-99999;99999]$ và coi nó như một đoạn.

Bài toán này việc tìm phương trình $y'=0$ dễ dàng do vậy ta sẽ sử dụng chức năng SOLVE.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x.(2x^2+3x+9)-(4x+3)(x^2+1)=0.$

Nhập biểu thức vào máy tính và SOLVE nghiệm

Tìm nghiệm thứ nhất và gán vào biến A.

[2] [ALPHA] [)] [(] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [+] [9] [)] [−] [(] [4] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [=]
[ALPHA] [)] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
2X×(2X²+3X+9)-(▷
X=     0.205257702
L-R=             0
```

```
X→A
       0.205257702
```

Tương tự ta tìm được nghiệm thứ hai và gán vào B.

[2] [ALPHA] [)] [×] [(] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [+] [9] [)] [−] [(] [4] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [(−)] [9] [9] [9] [=] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
2X×(2X²+3X+9)-(▷
X=    -4.871924369
L-R=             0
```

```
Ans→B
      -4.871924369
```

Thực hiện thay các nghiệm vừa tìm được cùng các điểm đầu mút từ đó so sánh đưa ra max.

Nhập vào màn hình biểu thức $f(x)$ và sử dụng CALC

[▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [▽] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [+] [9] [CALC] [ALPHA] [(−)] [=]
[CALC] [ALPHA] [°'"] [=]
[CALC] [(−)] [9] [9] [9] [9] [9] [=]
[CALC] [9] [9] [9] [9] [9] [=]

```
  X²+1
2X²+3X+9
      0.1074357744
```

```
  X²+1
2X²+3X+9
       0.590976924
```

```
  X²+1
2X²+3X+9
         0.5000075
```

```
  X²+1
2X²+3X+9
      0.4999924999
```

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x=B$.

Ta thấy $\dfrac{22+2\sqrt{58}}{63}=0,590976924...$ Vậy ta chọn B.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$.   B. $\dfrac{11}{3}$.   C. 3.   D. $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng SOLVE.

Do bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên toàn bộ tập số thực nên ta sẽ quy ước $\mathbb{R}=[-99999;99999]$ và coi nó như một đoạn.

Tương tự như bài toán ở ví dụ 2 ta có

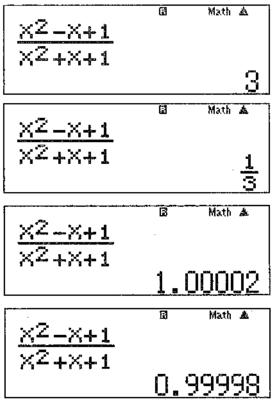
$y'=0\Leftrightarrow(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)=0$

Thực hiện nhập vế trái của phương trình vào máy tính và sử dụng SOLVE để giải phương trình

[(] [2] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [−] [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [(] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [CALC] [−] [1] [0] [0] [0] [=] [SHIFT] [CALC] [1] [0] [0] [0] [=]

```
(2X-1)(X²+X+1)-▷
X=              -1
L-R=             0
```

```
(2X-1)(X²+X+1)-▷
X=               1
L-R=             0
```



STUDY TIPS

Với bài toán này do giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được tại hai giá trị nguyên nên dễ dàng hiện trên bảng giá trị, tuy nhiên đôi khi phương pháp TABLE này không cho kết quả GTLN, GTNN hiện trên màn hình, do tùy chọn STEP.

Ta nhập hàm số vào máy tính và sử dụng CALC để tìm giá trị của hàm số tại hai điểm đầu mút và tại hai nghiệm.

[▭] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [(−)] [1] [=]
[CALC] [1] [=]
[CALC] [(−)] [9] [9] [9] [9] [9] [=] [CALC] [9] [9] [9] [9] [9] [=]

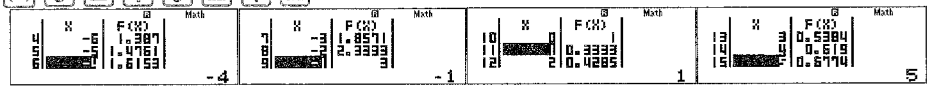
Từ các kết quả hiện trên màn hình ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = \frac{1}{3} = m$ và

$\max\limits_{\mathbb{R}} y = y(-1) = 3 = M \Rightarrow M + m = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Cách 2: Sử dụng lệnh TABLE.

Ta sẽ sử dụng TABLE với Start -9; End 10; Step 1

[MODE] [7] [▭] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [=] [=]
[(−)] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = y(1) = \frac{1}{3} = m$ và $\max\limits_{\mathbb{R}} y = y(-1) = 3 = M$

$\Rightarrow M + m = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Đáp án D.

Ví dụ 4: Hàm số $y = |3\cos x - 4\sin x + 8|$ với $x \in [0; 2\pi]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. B. $7\sqrt{3}$. C. $8\sqrt{3}$. D. 16.

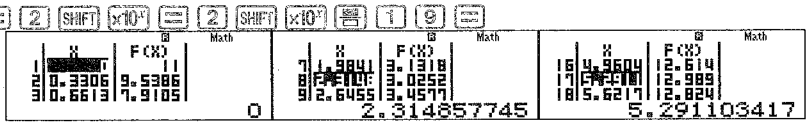
Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay với chức năng [MODE] [7].

Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác thì ta chuyển máy tính về chế độ Rađian. [SHIFT] [MODE] [4]

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2π; Step $\frac{2\pi}{19}$.

[SHIFT] [MODE] [4] [MODE] [7] [SHIFT] [hyp] [3] [cos] [ALPHA] [)] [)] [−] [4] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [8] [=] [=]
[0] [=] [2] [SHIFT] [×10ˣ] [=] [2] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [1] [9] [=]



STUDY TIPS

Nếu các bài toán liên quan đến các đại lượng lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Rađian.

Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là

$f(5.2911) \approx 12.989 = M$

Giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.3148) \approx 3.0252 = m$

$\Rightarrow M + m = 16$ (trong các phương án chỉ có 16 là cộng lại hai giá trị xấp xỉ được kết quả).

2. Lời giải thông thường.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$(3\cos x - 4\sin x)^2 \le \left(3^2 + (-4)^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 25$

$\Rightarrow |3\cos x - 4\sin x| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3\cos x - 4\sin x \le 5 \Leftrightarrow 3 \le 3\cos x - 4\sin x + 8 \le 13$

Vậy $3 \le |3\cos x - 4\sin x + 8| \le 13$.

$\Rightarrow M + m = 3 + 13 = 16$.

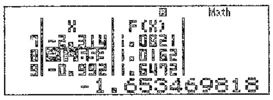
Đáp án D.

Ví dụ 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ là

A. $\min y=0$. B. $\min y=1$. C. $\min y=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Tương tự như ở ví dụ 4, do chu kì của hàm số sin, cos là 2π nên ta chọn Start -2π; End 2π; Step $\frac{4\pi}{19}$.



Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ với lệnh MODE 7

SHIFT MODE 4 MODE 7 √ 1 + sin ALPHA)) ▶ + √ 1 + cos ALPHA)) = = − 2 SHIFT ×10^x = 2 SHIFT ×10^x = 4 SHIFT ×10^x ÷ 1 9 =

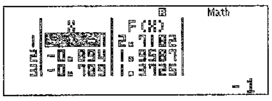
Quan sát bảng giá trị kết hợp với các phương án ta chọn B.

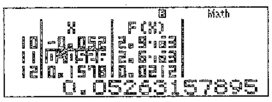
Đáp án B.

Ví dụ 6: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

A. $M=\frac{1}{e};m=0$. B. $M=e;m=0$. C. $M=e;m=\frac{1}{e}$. D. $M=e;m=1$.

Lời giải





Ta sử dụng lệnh TABLE với Start -1; End 1; Step $\frac{2}{19}$.

MODE 7 = ALPHA) x² ▼ ALPHA ×10^x x² ALPHA) = = − 1 = 1 = 2 ÷ 1 9 =

Quan sát bảng giá trị ta thấy $M\approx 2,7182=e$ đạt được khi $x=-1$ và $m=2,6.10^{-3}\approx 0$.

Đáp án B.

Ví dụ 7: Cho các số $x;y$ thỏa mãn điều kiện $y\le 0; x^2+x-y-12=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+x+2y+17$ bằng

A. -12. B. -9. C. -15. D. -5.

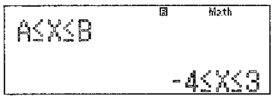
Phân tích: Ta thấy dữ kiện đề bài cho $x^2+x-y-12=0$ thì $x;y$ độc lập với nhau do vậy ta có thể dễ dàng rút y theo x từ đó thay vào P. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất trên một đoạn. Dựa trên điều kiện $y\le 0$ ta có thể tìm được điều kiện của x.

Lời giải

Ta có $x^2+x-y-12=0$ ta rút ra được $y=x^2+x-12$.

Mặt khác $y\le 0\Leftrightarrow x^2+x-12\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 3$

(Để giải bất phương trình trên ta sử dụng chức năng giải bất phương trình của máy tính: MODE ▼ 1 1 4 1 = 1 = − 1 2 = =)



Lúc này biểu thức P trở thành $P=(x+2)(x^2+x-12)+x+17$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của P trên $[-4;3]$.

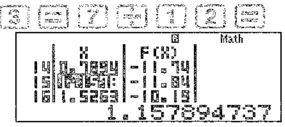
1. Sử dụng TABLE.

STUDY TIPS

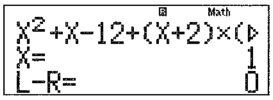
Ta thấy bài toán này việc sử dụng TABLE không cho ra kết quả chính xác của $\min\limits_{[-4;3]} P$ mà ta phải sử dụng phán đoán kết hợp các phương án.

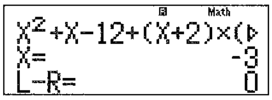
Sử dụng MODE 7 (TABLE) với thiết lập Start -4; End 3; Step $\frac{7}{19}$ ta ấn

MODE 7 (ALPHA) + 2) (ALPHA) x² + ALPHA) − 1 2) + ALPHA) + 1 7 = = − 4 = 3 = 7 ÷ 1 2 =



Quan sát bảng giá trị và so sánh với các phương án ta thấy $\min\limits_{[-4;3]} P = -12$.





2. Sử dụng chức năng SOLVE.

Ta có $P' = \left(x^2 + x - 12\right) + \left(x+2\right)\left(2x+1\right) + 1$.

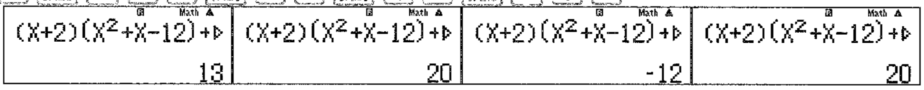
Ta nhập biểu thức vào màn hình và sử dụng chức năng SOLVE để giải nghiệm.

[ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [2] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [×] [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [+] [1] [SHIFT] [CALC] [=] [SHIFT] [CALC] [(−)] [4] [=]

Ta thấy phương trình $P' = 0$ có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -3$.

Lúc này ta sử dụng [CALC] để tính giá trị của P tại hai nghiệm và hai điểm đầu mút.

[(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [1] [2] [)] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [7] [CALC] [(−)] [4] [=] [CALC] [3] [=] [CALC] [1] [=] [CALC] [(−)] [3] [=]



Từ việc so sánh các giá trị ta kết luận $\min\limits_{[-4;3]} P = -12$ khi $x = 1; y = -10$.

Đáp án A.

STUDY TIPS
Từ bài toán với hai cách làm này, ta đưa ra kết luận nên sử dụng SOLVE khi biểu thức đạo hàm có thể tìm được dễ dàng, có vậy mới đưa ra kết quả chính xác.

Ví dụ 8: Để hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$ có $\max\limits_{[-2;1]} = \frac{4}{9}$ thì giá trị của tham số thực m là

A. 0. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

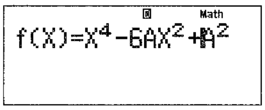
STUDY TIPS
Ở các bài toán dạng này ta thấy do đề bài chỉ có 4 phương án, nên ta chỉ cần thử 2 lần là có được kết quả.

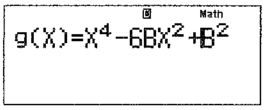
Lời giải

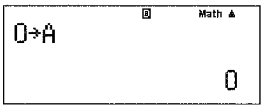
Đầu tiên ta gán các giá trị ở các phương án lần lượt vào các biến A, B, C, D bằng lệnh STO như sau:

Ấn [0] [SHIFT] [RCL] (là nút STO) [(−)]

Tương tự với B, C, D.



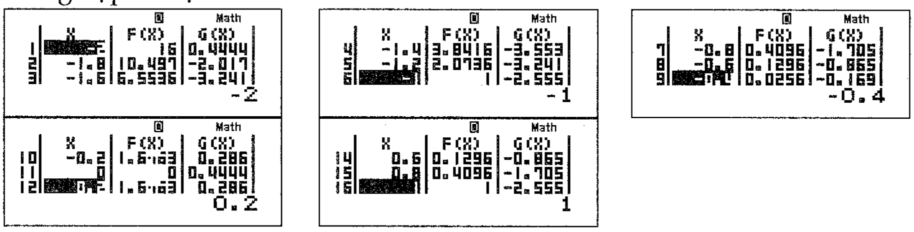




Lúc này ta kiểm tra hai phương án A, B thì ta nhập hàm $f(x) = X^4 - 6A.X^2 + A^2$

$g(x) = x^4 - 6.BX^2 + B^2$ như hình bên.

Tiếp theo nhập Start? -2; End? 1 Step? 0,2 Ta thấy các giá trị của hàm số ở hai trường hợp m hiện như sau



Ta thấy khi $m = 0$ thì hàm số không đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{9}$ (loại).

Ở trường hợp $m = \frac{2}{3}$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{4}{9}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Đáp án B.

Phân tích: Bài toán ở ví dụ 7 ta đã sử dụng phép thử với TABLE. Trong bài toán ở ví dụ 8, ta sẽ có một cách khác để giải bài toán này, đó là sử dụng phép thế cho tham số bằng 100. Tuy nhiên **chú ý** cách giải này chỉ mang tính chất dự đoán, không phải cách làm chính thống.

Ví dụ 9: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên $[0;1]$ bằng -2.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

STUDY TIPS
Việc ta tách $-9900 = 100 - 100^2 = m - m^2$ là sử dụng kĩ thuật khai triển đa thức bằng máy tính đã được giới thiệu trong phần chức năng.

Chú ý
Đây không phải cách làm đúng cho tất cả các trường hợp, do vậy ta chỉ sử dụng với các bài toán đơn giản, ngoài ra để xử lý cặn kẽ ta có thể gán thêm $m = -100$; $m = 0{,}01$; $m = -0{,}01$.

Lời giải

Khi sử dụng phép thế cho tham số $m = 100$ ta được $f(x) = \dfrac{x - 9900}{x + 1}$.

$$f'(x) = \frac{9901}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

$$\Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = -9900 = 100 - 100^2 = m - m^2.$$

Lúc này theo đề bài ta có $-m^2 + m = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

[SHIFT] [MODE] [▽] [MODE] [5] [3] [(-)] [1] [=] [1] [=] [2] [=] [=]

X2=	X1=
-1	2

Vậy ta chọn D.

Đáp án D.

> **Ví dụ 10:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2mx + 1}{m - x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $-\dfrac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng
> A. -5. B. 1. C. 0. D. -2.

Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta thấy nếu giá trị nhỏ nhất của y bằng $-\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ thì phương trình $y + \dfrac{1}{3} = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$.

STUDY TIPS
Bài toán này do phương trình cần SOLVE chỉ có một nghiệm nên việc làm theo hướng này sẽ giải quyết bài toán nhanh hơn thông thường.

Với A: ta có $\dfrac{-10x + 1}{-5 - x} + \dfrac{1}{3} = 0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SOLVE.

[▭/▭] [(-)] [1] [0] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [(-)] [5] [−] [ALPHA] [)] [▶] [+] [▭/▭] [1] [▽] [3] [SHIFT] [CALC] [2] [.] [5] [=]

```
-10X+1    1
------ + -
-5-X      3
X=   -0.064516129
L-R=            0
```

Ta thấy nghiệm của phương trình không thuộc $[2;3]$ nên ta loại A.

Với B: ta có $\dfrac{2x + 1}{1 - x} + \dfrac{1}{3} = 0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SOLVE.

[▭/▭] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [1] [−] [ALPHA] [)] [▶] [+] [1] [▭/▭] [3] [▶] [SHIFT] [CALC] [2] [=]

```
2X+1   1
---- + -
1-X    3
X=          -0.8
L-R=           0
```

Với C: $\dfrac{1}{-x} + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3 \in [2;3]$. Vậy ta chọn C.

2. Giải toán thông thường.

Tính đạo hàm $y' = \dfrac{2m(m - x) - (2mx + 1)(-1)}{(m - x)^2} = \dfrac{2m^2 + 1}{(m - x)^2} > 0$ với mọi $x \neq m$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \dfrac{2mx + 1}{m - x}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \dfrac{2mx + 1}{m - x}$ đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x = 3$.

$$\Rightarrow y(3) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{6m + 1}{m - 3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m = 0.$$

Đáp án C.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} y = \frac{67}{27}$. B. $\max\limits_{[1;3]} y = -2$.

C. $\max\limits_{[1;3]} y = -7$. D. $\max\limits_{[1;3]} y = -4$.

Câu 2: Hàm số $y = |3\cos x - 4\sin x + 8|$ với $x \in [0;2\pi]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó tổng $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. B. $7\sqrt{3}$.

C. $8\sqrt{3}$. D. 16.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 12x + 2$ trên đoạn $[1;4]$ là

A. 13. B. 2.

C. −14. D. 18.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 0$. B. $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

C. $\min\limits_{[2;4]} y = 5$. D. $\min\limits_{[2;4]} y = 7$.

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 64$. B. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 1$.

C. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 0$. D. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 9$.

Câu 6: Tìm M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $M = 8; m = -1$. B. $M = 8; m = 7$.

C. $M = 7; m = 0$. D. $M = 8; m = \frac{22}{3}$.

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5}{x + 3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\min\limits_{[0;2]} y = -\frac{5}{3}$. B. $\min\limits_{[0;2]} y = -\frac{1}{5}$.

C. $\min\limits_{[0;2]} y = -2$. D. $\min\limits_{[0;2]} y = -10$.

Câu 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ là

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ với $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = -1$. B. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

C. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = 2\sqrt{2}$. D. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = 0$.

Câu 10: Hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên $[0;1]$. Khi đó giá trị của m là

A. 5. B. 3.

C. 1. D. 4.

Câu 11: Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2;2]$?

A. $m < 0$. B. $m = 2$.

C. $m > 0$. D. $m = -2$.

Câu 12: Tìm m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng −2.

A. 1. B. 2.

C. 0. D. −2.

Câu 13: Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$ là

A. $M = 2; m = -5$. B. $M = 5; m = 2$.

C. $M = 5; m = -2$. D. $M = -2; m = -5$.

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} - 2\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ trên $[1;3]$ là

A. 0. B. $\frac{9}{4}$.

C. $\sqrt{2}$. D. $-\sqrt{2}$.

Câu 15: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$, với $x^2 + y^2 \neq 0$. Giá trị lớn nhất của P là

A. 3. B. $\frac{1}{3}$.

C. 1. D. 4.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{mx + 1}{x - m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng −2 là

A. $m = -3$. B. $m = 3$.

C. $m = 1$. D. $m = 4$.

Câu 17: Cho biểu thức $P = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, với $x; y \neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của P là

A. 1. B. 0.

C. −1. D. −2.

Câu 18: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-3x+2\right|+3x+4$ là

A. 5.		B. 8.

C. 6.		D. 3.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^{\ln x+1}$ trên $\left[e;e+1\right]$ là

A. 2.		B. e^2.

C. e^3.		D. e^2+e.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x+2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$.		B. 1.

C. $\dfrac{1}{2}$.		D. 2.

Câu 21: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m^2+2m$ trên $\left[0;2\right]$ bằng 3.

A. $m=\pm 3$.		B. $m=1; m=-3$.

C. $m=\pm\sqrt{7}$.		D. $m=\sqrt{2}; m=-2$.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị $m>0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $D=\left[m+1;m+2\right]$ luôn bé hơn 3 là

A. $\left(0;1\right)$.		B. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

C. $\left(-\infty;1\right)\setminus\left\{-2\right\}$.		D. $\left(0;2\right)$.

Câu 23: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}\ge m$ có nghiệm

A. $\left(-\infty;3\right]$.		B. $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right]$.

C. $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$.		D. $\left(-\infty;3\sqrt{2}\right)$.

Câu 24: Cho $x; y$ là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2\left(x+1\right)\left(y+1\right)+8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M+m$ bằng

A. 44.		B. 41.

C. 43.		D. 42.

Câu 25: Cho $x; y$ là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$.

A. $\min P=5$.		B. $\min P=\dfrac{7}{3}$.

C. $\min P=\dfrac{17}{3}$.		D. $\min P=\dfrac{115}{3}$.

Câu 26: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3mx^2+6$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 2.

A. $m=2$.	B. $m=\dfrac{31}{27}$.	C. $m>\dfrac{3}{2}$.	D. $m=1$.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y=\dfrac{\cos x+a.\sin x+1}{\cos x+2}$ có giá trị lớn nhất $y=1$?

A. 0.	B. 1.	C. 2.	D. 3.

Câu 28: Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{1}{\log_{(ab)} a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ bằng

A. $\dfrac{4}{9}$.	B. $\dfrac{9}{4}$.	C. $\dfrac{9}{2}$.	D. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 29: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên $D=\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

A. $\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)=1; \min\limits_{x\in D} f\left(x\right)=\dfrac{19}{27}$.

B. $\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}; \min\limits_{x\in D} f\left(x\right)=-3$.

C. $\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)=1; \min\limits_{x\in D} f\left(x\right)=-3$.

D. $\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}; \min\limits_{x\in D} f\left(x\right)=\dfrac{19}{27}$.

Câu 30: Với giá trị nào của tham số thực m thì trên $\left[0;2\right]$ hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4.

A. $m=-8$.	B. $m=-4$.	C. $m=0$.	D. $m=4$.

Câu 31: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}$ là

A. $\begin{cases}\max y=2\\ \min y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.		B. $\begin{cases}\max y=2\\ \min y=1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\max y=1\\ \min y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.		D. $\begin{cases}\max y=2\\ \min y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=-x^3-3mx^2+2$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[0;3\right]$ bằng 2 khi

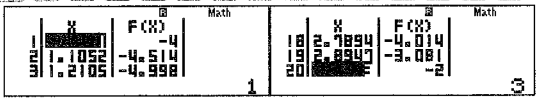
A. $m\ge 0$.	B. $m=-1$.	C. $m>-\dfrac{3}{2}$.	D. $m=\dfrac{31}{27}$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án B.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 1; End 3; Step $\frac{2}{19}$.





Quan sát bảng giá trị ta thấy $F(X)$ lớn nhất có thể đạt được là $f(3)=-2$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y=-2$ khi $x=3$.

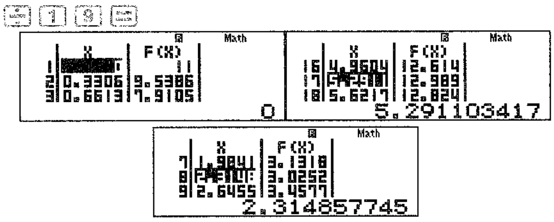
Câu 2: Đáp án D.

Chuyển máy tính về chế độ Rad.



Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2π; Step $\frac{2\pi}{19}$.





Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất hàm số có thể đạt được là $f(5,2911)=12,989\approx 13=M$.

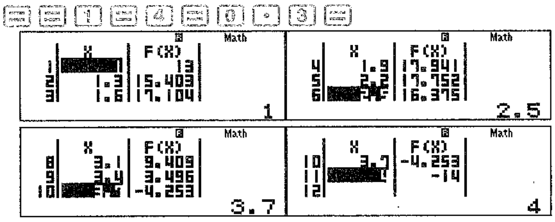
Giá trị nhỏ nhất hàm số có thể đạt được là $f(2,314)=3,0252\approx 3=m$.

Vậy $M+m=16$. Ta chọn D.

Câu 3: Đáp án C.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 1; End 4; Step 0,3.



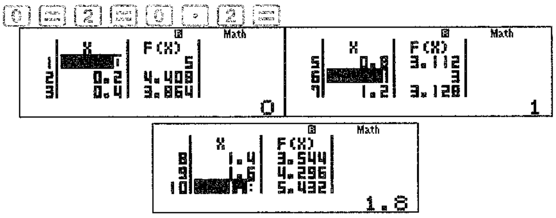


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\min\limits_{[1;4]} y=y(4)=-14$. Ta chọn C.

Câu 4: Đáp án B.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2; Step 0,2.



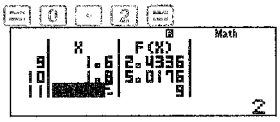


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\min\limits_{[2;4]} y=3$ khi $x=1$.

Câu 5: Đáp án D.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2; Step 0,2.





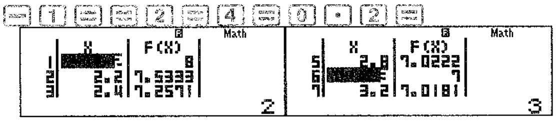
Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=9$ khi $x=2$.

Ta chọn D.

Câu 6: Đáp án B.

Sử dụng máy tính với thiết lập Start 2; End 4; Step 0,2.



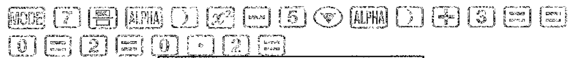


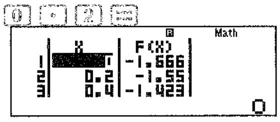
Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là $M=8$ khi $x=2$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là $m=7$ khi $x=3$. Từ đây ta chọn B.

Câu 7: Đáp án A.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2; Step 0,2.



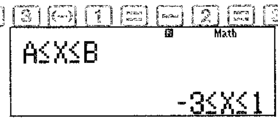


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2-5}{x+3}$ là $-\frac{5}{3}$ khi $x=0$. Ta chọn A.

Câu 8: Đáp án B.

Điều kiện: $-x^2-2x+3\ge 0$.

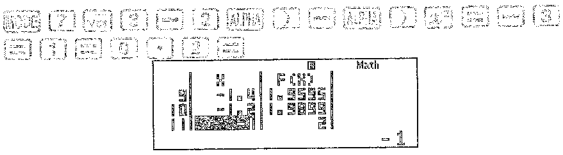




Vậy ta sẽ tìm GTLN của hàm số trên $[-3;1]$.

Chuyển TABLE sang chế độ tính toán với một hàm số

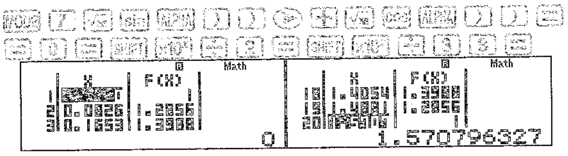
Sử dụng TABLE với thiết lập Start −3; End 1; Step 0,2.



Nhìn vào bảng giá trị kết hợp với các phương án ta kết luận GTLN của hàm số trên $[-3;1]$ là 2 khi $x=-1$. Ta chọn B.

Câu 9: Đáp án B.

Sử dụng máy tính với thiết lập Start 0; End $\frac{\pi}{2}$; Step $\frac{\pi}{38}$.



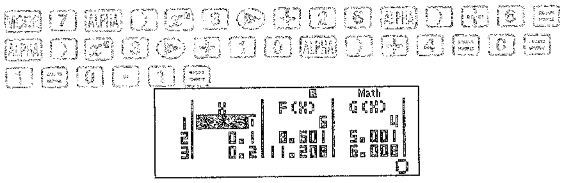
Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y = 1$ khi $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Câu 10: Đáp án D.

Chuyển TABLE sang chế độ tính toán với hai hàm số

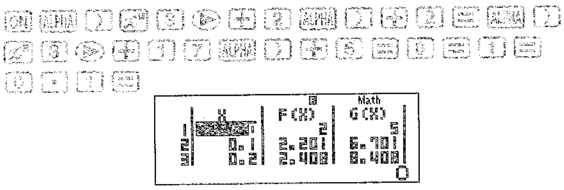
Sử dụng máy tính TABLE với hai hàm số trên $[0;1]$.

Với A và B ta thực hiện ấn



Xem bảng giá trị ta thấy với $m=5; m=3$ không thỏa mãn.

Với C và D ta thực hiện ấn



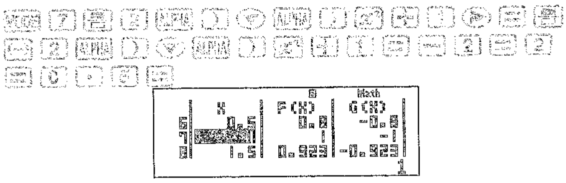
Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $m=4$ thỏa mãn. Từ đây ta chọn D.

Câu 11: Đáp án C.

Chuyển TABLE sang chế độ tính toán với hai hàm số

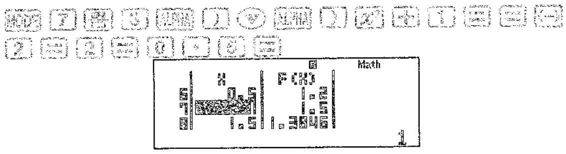
Sử dụng máy tính cầm tay với thiết lập Start -2; End 2; Step 0,5 Với TABLE hai hàm số.

Lần 1: Thử với $m=2; m=-2$.



Ta thấy chỉ có trường hợp $m=2$ thỏa mãn, do vậy ta loại A; D.

Lần 2: Thử với $m=3$.



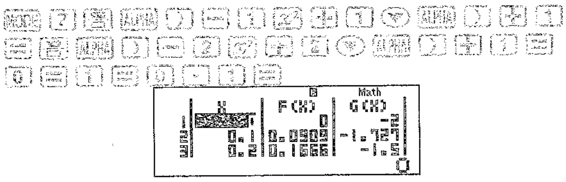
Ta thấy $m=3$ cũng thỏa mãn. Từ đây ta loại B, chọn C.

Câu 12: Đáp án B.

Tương tự các bài trên ta sẽ thử các phương án bằng cách sử dụng TABLE cho hai hàm số.

Chuyển TABLE sang chế độ tính toán với hai hàm số

Lần 1: Thử với A và B.

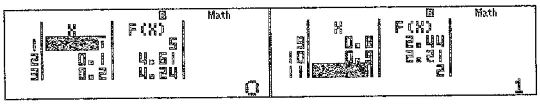


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $G(X)$ thỏa mãn, tức $m=2$ thỏa mãn, từ đây ta chọn B.

Câu 13: Đáp án B.

Đặt $t=\sin^2 x$; $(t\in[0;1])$.

Lúc này bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=t^2-4t+5$ trên đoạn $[0;1]$.

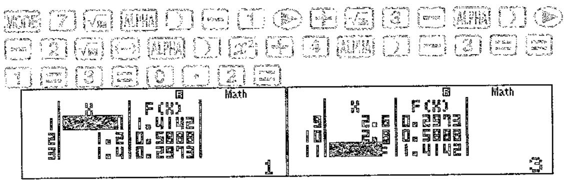


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $M=5$; giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=2$.

Câu 14: Đáp án C.

Điều kiện $1\le x\le 3$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 1; End 3; Step 0,2.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1;3]$ là $\sqrt{2}$.

Câu 15: Đáp án A.

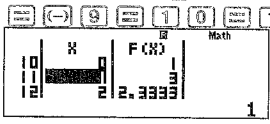
Với $x \neq 0$.

Chia cả tử và mẫu cho x^2 ta được $P = \dfrac{1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}}{1-\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}}$.

Đặt $t = \dfrac{y}{x}, (t \neq 0)$. Lúc này bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start –9; End 10; Step 1.

[▭/▭] [1] [+] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [)] [x²] [▽] [1] [−] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [)] [x²] [=] [=] [(−)] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=] [=]



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của P đã cho là 3 khi $t = 1$.

Tức giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x = y$.

Câu 16: Đáp án B.

Lần 1: Thử A và B.

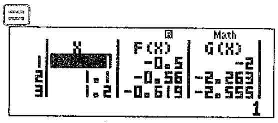
Sử dụng TABLE với thiết lập cho hai hàm số.

Chuyển TABLE sang chế độ tính toán với hai hàm số

[SHIFT] [MODE] [▽] [5] [2]

Start 1; End 2; Step 0,1.

[MODE] [7] [▭/▭] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [ALPHA] [)] [+] [3] [=] [▭/▭] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [ALPHA] [)] [−] [3] [=] [1] [=] [2] [=] [0] [•] [1] [=]



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy với $m = 3$ (tức $G(X)$) thỏa mãn, do vậy ta chọn B.

Câu 17: Đáp án C.

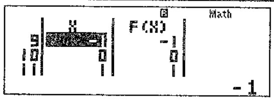
Với $y \neq 0$

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta có $P = \dfrac{2\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x^2}{y^2}+1}$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$. Lúc này bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{2t}{t^2+1}$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start -9; End 10; Step 1.

[MODE] [7] [▭/▭] [2] [ALPHA] [)] [▽] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [=] [=] [−] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]

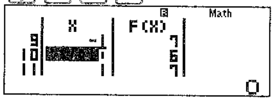


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá tị nhỏ nhất của P là -1 khi $t = -1 \Leftrightarrow x = -y$. Vậy ta chọn C.

Câu 18: Đáp án C.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start -9; End 10; Step 1.

[MODE] [7] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [▷] [+] [3] [ALPHA] [)] [+] [4] [=] [=]

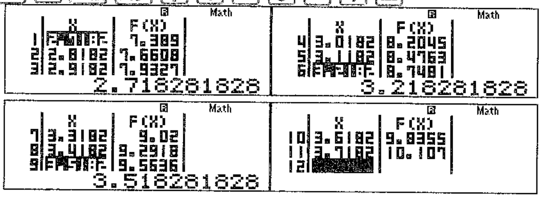


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất mà hàm số đạt được là 6 khi $x = 0$. Vậy ta chọn C.

Câu 19: Đáp án B.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start e; End $e+1$; Step 0,1.

[MODE] [7] [ALPHA] [×10ˣ] [x■] [ln] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [=] [=] [ALPHA] [×10ˣ] [=] [ALPHA] [×10ˣ] [+] [1] [=] [0] [•] [1] [=]



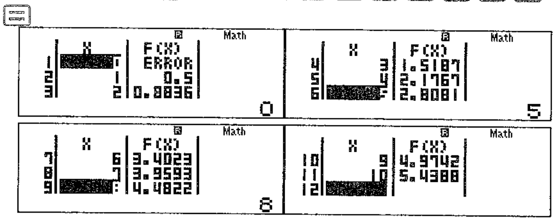
Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị của hàm số tăng dần, vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = e$. Vậy $\min\limits_{[e;e+1]} y = y(e) = e^{\ln e+1} = e^2$. Vậy ta chọn B.

Câu 20: Đáp án C.

Điều kiện $x > 0$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 10; Step 1.

[MODE] [7] [(] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [+] [▭/▭] [1] [▽] [(] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [+] [2] [=] [=] [0] [=] [1] [0] [=] [1] [=]



Nhìn vào bảng giá tị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho đạt được là 0,5 khi $x = 1$.

Câu 21: Đáp án B.

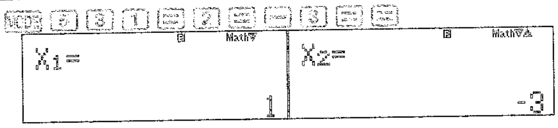
Do bài toán này mỗi phương án đều có hai giá trị của m nên việc thử giá trị là mất nhiều thời gian. Mặt khác hàm số là hàm đa thức nên ta dễ dàng đạo hàm và nhận xét.

Ta có $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[0;2]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y(0) = m^2 + 2m$.

Theo yêu cầu đề bài $m^2 + 2m = 3$.

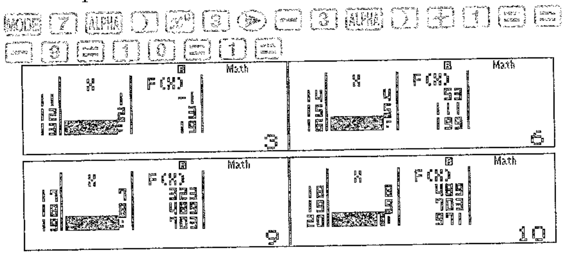


Vậy ta chọn B.

Câu 22: Đáp án A.

Sử dụng TABLE để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Thiết lập Start -9; End 10; Step 1.

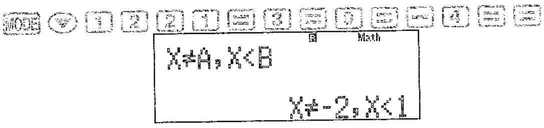


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Trên $D=[m+1;m+2]$, với $m>0$ ta có

$\min\limits_{[m+1;m+2]} y=(m+1)^3-3(m+1)+1$

Để $\min\limits_{[m+1,m+2]} y<3 \Leftrightarrow m^3+3m^2-4<0.$



Kết hợp với điều kiện $m>0$ thì ta có $m\in(0;1)$.

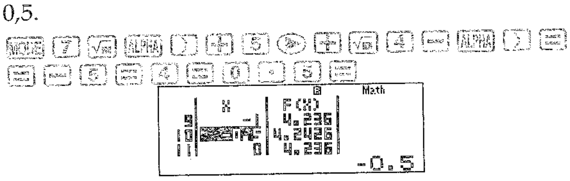
Vậy ta chọn A.

Câu 23: Đáp án B.

Điều kiện $x\in[-5;4]$.Đặt $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-x}$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $m\le\max\limits_{[-5;4]} f(x)$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start –5; End 4; Step 0,5.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \max\limits_{[-5;4]} f(x)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\sqrt{2}$.

Vậy $m\le 3\sqrt{2}$. Ta chọn B.

Câu 24: Đáp án C.

Ta có $(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2$

$\le(1+2)\left((x-1)+(y+1)\right)=3(x+y)$.

$\Rightarrow 0\le x+y\le 3$.

Biết được điều kiện của $x+y$ nên ta sẽ đưa P theo ẩn $x+y$.

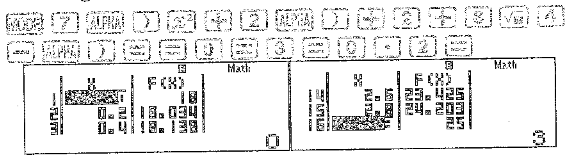
Ta có $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$

$=(x+y)^2+2(x+y)+2+8.\sqrt{4-(x+y)}$.

Đặt $t=x+y$. Điều kiện $0\le t\le 3$.

Lúc này bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 3; Step 0,2.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\min\limits_{[0;3]} P=18\Leftrightarrow t=0$ và

$\max\limits_{[0;3]} P=25\Leftrightarrow t=3$.

$\Rightarrow M+m=18+25=43$. Ta chọn C.

Câu 25: Đáp án B.

Ta có $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$.

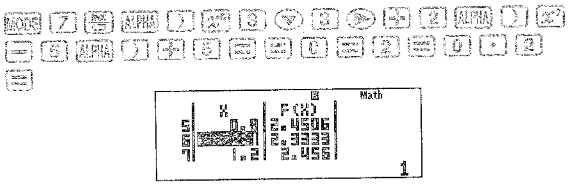
Lúc này $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+(2-x)^2-x+1$.

$\Leftrightarrow P=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của

$\Leftrightarrow P=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$ trên $[0;2]$.

Sử dụng máy tính với thiết lập Start 0 End 2; Step 0,2.

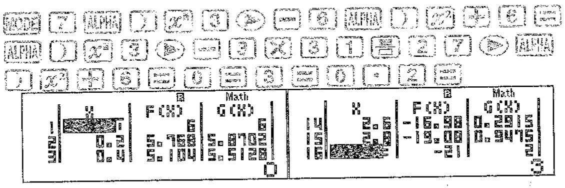


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được là $\dfrac{7}{3}$ khi $x=1$. Ta chọn B.

Câu 26: Đáp án D.

Ta sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 3; Step 0,2.

Lần 1: Thử A và B.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hai hàm số đạt được đều khác 2, do vậy ta loại A và B.

Do A không thỏa mãn, tức $m=2$ không thỏa mãn nên ta loại luôn được C, từ đây ta chọn D.

Câu 27: Đáp án C.

Ta có: $y=\dfrac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2}$

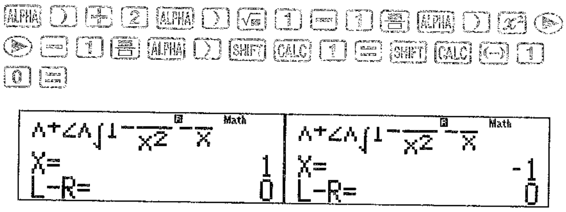
$=\dfrac{(\cos x+2)+a\sin x-1}{\cos x+2}=1+\dfrac{a\sin x-1}{\cos x+2}$

Theo giả thiết: $a\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\dfrac{1}{a}$ (1)

$y'=\dfrac{a+2a\cos x-\sin x}{(\cos x+2)^2}=0\Leftrightarrow a+2a\cos x-\sin x=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$a+2a\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}-\dfrac{1}{a}=0$



Sử dụng máy tính ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt, do vậy ta chọn C.

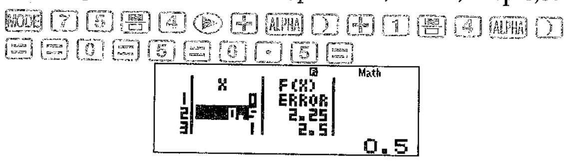
Câu 28: Đáp án B.

$S=\dfrac{1}{\log_{ab}a}+\dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}}b}=\log_a ab+\log_b\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)$

$S=1+\log_a b+\dfrac{1}{4}\log_b a+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}+\log_a b+\dfrac{1}{4\log_a b}.$

Đặt $\log_a b=x;(x>0)$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{5}{4}+x+\dfrac{1}{4x}$.

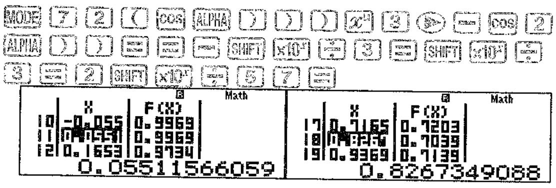
Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 5; Step 0,5.



Ta thấy $S_{\min}=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \log_a b=\dfrac{1}{2}.$

Câu 29: Đáp án A.

Sử dụng máy tính lệnh TABLE với thiết lập Start $-\dfrac{\pi}{3}$; End $\dfrac{\pi}{3}$; Step $\dfrac{2\pi}{57}$.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy giá trị kết hợp với các phương án ta thấy $\max\limits_{x\in D} f(x)=1;\min\limits_{x\in D} f(x)=\dfrac{19}{27}$. Từ đây ta chọn A.

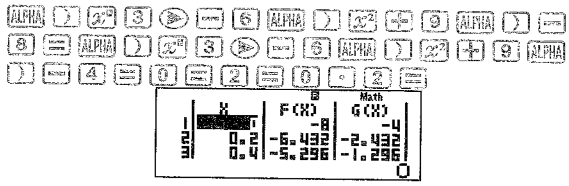
Câu 30: Đáp án B.

Sử dụng TABLE cho hai hàm số với thiết lập Start 0; End 2; Step 0,2.

Lần 1: Thử A và B.

Với $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$ và

$g(x)=x^3-6x^2+9x-4.$

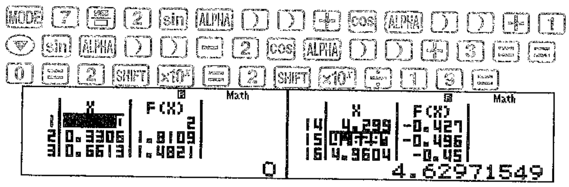


Nhìn vào bảng giá trị ta kết luận trên $[0;2]$ thì $g(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi $x=0$.

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta chọn B.

Câu 31: Đáp án A.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start 0; End 2π; Step $\dfrac{2\pi}{19}$.

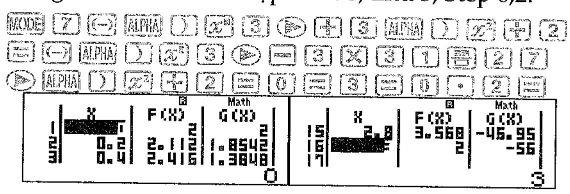


Nhìn vào bảng giá trị ta thấy $\begin{cases}\max y=2\\ \min y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Từ đây ta chọn A.

Câu 32: Đáp án B.

Sử dụng máy tính để thử hai phương án B và D trước.

Dùng TABLE với thiết lập Start 0; End 3; Step 0,2.



Nhìn vào bảng giá trị ta thấy với $m=-1$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài, còn $m=\dfrac{31}{27}$ thì không thỏa mãn, do vậy ta có thể loại A và D.

Ta có thể loại luôn C vì $m=\dfrac{31}{27}>-\dfrac{3}{2}$. Vậy ta chọn B.

V. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

Một số lưu ý về các giới hạn đặc biệt

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$;
* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương);
* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương;
* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$, nếu k là số tự nhiên lẻ;
* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$, nếu k là số tự nhiên chẵn.

NHẬN XÉT
Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

STUDY TIPS
Khi tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta có thể sử dụng tính chất sau

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r}=0, r>0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r}=0, r>0$.

B. Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay giải bài toán tiệm cận.

Kĩ năng sử dụng máy tính cầm tay (MTCT) để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Với bài toán cần tìm giới hạn của hàm số tại vô cực ta sẽ sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị của $f(x)$ tại các giá trị x rất lớn.

1. Để tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình và sử dụng CALC để tính giá trị của hàm số tại $x=10^{10}$.
2. Để tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình và sử dụng CALC để tính giá trị của hàm số tại $x=-10^{10}$.

Đường thẳng $x=x_o$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty.$$

Kỹ năng sử dụng MTCT để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Để tìm giới hạn của hàm số tại một điểm, ta sử dụng máy tính cầm tay như sau:

1. Để tính $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình, sử dụng lệnh CALC và gán $x=a+10^{-9}$.
2. Để tính $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình, sử dụng lệnh CALC và gán $x=a-10^{-9}$.

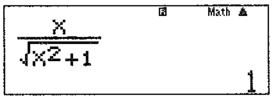
C. Các ví dụ minh họa.

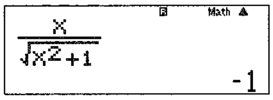
Ví dụ 1: Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.





Nhập vào màn hình $\dfrac{X}{\sqrt{X^2+1}}$ và CALC cho $X=10^{10}$.

[▭/▭] [ALPHA] [)] [▽] [√▭] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [CALC] [1] [0] [$x^{■}$] [1] [0] [)] [=]

Tiếp theo ta CALC cho $X=-10^{10}$.

[CALC] [(−)] [1] [0] [$x^{■}$] [1] [0] [)] [=]

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=1$.

2. Giải toán thông thường.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1.$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=1$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là

A. $x=-2$. B. $x=2;x=-2$. C. $x=2$. D. $x=4$.

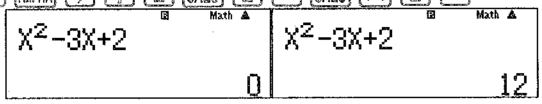
Lời giải

Ta thấy đây là hàm phân thức bậc hai trên bậc hai, nên ta sẽ giải phương trình mẫu thức bằng 0 và kiểm tra xem nghiệm đó có phải nghiệm của phương trình tử thức bằng 0 hay không.

Ta có $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2.$

Kiểm tra: Nhập vào màn hình tử thức và sử dụng CALC.

[ALPHA] [)] [x^2] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [CALC] [2] [=] [CALC] [(−)] [2] [=]



Nhìn vào kết quả ta thấy ta loại $x=2$ do là nghiệm của phương trình tử thức bằng 0.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Nếu c là một số thực thỏa mãn $q(c)=0$ và $p(c)\neq 0$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ có đường tiệm cận đứng $x=c$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

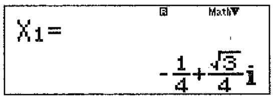
Lời giải

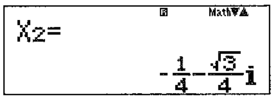
1. Tìm tiệm cận đứng.

Giải phương trình mẫu thức bằng 0.

$\sqrt{4x^2+2x+1}=0\Leftrightarrow 4x^2+2x+1=0.$

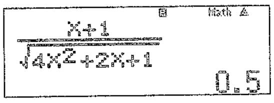
[MODE] [5] [3] [4] [=] [2] [=] [1] [=] [=]





Phương trình không có nghiệm thực, do vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

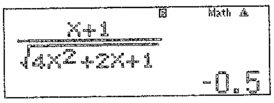
2. Tìm tiệm cận ngang.



Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

[■/□] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√■] [4] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Giữ nguyên màn hình trên và tiếp tục ấn [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận, chọn B.

STUDY TIPS
Để giải bài toán tiệm cận ta cần sử dụng nhiều kỹ thuật tính giới hạn của hàm số, do vậy ta cần đọc kĩ phần giới hạn hàm số trước khi đọc bài này.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây là **đúng?**

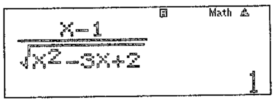
A. Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

B. Đồ thị (C) có đúng một đường tiệm cận ngang $y=1$.

C. Đồ thị (C) có đúng một đường tiệm cận ngang $y=-1$.

D. Đồ thị (C) không có đường tiệm cận ngang.

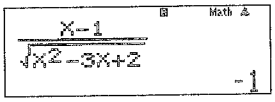
Lời giải



Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

[■/□] [ALPHA] [)] [−] [1] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

$\Rightarrow y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).



Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

Giữ nguyên màn hình phía trên và tiếp tục ấn [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [1] [0] [=]

Vậy đồ thị (C) có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Đáp án A.

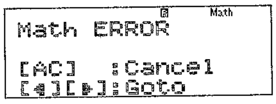
Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá tị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m<0$. B. không có m thỏa mãn. C. $m=0$. D. $m>0$.

Lời giải

Với bài toán này ta sẽ sử dụng cách thử phương án.

Với A: Ta chọn $m=-1$.



Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2+1}}$.

[■/□] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√■] [(−)] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+1}}$ không tồn tại $\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+1}}$ không thể có hai đường tiệm cận ngang. Vậy loại A.

Với C: Với $m=0$ thì hàm số trở thành $y=x+1$. Do đây là hàm đa thức nên ta không cần thử tìm tiệm cận, do đồ thị hàm đa thức không có tiệm cận.

Với D: Ta chọn $m=1$.

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

[▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [√] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [=]

Màn hình: $\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}$ → 1

$\Rightarrow y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

[CALC] [(-)] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

Màn hình: $\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}$ → -0.9999999999

$\Rightarrow y=-1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Từ kết quả thử D ta cũng loại luôn được B. Do vậy ta chọn D.

Đáp án D.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\frac{mx^2+2x-3}{nx^2+2mx-2}$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2; y=2$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì giá trị của biểu thức $9m^2+6mn+36n^2$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{14}{3}$. C. $\frac{21}{6}$. D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow\begin{cases}4n+4m-2=0\\4m+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2n+2m=1\ (*)\\m\neq-\frac{1}{4}\end{cases}$

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=2$ làm đường tiệm cận ngang $\Rightarrow\frac{m}{n}=2$ $\Leftrightarrow m=2n.$

Thay $m=2n$ vào $(*)$ và SOLVE giải phương trình

[ON] [2] [ALPHA] [)] [+] [4] [ALPHA] [)] [−] [1] [SHIFT] [CALC] [1] [=]

Màn hình: 2X+4X-1 ; X= 0.1666666667 ; L-R= 0

$\Rightarrow n=\frac{1}{6}\Rightarrow m=\frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Nhập vào màn hình $9X^2+6XY+36Y^2$ và CALC $\left(\frac{1}{3}\to X;\frac{1}{6}\to Y\right)$.

[9] [ALPHA] [)] [x²] [+] [6] [ALPHA] [)] [ALPHA] [S⇔D] [+] [3] [6] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [CALC] [1] [▭/▭] [3] [=] [1] [▭/▭] [6] [=]

Màn hình: $9X^2+6XY+36Y^2$ → $\frac{7}{3}$

Đáp án A.

STUDY TIPS

Đặt $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm phân thức, trong đó $p(x);q(x)$ là các hàm đa thức.

Nếu bậc của tử thức $p(x)$ bằng bậc của mẫu thức $q(x)$ thì $y=\frac{a}{b}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ trong đó $a;b$ lần lượt là hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của $p(x);q(x)$.

Ví dụ 7: Biết đồ thị hàm số $y=\frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận thì $m+n$ bằng

A. 6. B. –6. C. 8. D. 9.

STUDY TIPS

Đặt $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm phân thức, trong đó $p(x);q(x)$ là các hàm đa thức.

Nếu bậc của tử thức $p(x)$ nhỏ hơn bậc của mẫu thức $q(x)$ thì $y=0$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Lời giải

Từ STUDY TIP bên cạnh ta có để đồ thị hàm số $y=\frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang thì $2m-n=0$.

Để đồ thị hàm số nhận trục tung làm đường tiệm cận ngang thì $x=0$ là nghiệm của phương trình mẫu thức bằng 0 và không là nghiệm của phương trình tử thức.

$$\Rightarrow \begin{cases} m.0+1\neq 0 \\ n-6=0 \end{cases}$$

Kết hợp ta có $\begin{cases} n=6 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow m+n=9.$

Đáp án D.

Ví dụ 8: Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có đường tiệm cận đứng.

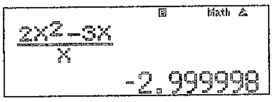
A. $m=0$. B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$. C. $m>-1$. D. $m>1$.

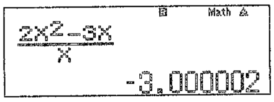
Lời giải

$m=0\Rightarrow y=\frac{2x^2-3x}{x}$.

Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^2-3x}{x}$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^2-3x}{x}$

[□/□] [2] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [0] [+] [1] [0] [x^■] [−] [9] [)] [=]
[CALC] [0] [−] [1] [0] [x^■] [−] [9] [)] [=]

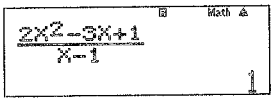


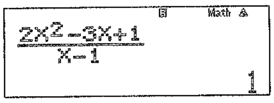


Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, vậy $m=0$ thỏa mãn, ta loại D.

Ta tiếp tục thử $m=1$ xem có thỏa mãn hay không, tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$.

[□/□] [2] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [(−)] [1] [CALC] [1] [+] [1] [0] [x^■]
[−] [9] [=] [CALC] [1] [−] [1] [0] [x^■] [−] [9] [=]



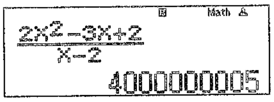


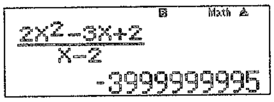
Từ kết quả trên màn hình ta thấy với $m=1$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng, vậy $m=1$ thỏa mãn.

Lúc này ta loại được A và D, chỉ còn B và C. Ta tiếp tục thử với một giá trị $m=2$.

Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x^2-3x+2}{x-2}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x^2-3x+2}{x-2}$.

[□/□] [2] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [ALPHA] [)] [−] [2] [CALC] [2] [+] [1] [0] [x^■]
[(−)] [9] [=] [CALC] [2] [−] [1] [0] [x^■] [(−)] [9] [=]





Ta thấy $x=2$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, vậy ta loại C, chọn B.

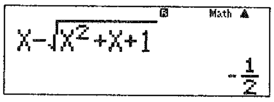
Đáp án B.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+x+1}$ có đường tiệm cận ngang.

A. $m=-1$. B. $m<0$. C. $m>0$. D. $m=\pm 1$.

Lời giải

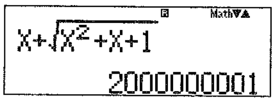
1. Với $m=-1$ thì hàm số trở thành $y=x-\sqrt{x^2+x+1}$

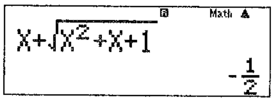


Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

[ALPHA] [)] [−] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [=]

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=x-\sqrt{x^2+x+1}$. Vậy $m=-1$ thỏa mãn.





2. Với $m=1$ thì hàm số trở thành $y=x+\sqrt{x^2+x+1}$

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

[ALPHA] [)] [+] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [=] [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [9] [)] [=]

$\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{x^2+x+1}$. Vậy $m=1$ thỏa mãn, ta loại được A; B; C. Chọn D.

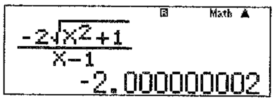
Đáp án D.

Ví dụ 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{m\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có đường thẳng $y=-2$ là một đường tiệm cận ngang.

A. $m\in\{-2;2\}$. B. $m\in\{1;2\}$. C. $m\in\{1;-2\}$. D. $m\in\{-1;1\}$.

Lời giải

Với $m=-2$ thì hàm số trở thành $y=\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

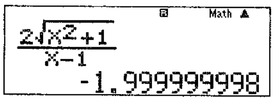


Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

[■/■] [(−)] [2] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [=]

Từ kết quả hiện trên màn hình $\Rightarrow y=-2$ là một đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ $\Rightarrow m=-2$ thỏa mãn.

Với $m=2$ thì hàm số trở thành $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$



Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Giữ nguyên màn hình phía trên và tiếp tục ấn

[◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [◄] [DEL] [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [9] [=]

$\Rightarrow y=-2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Từ hai kết quả vừa tìm được thì ta chọn A.

Đáp án A.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 2: Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$.

B. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$.

C. $y=\dfrac{3}{x-2}+1$.

D. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 5: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-3x+2)\sin x}{x^3-4x}$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2}$ là

A. $x=-2$.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

C. $x=-1; x=-2$.

D. $x=-1$.

Câu 7: Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=2x-1+\sqrt{4x^2-4}$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 8: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2}$ là

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 9: Trong các đồ thị hàm số sau, có bao nhiêu đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

(I) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ (II) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$

(III) $y=x^2+1$ (IV) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10: Đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận ngang?

A. $y=x^2-x+3$. B. $y=\dfrac{x^2+2}{x-10}$.

C. $y=x^3-2x^2+3$. D. $y=\dfrac{x-10}{x^2+2}$.

Câu 11: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng?

A. 9. B. 8. C. 11. D. 10.

Câu 12: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{x^2-x-6}}{x^2-1}$.

A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 13: Tìm số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x-2}$.

A. 2. B. 3.

C. 1. D. 0.

Câu 14: Tính khoảng cách d giữa hai đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$.

A. $d=2$. B. $d=1$.

C. $d=3$. D. $d=4$.

Câu 15: Tính khoảng cách d giữa hai đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\dfrac{x-5}{\sqrt{4x^2+x+7}}$.

A. $d=2$. B. $d=1$.

C. $d=3$. D. $d=4$.

Câu 16: Đường phân giác góc phần tư thứ nhất cắt các tiệm cận ngang của đường cong $y=\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-x+1}}$ tại các điểm M, N. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN=2\sqrt{2}$. B. $MN=3$.

C. $MN=5$. D. $MN=6$.

Câu 17: Gọi m, n, p lần lượt là số đường tiệm cận của các đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}; y=\dfrac{2x-3}{x+1}; y=\dfrac{11}{4x^2+x-2}$. Bất đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

A. $m>n>p$.

B. $n>p>m$.

C. $m>p>n$.

D. $p>n>m$.

Câu 18: Gọi m, n, p lần lượt là số đường tiệm cận của các đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}; y=\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}$; $y=\frac{\sqrt{x^2-6x+10}}{x+1}$. Tính giá trị của biểu thức $Q=mnp$.

A. $Q=12$. B. $Q=8$.

C. $Q=2$. D. $Q=4$.

Câu 19: Đồ thị hàm số nào sau đây không tồn tại đường tiệm cận đứng?

A. $y=\frac{x^2+7}{(x+6)^2}$.

B. $y=\frac{2-x}{x^2}$.

C. $y=\frac{x^3+x^2+x+1}{x}$.

D. $y=\frac{1+3x}{x^2+2x+1}$.

Câu 20: Đường cong $y=\frac{x+\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1 tiệm cận.

B. 2 tiệm cận.

C. 3 tiệm cận.

D. 4 tiệm cận.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=3$. Các đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\frac{x+\sqrt{9x^2-1}}{x+2}$ và đường tròn (C) có bao nhiêu điểm chung?

A. 1 điểm chung.

B. 2 điểm chung.

C. 3 điểm chung.

D. 4 điểm chung.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=4$. Các đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\frac{2x+\sqrt{4x^2-x+5}}{x+2}$ và đường tròn (C) có bao nhiêu điểm chung?

A. 1 điểm chung. B. 3 điểm chung.

C. 2 điểm chung. D. 4 điểm chung.

Câu 23: Giả sử d là đường tiệm cận ngang phía dưới của đường cong $y=\frac{\sqrt{x^2+x+9}}{x+2}$. Tồn tại bao nhiêu điểm A thuộc d sao cho $AO=\sqrt[3]{3}$.

A. 1 điểm. B. 2 điểm.

C. 3 điểm. D. 4 điểm.

Câu 24: Giả sử d là tiệm cận ngang nằm phía trên trục hoành của đường cong $(C): y=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-1}$; I là giao điểm giữa d và tiệm cận đứng của (C). Tính độ dài đoạn thẳng OI.

A. $OI=\sqrt{2}$. B. $OI=1$.

C. $OI=\sqrt{5}$. D. $OI=4$.

Câu 25: Tìm tổng số giao điểm của đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{2}$ và các đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-\sqrt{2}}$.

A. 1 giao điểm B. 2 giao điểm.

C. 3 giao điểm. D. 4 giao điểm.

Câu 26: Kí hiệu m và n lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\frac{x\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{x^2-1}$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $m>n$. B. $m<n$.

C. $m+n=7$. D. $m+n=6$.

Câu 27: Tìm số lượng đường tiệm cận đứng của đường cong $y=\frac{x-\sqrt{2x-1}}{(4x-5)(x-1)^2}$.

A. 1 tiệm cận đứng. B. 2 tiệm cận đứng.

C. 3 tiệm cận đứng. D. 4 tiệm cận đứng.

Câu 28: Cho đường cong $y=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-6}$. Tìm mệnh đề **đúng**?

A. Đường cong không có đường tiệm cận đứng.

B. Đường cong có hai đường tiệm cận đứng và không có đường tiệm cận ngang.

C. Đường còn có hai đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

D. Đường cong có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

Câu 29: Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. $y=\sqrt{x^2-x+1}$. B. $y=\frac{x-1}{2x+5}$.

C. $y=\frac{2-x}{x^2+2x-3}$. D. $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2-6x+8}$.

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}$ có đồ thị (C). Gọi m là số đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) và n là giá trị của hàm số tại $x=1$. Lúc này $m.n$ bằng

A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{14}{5}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án D.

1. Sử dụng máy tính cầm tay ta có.

a. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

[⊟] [1] [▽] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [ALPHA] [)] [▷] [−] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [=]

$$\frac{1}{\sqrt{X^2-4X}-\sqrt{X^2-3X}} \qquad -2$$

$\Rightarrow y=-2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)$.

b. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

[CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [9] [)] [=]

$$\frac{1}{\sqrt{X^2-4X}-\sqrt{X^2-3X}} \qquad 2$$

$\Rightarrow y=2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x.)$

Từ đây ta kết luận đồ thị hàm số đã cho có tất cả hai đường tiệm cận ngang. Ta chọn D.

2. Giải toán thông thường.

Trên tập xác đinh ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1}=-2$$

$\to y=-2$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1}=2$$

$\to y=2$ là tiệm cận ngang.

Câu 2: Đáp án A.

1. Sử dụng máy tính.

Với A:

[⊟] [√■] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▷] [+] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [7] [▽] [2] [ALPHA] [)] [−] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [9] [=] [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [9] [=]

$$\frac{\sqrt{X^4+3X^2+7}}{2X-1} \quad 500000000.3 \qquad \frac{\sqrt{X^4+3X^2+7}}{2X-1} \quad -499999999.8$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=-\infty.$$

Từ kết quả hiện trên màn hình ta thấy đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$ không có đường tiệm cận ngang.

Từ đây ta chọn luôn A.

2. Suy luận.

Ta thấy C và D là hai hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên luôn có đường tiệm cận ngang.

Với B thì là hàm phân thức có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên luôn có đường tiệm cận ngang $y=0$. Từ đây ta cũng loại B, chọn A.

Câu 3: Đáp án C.

1. Tiệm cận ngang.

[⊟] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [=] [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [1] [0]

$$\frac{X+1}{X^2-4} \quad 1\times10^{-10} \qquad \frac{X+1}{X^2-4} \quad -9.999999999\times10^{-11}$$

Từ đây ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2-4}=0$. Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

2. Tiệm cận đứng.

[CALC] [2] [+] [1] [0] [x■] [(−)] [1] [0] [)] [=] [CALC] [2] [−] [1] [0] [x■] [(−)] [1] [0] [=]

$$\frac{X+1}{X^2-4} \quad 7500000000 \qquad \frac{X+1}{X^2-4} \quad -7500000000$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+1}{x^2-4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+1}{x^2-4}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=2 \text{ là một đường tiệm cận}$$

đứng của đồ thị hàm số.

[CALC] [−] [2] [+] [1] [0] [x■] [(−)] [1] [0] [)] [=] [CALC] [(−)] [2] [−] [1] [0] [x■] [(−)] [1] [0] [)] [=]

$$\frac{X+1}{X^2-4} \quad 2500000000 \qquad \frac{X+1}{X^2-4} \quad -2500000000$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x+1}{x^2-4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x+1}{x^2-4}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-2 \text{ là một đường tiệm cận}$$

đứng của đồ thị hàm số.

Từ các kết quả đã tìm được ta kết luận đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Câu 4: Đáp án B.

1. Tiệm cận ngang.

[⊟] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [▽] [ALPHA] [)] [−] [1] [CALC] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=] [CALC] [(−)] [1] [0] [x■] [1] [0] [)] [=]

$$\frac{\sqrt{X^2-4}}{X-1} \quad 1 \qquad \frac{\sqrt{X^2-4}}{X-1} \quad -0.9999999999$$

$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.

CALC 1 + 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

Math ERROR
[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Từ đây ta chọn B.

Câu 5: Đáp án A.

⊟ (ALPHA) x^2 − 3 ALPHA) + 2) sin ALPHA)) ▽ ALPHA) $x^{■}$ 3 ▷ − 4 ALPHA) CALC 0 + 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) = CALC 0 − 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

(X²−3X+2)sin(X) / X³−4X -0.4999999999 | (X²−3X+2)sin(X) / X³−4X -0.5000000001

$\Rightarrow x=0$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

CALC 2 + 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) = CALC 2 − 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

(X²−3X+2)sin(X) / X³−4X 0.1136621783 | (X²−3X+2)sin(X) / X³−4X 0.1136621784

$\Rightarrow x=2$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

CALC (−) 2 + 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) = CALC (−) 2 − 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

(X²−3X+2)sin(X) / X³−4X -1.36394614×10¹⁰ | (X²−3X+2)sin(X) / X³−4X 1.36394614×10¹⁰

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sin x}{x^3-4x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sin x}{x^3-4x} = +\infty \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ $x=-2$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Từ các kết quả trên ta chọn A.

Câu 6: Đáp án A.

Giải phương trình $x^2+3x+2=0$.

MODE 5 3 1 = 3 = 2 = =

X₁= -1 | X₂= -2

Với $x=-1$.

⊟ ALPHA) $x^{■}$ 3 ▷ − 3 ALPHA) − 2 ▽ ALPHA) x^2 + 3 ALPHA) + 2 CALC − 1 − 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) = CALC (−) 1 + 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

X³−3X−2 / X²+3X+2 0 | X³−3X−2 / X²+3X+2 0

Ta thấy $x=-1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Với $x=-2$.

CALC (−) 2 + 1 0 $x^{■}$ − 1 0) = CALC (−) 2 − 1 0 $x^{■}$ − 1 0) =

X³−3X−2 / X²+3X+2 3.999999999×10¹⁰ | X³−3X−2 / X²+3X+2 -4.000000001×10¹⁰

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=-2 \text{ là một đường}$$

tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Ta chọn A.

Câu 7: Đáp án B.

Sử dụng máy tính ta ấn

2 ALPHA) − 1 + √■ 4 ALPHA) x^2 − 4 CALC 1 0 $x^{■}$ 1 0 = CALC (−) 1 0 $x^{■}$ 1 0 =

2X−1+√(4X²−4) 4×10¹⁰ | 2X−1+√(4X²−4) -1

Từ kết quả trên màn hình ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} = -1 \Rightarrow y=-1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=2x-1+\sqrt{4x^2-4}$. Từ đây ta chọn B.

Câu 8: Đáp án D.

1. Tiệm cận ngang.

⊟ √■ 4 ALPHA) x^2 + ALPHA) + 1 ▽ ALPHA) − 2 CALC 1 0 $x^{■}$ 1 0) = CALC (−) 1 0 $x^{■}$ 1 0) =

√(4X²+X+1) / X−2 2 | √(4X²+X+1) / X−2 -2

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} = -2 \end{cases} \Rightarrow y=2; y=-2 \text{ là hai}$$

đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Tiếp tục giữ nguyên màn hình và thực hiện ấn

CALC 2 + 1 0 $x^{■}$ − 1 0) = CALC 2 − 1 0 $x^{■}$ (−) 1 0) =

√(4X²+X+1) / X−2 4.358898944×10¹⁰ | √(4X²+X+1) / X−2 -4.358898943×10¹⁰

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ là một đường}$$

tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy từ đây là kết luận đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Từ đây ta chọn D.

Câu 9: Đáp án C.

Với (I):

1. Tiệm cận ngang.

⊟ ALPHA) + 1 ▽ √■ ALPHA) x^2 + 1 CALC 1 0 $x^{■}$ 1 0) = CALC (−) 1 0 $x^{■}$ 1 0) =

$\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}$　1 | $\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}$　-0.9999999999

$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \end{cases} \Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.

Do phương trình mẫu thức bằng 0 vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận, chọn (I).

Với (II): Do đồ thị hàm số là hàm phân thức có bậc tử bằng bậc mẫu nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận là $x=2$ và $y=1$. Từ đây ta chọn (II).

Với (III): Do hàm số là hàm đa thức nên đồ thị hàm số không có tiệm cận, ta loại (III).

Với (IV):

1. Tiệm cận ngang.

$\frac{1}{X^3+1}$　1×10^{-30} | $\frac{1}{X^3+1}$　-1×10^{-30}

$\Rightarrow y=0$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.

$\frac{1}{X^3+1}$　-3333333333 | $\frac{1}{X^3+1}$　3333333333

$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x^3+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x^3+1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Vậy ta chọn (IV).

Từ các kết quả trên ta chọn C.

Câu 10: Đáp án D.

Ta loại A và C do đây là hai hàm đa thức nên đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với B:

$\frac{X^2+2}{X-10}$　1.000000001×10^{10} | $\frac{X^2+2}{X-10}$　-9999999990

Nhìn vào kết quả ta thấy đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang, do vậy ta loại B. Từ đây ta chọn D.

Câu 11: Đáp án D.

Giải phương trình $x^2-3x+2=0$.

X1= 2 | X2= 1

Để đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận đứng thì có hai trường hợp xảy ra.

TH1: Phương trình $x^2-mx-m+5=0$ có hai nghiệm $x_1=2; x_2=1$.

TH2: Phương trình $x^2-mx-m+5=0$ vô nghiệm.

Ta có

TH1: Thay $x=2$ vào ta có

$2^2-2m-m+5=0 \Leftrightarrow m=3$ thỏa mãn.

TH2: $\Delta=(-m)^2-4.(-m+5)<0$

A<X<B
$-2-2\sqrt{6}<X<-2+2\sqrt{6}$

$\Rightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$. Do m là số nguyên nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Kết hợp với trường hợp 1 suy ra có 10 giá trị m nguyên thỏa mãn. Ta chọn D.

Câu 12: Đáp án A.

1. Tiệm cận ngang.

$\frac{2X-\sqrt{X^2-X-6}}{X^2-1}$　1×10^{-10} | $\frac{2X-\sqrt{X^2-X-6}}{X^2-1}$　-3×10^{-10}

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

2. Tiệm cận đứng.

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Math ERROR
[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Từ đây ta chọn A.

Câu 13: Đáp án B.

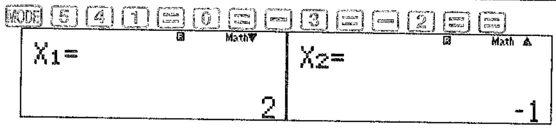
1. Tiệm cận ngang.

$\frac{X+1}{X^3-3X-2}$　1×10^{-20} | $\frac{X+1}{X^3-3X-2}$　$9.999999999\times10^{-21}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

2. Tiệm cận đứng.

Giải phương trình $x^3-3x-2=0$.



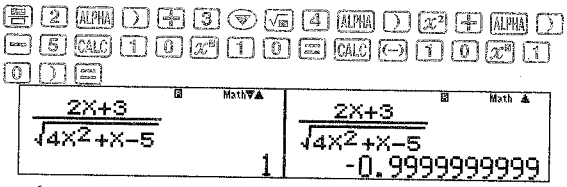
$\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{x^3-3x-2}=\dfrac{1}{x^2-x-2}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số vẫn có hai đường tiệm cận đứng $x=-1; x=2$.

Vậy ta chọn B.

Câu 14: Đáp án A.

Tìm tiệm cận ngang.

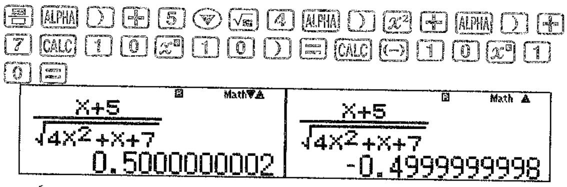


$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}=-1\end{cases}$$

$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đường cong $y=\dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$.

$\Rightarrow d=2$. Ta chọn A.

Câu 15: Đáp án B.

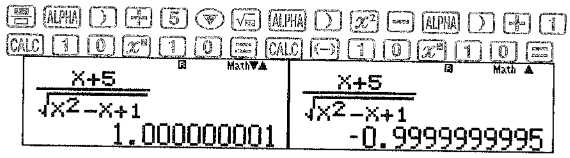


$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2+x+7}}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2+x+7}}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}; y=-\dfrac{1}{2}$$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$\Rightarrow d=1$. Ta chọn B.

Câu 16: Đáp án A.

1. Tìm tiệm cận ngang.



$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

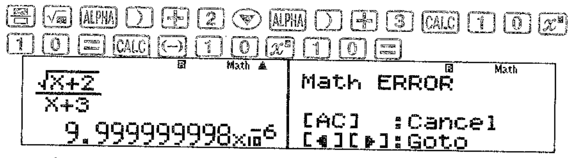
2. Tìm giao điểm.

Phương trình phân giác góc phần tư thứ nhất là $y=x$. Vậy hai điểm $M; N$ lần lượt có tọa độ $M(1;1), N(-1;-1)\Rightarrow MN=2\sqrt{2}$. Ta chọn A.

Câu 17: Đáp án D.

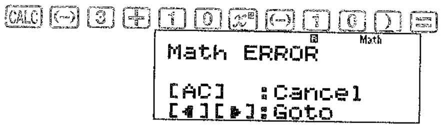
1. Xét hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

a. Tiệm cận ngang.



$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

b. Tiệm cận đứng.



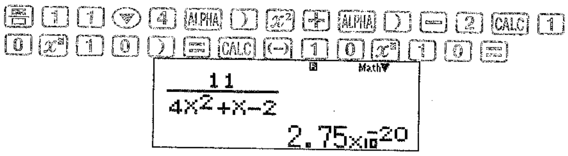
$\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Từ hai kết quả trên $\Rightarrow m=1$.

2. Xét hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn có hai đường tiệm cận $\Rightarrow n=2$.

3. Xét hàm số $y=\dfrac{11}{4x^2+x-2}$.

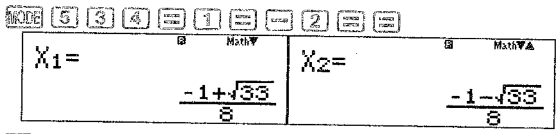
a. Tiệm cận ngang.

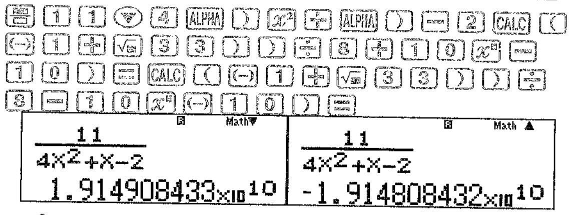


$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

b. Tiệm cận đứng.

Giải phương trình $4x^2+x-2=0$.





$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)^+}\dfrac{11}{4x^2+x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)^-}\dfrac{11}{4x^2+x-2}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự ta cũng suy ra $x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận $\Rightarrow p=3$.

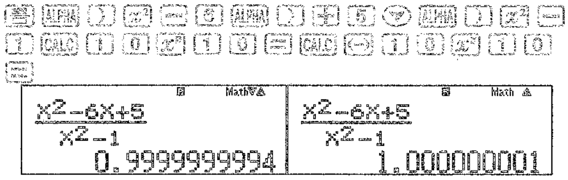
$\Rightarrow p > n > m$. Ta chọn D.

Câu 18: Đáp án A.

1. Xét đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là đồ thị của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên luôn có hai đường tiệm cận $\Rightarrow m=2$.

2. Xét đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}$.

a. Tiệm cận ngang.



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}=1; \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}=1$.

$\Rightarrow y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

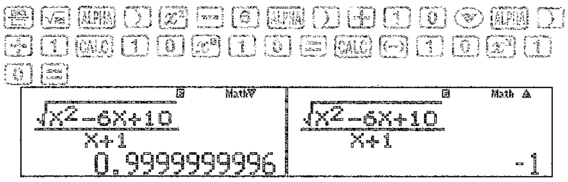
b. Tiệm cận đứng.

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1$. Mà $x=1$ là nghiệm của phương trình $x^2-6x+5=0$, do vậy đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Từ đây suy ra $n=2$.

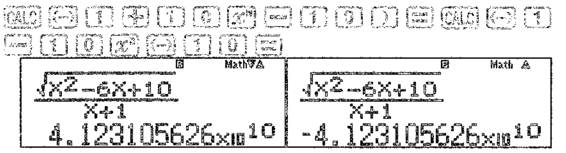
3. Xét hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+10}}{x+1}$.

a. Tiệm cận ngang.



$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+10}}{x+1}$.

b. Tiệm cận đứng.

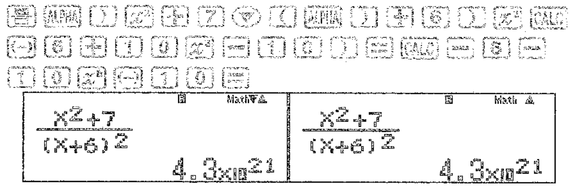


$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+10}}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+10}}{x+1}=-\infty\end{cases} \Rightarrow x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow p=3$.

$\Rightarrow Q=mnp=2.2.3=12$.

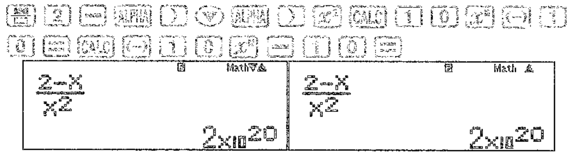
Câu 19: Đáp án D.

1. Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+7}{(x+6)^2}$.



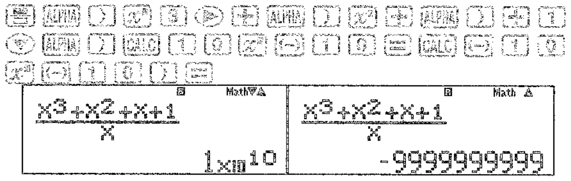
$\Rightarrow x=-6$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, ta loại A.

2. Xét hàm số $y=\dfrac{2-x}{x^2}$.



$\Rightarrow x=0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

3. Xét hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x}$.

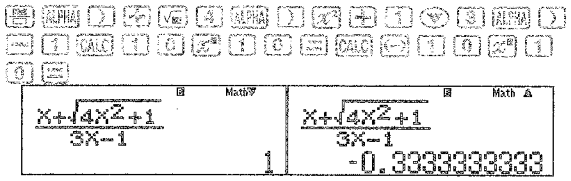


$\Rightarrow x=0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Từ đây ta chọn D.

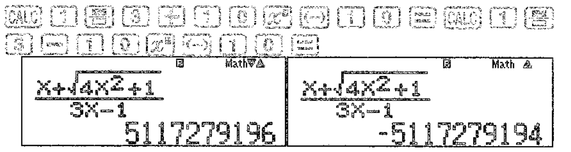
Câu 20: Đáp án C.

1. Tiệm cận ngang.



$\Rightarrow y=1; y=-\dfrac{1}{3}$ là hai đường tiệm cậng ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.



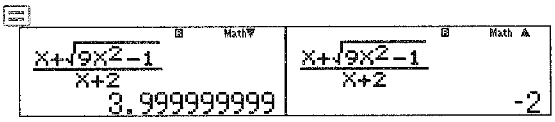
$\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận, ta chọn C.

Câu 21: Đáp án B.

Tìm các đường tiệm cận ngang.

MODE ALPHA) + √ 9 ALPHA) x² − 1 ▽ ALPHA) + 2 CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



$\Rightarrow y=4; y=-2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $(C): x^2+y^2=9.$

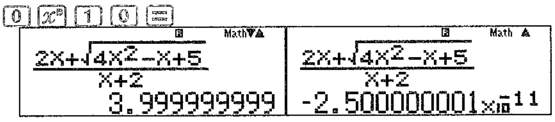
Đường tiệm cận $y=4$ cắt đường tròn (C) tại 0 điểm.

Đường tiệm cận $y=-2$ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm, vậy ta chọn B.

Câu 22: Đáp án B.

Tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

MODE 2 ALPHA) + √ 4 ALPHA) x² − ALPHA) + 5 ▽ ALPHA) + 2 CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



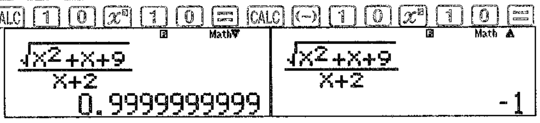
$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=4$ và $y=0.$

$\Rightarrow$ đường tròn (C) có một điểm chung với đường tiệm cận ngang $y=4$ và hai điểm chung với đường tiệm cận ngang $y=0.$ Do vậy ta chọn B.

Câu 23: Đáp án B.

Tìm đường tiệm cận ngang.

MODE √ ALPHA) x² + ALPHA) + 9 ▽ ALPHA) + 2 CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow d: y=-1.$

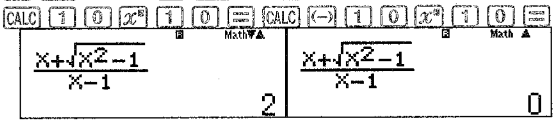
$A\in d\Rightarrow A(x;-1).$ Mà $AO=\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1^2}=\sqrt[3]{3}.$

$\Rightarrow$ có hai điểm A thỏa mãn. Ta chọn B.

Câu 24: Đáp án C.

1. Tìm tiệm cận ngang.

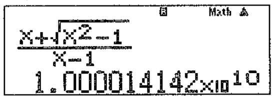
MODE ALPHA) + √ ALPHA) x² − 1 ▽ ALPHA) − 1 CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



$\Rightarrow d: y=2.$

2. Tìm tiệm cận đứng.

CALC 1 + 1 0 x■ − 1 0 =



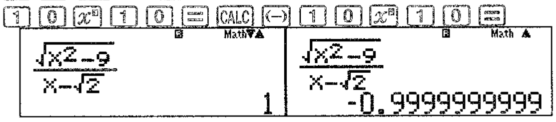
$\Rightarrow x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\Rightarrow I(1;2)\Rightarrow OI=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$

Câu 25: Đáp án D.

Tìm đường tiệm cận ngang.

MODE √ ALPHA) x² − 9 ▽ ALPHA) − √ 2 ▷ CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



$\Rightarrow y=1; y=-1$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

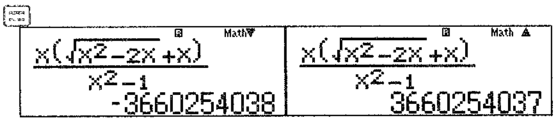
Ta thấy $R>1$ nên hai đường tiệm cận ngang cắt đường tròn (C) tại 4 giao điểm (mỗi đường tiệm cận cắt đường tròn (C) tại 2 giao điểm).

Ta chọn D.

Câu 26: Đáp án B.

1. Tiệm cận đứng.

MODE ALPHA) (√ ALPHA) x² − 2 ALPHA) ▷ + ALPHA)) ▽ ALPHA) x² − 1 CALC (−) 1 − 1 0 x■ − 1 0 = CALC (−) 1 + 1 0 x■ − 1 0 =

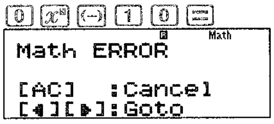


$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{x^2-1}=-\infty;\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{x^2-1}=+\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

CALC 1 + 1 0 x■ − 1 0 =

CALC 1 − 1 0 x■ − 1 0 =

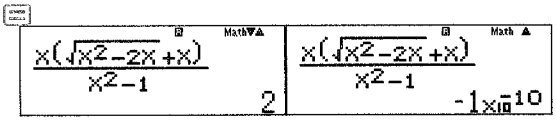


$\Rightarrow x=1$ không phải là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow m=1.$

2. Tiệm cận ngang.

◁ CALC 1 0 x■ 1 0 = CALC (−) 1 0 x■ 1 0 =



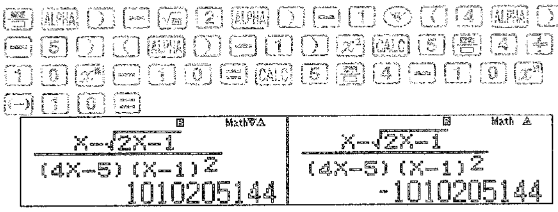
$\Rightarrow y=2; y=0$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow n=2.$ Vậy ta chọn B.

Câu 27: Đáp án A.

$$(4x-5)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4} \\ x=1 \end{array}\right.$$

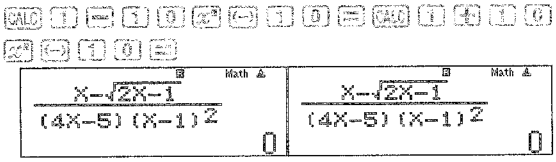
1. Với $x=\dfrac{5}{4}$.



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{5}{4}^+}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{(4x-5)(x-1)^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to\frac{5}{4}^-}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{(4x-5)(x-1)^2}=-\infty$

$\Rightarrow x=\dfrac{5}{4}$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. Với $x=1$.

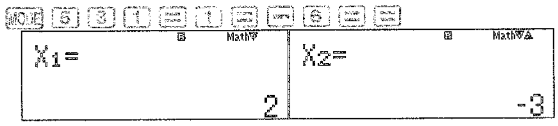


$\Rightarrow x=1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Vậy ta chọn A.

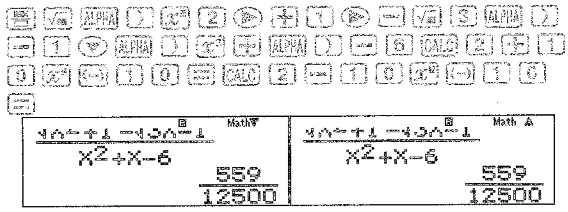
Câu 28: Đáp án A.

1. Tiệm cận đứng.

$x^2+x-6=0$



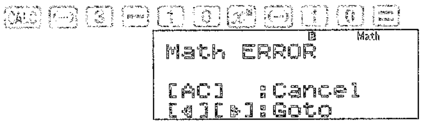
Với $x=2$.



$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}}{x^2+x-6}=\dfrac{559}{12500}.$

$\Rightarrow x=2$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $x=-3$

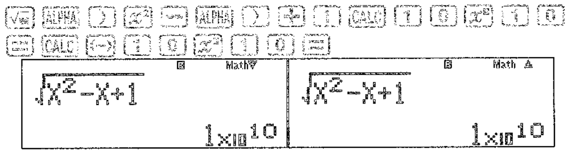


$\Rightarrow x=-3$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số đã cho không có đường tiệm cận đứng. Ta chọn A.

Câu 29: Đáp án A.

Với A:

Tiệm cận ngang.

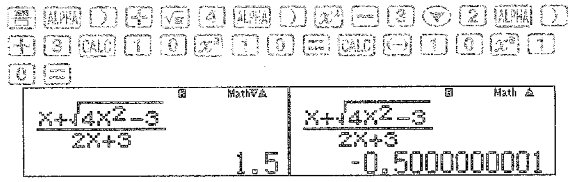


$\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Mặt khác đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng, do vậy ta chọn A.

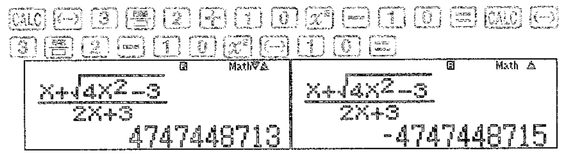
Câu 30: Đáp án A.

1. Tiệm cận ngang.



$\Rightarrow y=\dfrac{3}{2};y=-\dfrac{1}{2}$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cận đứng.



$\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

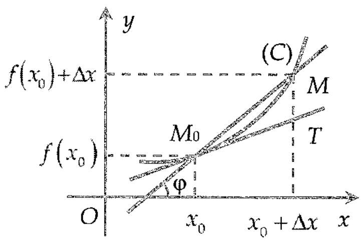
$\Rightarrow m=3.$

$\Rightarrow m.n=3.y(1)=\dfrac{6}{5}$. Ta chọn A.

VI. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng.

1. Tiếp tuyến của đường cong phẳng



Định nghĩa:

Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T. Khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là tiếp điểm.

Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)$ và (C) là đồ thị của hàm số. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại $M_0(x_0;f(x_0))$.

STUDY TIPS
- Hệ số góc $k=f'(x_0)$.
- Nếu cho x_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm y_0.
- Nếu cho y_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm x_0.

2. Phương trình tiếp tuyến

a) Tiếp tuyến tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)\in(C)$:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

b) Tiếp tuyến biết hệ số góc

- Hệ số góc k của tiếp tuyến: $k=f'(x_0)$ (*)

Giải phương trình (*) ta tìm được hoành độ tiếp điểm x_0 và thế vào phương trình $y=f(x)$ tìm tung độ y_0.

- Khi đó phương trình tiếp tuyến: $y=k(x-x_0)+y_0$ (d)

STUDY TIPS
*Tiếp tuyến $d//\Delta: y=ax+b \Rightarrow k=a$.
*Tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=ax+b \Rightarrow k.a=-1$.
* $k=\tan\alpha$, với α là góc giữa d với tia Ox.

c) Tiếp tuyến đi qua một điểm

Lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua $M(x_M;y_M)$.

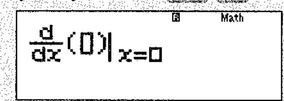
Phương pháp:

- Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.
- Phương trình tiếp tuyến tại M_0: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ (d)
- Vì đường thẳng d đi qua M nên $y_M-y_0=f'(x_0)(x_M-x_0)$. Giải phương trình ta tìm được x_0 và y_0.

STUDY TIPS
Điểm $M(x_0;y_0)$ có thể thuộc hoặc không thuộc đường cong (C).

B. Phương pháp sử dụng máy tính giải bài toán tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ta thường sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm SHIFT $\int$



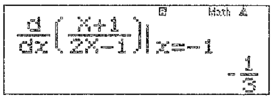
Sử dụng ứng dụng CALC 100 để phân tích tìm phương trình tiếp tuyến.

C. Các ví dụ minh họa.

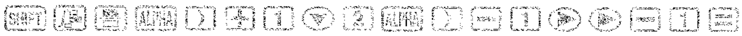
Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Lời giải



Hệ số góc tiếp tuyến là đạo hàm tại tiếp điểm $\Rightarrow k=f'(-1)$



$\Rightarrow f'(-1)=-\frac{1}{3}$.

Đáp án C.

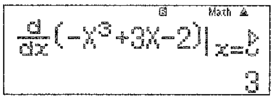
Ví dụ 2: Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

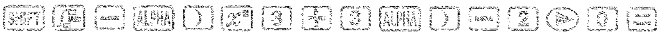
A. $y=-2x+1$. B. $y=3x-2$. C. $y=2x+1$. D. $y=-3x-2$.

Lời giải

Giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là điểm $M(0;-2)$.

Tính $f'(0)$.





Lúc này ta có phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có dạng $y=3(x-0)-2\Leftrightarrow y=3x-2$.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0;8)$.

A. $y=12x+8$. B. $y=3x+4$.

C. $y=12x+3$. D. $y=2x+5$.

Phân tích: Bài toán này, việc sử dụng máy tính cầm tay sẽ dựa trên suy luận tự luận, do vậy ta sẽ xét phương pháp tự luận trước để hiểu rõ bản chất cách sử dụng máy tính.

Lời giải

1. Giải toán thông thường.

Ta có $y'=f'(x)=6x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng

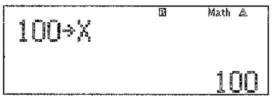
$y=(6x_0^{\ 2}-6x_0)(x-x_0)+(2x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}+1)$

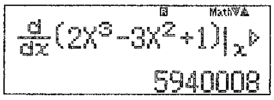
Mà tiếp tuyến đó đi qua điểm

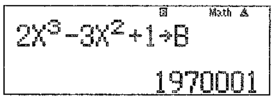
$A(0;8)\Rightarrow\ 8=(6x_0^{\ 2}-6x_0)(0-x_0)+2x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}+1\ \Leftrightarrow -4x_0^{\ 3}+3x_0^{\ 2}-7=0$

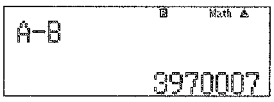
$\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=12x+8$.

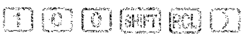
2. Sử dụng máy tính cầm tay.





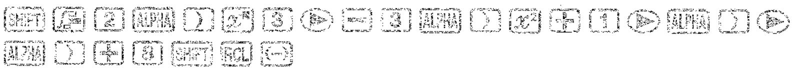




Bước 1: Gán $100\to X$. 

Bước 2: Tìm phương tình hoành độ giao điểm.

a. Nhập $\frac{d}{dx}(2X^3-3X^2+1)\Big|_{x=X}X+8\to A$.



b. Nhập $2X^3-3X^2+1\to B$.

[2] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [SHIFT] [RCL] [°'''']

c. Tính $A-B=$ [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°''''] [=]

Ta có $3970007=4.100^3-29993=4.100^3-\left(3.100^2-7\right)=4x^3-3x^2+7$.

Bước 3: Tìm hoành độ tiếp điểm bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm sử dụng [MODE] [5] [4]

[MODE] [5] [4] [4] [=] [−] [3] [=] [0] [=] [7] [=] [=]

Phương trình có một nghiệm thực duy nhất là $x=-1$ là hoành độ tiếp điểm.

X1=
-1

Bước 4: Tính $\frac{d}{dx}\left(2X^3-3X^2+1\right)\Big|_{X=-1}=12\Rightarrow y=12x+8$ là phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Lý giải bước 2.

a. Ở bước a việc ta nhập $\frac{d}{dx}\left(2X^3-3X^2+1\right)\Big|_{x=X}X+8\to A$ là ta viết phương trình tiếp tuyến bằng công thức viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và có hệ số góc k cho trước $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$.

b. Việc ta nhập $2X^3-3X^2+1\to B$ là ta tính giá trị của hàm số đã cho khi $x=100$.

c. Việc $A-B$ là xét phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến cần tìm và đồ thị hàm số đã cho. Sau khi đưa ra kết quả, sử dụng chức năng phân tích hàm số từ CALC 100 để tách phương trình theo x, giải phương trình ta tìm được hoành độ tiếp điểm.

Ví dụ 4: Phương tình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(2;1\right)$ là

A. $y=-16x+33, y=1$ hoặc $y=\frac{32}{27}x-\frac{37}{27}$.

B. $y=16x-31, y=1$ hoặc $y=\frac{32}{27}x-\frac{37}{27}$.

C. $y=16x-31, y=1$ hoặc $y=-\frac{32}{27}x-\frac{37}{27}$.

D. $y=-2x+5, y=16x-31$ hoặc $y=\frac{32}{27}x-\frac{37}{27}$.

Lời giải

Bước 1: Gán $100\to X$ [1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [)]

100→X
100

Bước 2: Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^4-4X^2+1\right)\Big|_{x=X}\left(X-2\right)+1\to A$.

[SHIFT] [∫□] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [4] [▶] [−] [4] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [+] [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

d/dx(X⁴−4X²+1)|x=▶
391921601

Nhập $X^4-4X^2+1\to B$.

[ALPHA] [)] [$x^{■}$] [4] [▶] [−] [4] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [SHIFT] [RCL] [°'''']

X⁴−4X²+1→B
99960001

Bước 3: Tính $A-B=$ [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°''''] [=]

A−B
291961600

Ta có $291961600=3.100^4-\left(8.100^3+4.100^2-16.100\right)=3x^4-8x^3-4x^2+16x$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa tiếp tuyến và đồ thị hàm số đã cho $3x^4-8x^3-4x^2+16x=0\Leftrightarrow x\left(3x^3-8x^2-4x+16\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{4}{3}\\x=2\end{array}\right.$

(Giải phương trình $3x^3-8x^2-4x+16=0$ bằng [MODE] [5] [4] ta nhập [MODE] [5] [4] [3] [=] [−] [8] [=] [−] [4] [=] [1] [6] [=] [=] [▼])

X1=
$-\frac{4}{3}$

X2=
2

Với $x=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $y=1$.

Với $x=2$ ta có $\frac{d}{dx}\left(X^4-4X^2+1\right)\Big|_{x=2}=16$.

d/dx(X⁴−4X²+1)|x=▶
16

SHIFT ∫ ALPHA) x² 4 ▷ − 4 ALPHA) x² + 1 ▷ 2 =

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=16(x-2)+1 \Leftrightarrow y=16x-31$.

Với $x=-\dfrac{4}{3}$ ta có $\dfrac{d}{dx}\left(X^4-4X^2+1\right)\Big|_{x=-\frac{4}{3}}=\dfrac{32}{27}$ ◁ ◁ DEL (−) 4 ▤ 3 =

$\dfrac{d}{dx}(X^4-4X^2+1)|_{x=}$ 1.185185185

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=\dfrac{32}{27}(x-2)+1 \Leftrightarrow y=\dfrac{32}{27}x-\dfrac{37}{27}$.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-7;5)$.

A. $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$ và $y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{59}{16}$.

B. $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ và $y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{2}{16}$.

C. $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ và $y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{9}{16}$.

D. $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ và $y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{59}{16}$.

Lời giải

Bước 1: Gán $100 \rightarrow X$ 1 0 0 SHIFT RCL)

100→X 100

Bước 2: Nhập $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)\Big|_{x=X}(X+7)+5 \rightarrow A$.

SHIFT ∫ ▤ 2 ALPHA) + 1 ▽ ALPHA) − 1 ▷ ▷ ALPHA) ▷ (ALPHA) + 7) + 5 SHIFT RCL (−)

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=X}(X+$ 4.96724824

Nhập $\dfrac{2X+1}{X-1} \rightarrow B$. ▤ 2 ALPHA) + 1 ▽ ALPHA) − 1 SHIFT RCL °'''

$\dfrac{2X+1}{X-1}$→B $\dfrac{67}{33}$

Bước 3: Tính $(X-1)^2(A-B)=$

(ALPHA) − 1) x² × (ALPHA (−) − ALPHA °''') =

(X−1)²×(A−B) 28785

$28785=3.100^2-1215=3.100^2-12.100-15=3x^2-12x-15$

MODE 5 3 3 = − 1 2 = − 1 5 = =

$X_1=$ 5 | $X_2=$ −1

STUDY TIPS

Trong bước 3, việc ta nhân thêm $(X-1)^2$ là ta đã quy đồng mẫu số phương trình hoành độ giao điểm (do $\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$ nên mẫu số xuất hiện $(x-1)^2$).

Với $x=5 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)\Big|_{x=5}=-0{,}1875=-\dfrac{3}{16} \Rightarrow y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{59}{16}$ là một phương trình tiếp tuyến.

Với $x=-1 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)\Big|_{x=-1}=-0{,}75=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ là một phương trình tiếp tuyến.

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=5}$ −0.1875 | $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=-1}$ −0.75

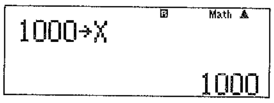
Đáp án D.

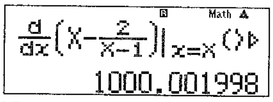
Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)=x-\dfrac{2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua $A(3;3)$.

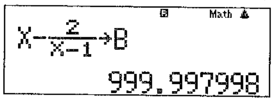
A. $y=3x-6$. B. $y=2x-3$. C. $y=x-2$. D. $y=3x+4$.

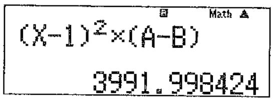
STUDY TIPS

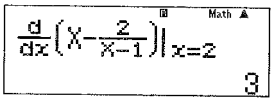
Trong một số trường hợp, để tăng độ chính xác của kết quả, người ta gán $X=1000$ thay vì 100.











Lời giải

Bước 1: Gán $1000\to X$. 

Bước 2: Tìm phương trình hoành độ giao điểm.

Nhập $\dfrac{d}{dx}\left(X-\dfrac{2}{X-1}\right)\Big|_{x=X}(X-3)+3\to A$.



Nhập $X-\dfrac{2}{X-1}\to B$.



Tính $(X-1)^2(A-B)=$



Ta có kết quả ≈ 3992

$3992=4.1000-8=4x-8$

$4x-8=0\Leftrightarrow x=2$.

Ta có $\dfrac{d}{dx}\left(X-\dfrac{2}{X-1}\right)\Big|_{x=2}=3$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=3(x-2)+0=3x-6$.

Đáp án A.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến bất kì của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là

A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

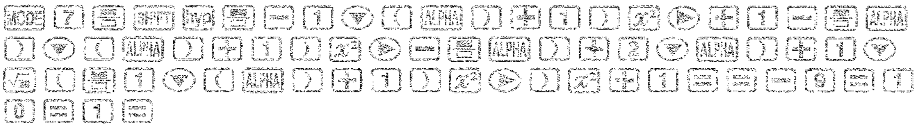
Gọi tiếp điểm của tiếp của của đồ thị (C) là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$. Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0+1)^2}$.

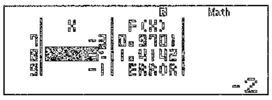
Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên giao điểm hai đường tiệm cận là $I(-1;1)$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng ta có

$$h=d(I;(d))=\frac{\left|\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(-1)+1+\dfrac{x_0}{(x_0+1)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{(x_0+1)^2}\right)^2+1^2}}$$

Sử dụng TABLE để tìm giá trị lớn nhất của hàm số.





Từ bảng giá trị ta suy ra $h_{\max} = \sqrt{2}$.

Đáp án C.

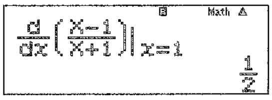
Ví dụ 8: Tìm tọa độ tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại m song song với đường thẳng $d: y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

A. $(0;1),(2;3)$. B. $(1;0),(-3;2)$. C. $(-3;2)$. D. $(1;0)$.

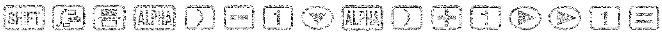
STUDY TIPS
Ta thấy B và D có chung tọa độ điểm $(1;0)$ nên ta sẽ thử D và sau đó B trước.

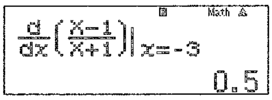
Lời giải

Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\dfrac{1}{2}$.

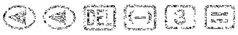


Tính $f'(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M(1;0)$ là một tiếp điểm thỏa mãn.





Tính $f'(-3) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M(-3;2)$ là một tiếp điểm.



Đáp án B.

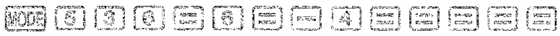
Ví dụ 9: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ có đồ thị (C). Trong số các tiếp tuyến của (C) có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng

A. $-\dfrac{7}{2}$. B. $-\dfrac{11}{2}$. C. $-\dfrac{15}{2}$. D. $-\dfrac{19}{2}$.

Lời giải



Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 4$. Tìm hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tức ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của $y' = 6x^2 + 6x - 4$ trên $\mathbb{R}$.

Ta sử dụng chức năng 

Từ kết quả hiện trên màn hình ta chọn B.

Đáp án B.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) với hệ số góc nhỏ nhất

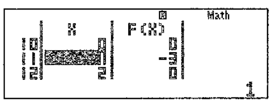
A. $y = -3x + 3$. B. $y = -3x - 3$. C. $y = -3x$. D. $y = 0$.

STUDY TIPS
Ta cũng có thể tìm min của $f'(x_0)$ bằng  (EQN)

Lời giải

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Trong đó hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.



Tìm GTNN bằng TABLE



Ta thấy $f'_{\min} = f'(1) = -3 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1^3 - 3.1^2 + 2 = 0$.

Thế vào phương trình tiếp tuyến ta có $y = -3(x-1) + 0 = -3x + 3$.

Đáp án A.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $y = 2x + 2$.
B. $y = 3x - 1$.
C. $y = x + 1$.
D. $y = 2 - x$.

Câu 2: Tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x\sqrt{x}$ tại điểm $M(1;1)$ có phương trình là

A. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
B. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
C. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
D. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^2 + 5$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có tung độ $y_0 = -1$ với hoành độ $x_0 < 0$ có phương trình

A. $y = 2\sqrt{6}\left(x + \sqrt{6}\right) - 1$.
B. $y = -2\sqrt{6}\left(x + \sqrt{6}\right) - 1$.
C. $y = 2\sqrt{6}\left(x - \sqrt{6}\right) + 1$.
D. $y = 2\sqrt{6}\left(x - \sqrt{6}\right) - 1$.

Câu 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có hệ số góc k bằng

A. $k = -1$. B. $k = -3$.
C. $k = 3$. D. $k = 5$.

Câu 5: Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ là đường thẳng

A. song song với đường thẳng $x = 1$.
B. song song với trục hoành.
C. có hệ số góc dương.
D. có hệ số góc bằng -1.

Câu 6: Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với Oy. Khi đó giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$ là

A. $\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$.
C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 7: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$ có phương trình là

A. $y = -9x - 43$.
B. $y = -9x + 43$.
C. $y = -9x - 11$.
D. $y = -9x - 27$.

Câu 8: Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(-1;-9)$ có phương trình là

A. $y = 24x - 15$.
B. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.
C. $\left[\begin{array}{l} y = 24x + 15 \\ y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4} \end{array}\right.$.
D. $y = 24x + 33$.

Câu 9: Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C). Gọi d là tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;-13)$. Phương trình của đường thẳng d là

A. $y = -6x - 19$ hoặc $y = 48x + 35$.
B. $y = -3x - 16$ hoặc $y = 24x + 9$.
C. $y = 3x - 10$. hoặc $y = 48x + 35$.
D. $y = 6x - 7$ hoặc $y = -48x - 61$.

Câu 10: Số tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;-6)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là

A. 3. B. 2.
C. 0. D. 1.

Câu 11: Qua điểm $C(5;-1)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$?

A. 1. B. 2.
C. 0. D. 3.

Câu 12: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ đi qua điểm $M(5;-1)$ là

A. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = 3x - 16$.
B. $y = 3x - 16$. hoặc $y = -3x + 14$.
C. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = 2x - 11$.
D. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ hoặc $y = -3x + 14$.

Câu 13: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ đi qua điểm $H(1;0)$ là

A. $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

B. $y=x-1$.

C. $y=2x-2$.

D. $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$.

Câu 14: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$. Có hai tiếp tuyến của (C) cùng có hệ số góc bằng $\frac{3}{4}$ là

A. $y=\frac{3}{4}x+\frac{29}{34}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+3$.

B. $y=\frac{3}{4}x-\frac{37}{12}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x-3$.

C. $y=\frac{3}{4}x+\frac{37}{12}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$.

D. $y=\frac{3}{4}x-\frac{29}{24}$ hoặc $y=\frac{3}{4}x+3$.

Câu 15: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-9x^2+17x+2$ đi qua điểm $T(-2;5)$ là

A. 2. B. 3.
C. 1. D. 0.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của C tại điểm có hoành độ bằng 2 đi qua điểm $M(0;a)$ thì giá trị của a bằng

A. 10. B. 9.
C. 3. D. 1.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m+1$ có đồ thị (C_m). Tập tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại giao điểm của (C_m) với đường thẳng $d:x=1$ song song với đường thẳng $y=-12x+4$ là

A. $m=0$. B. $m=1$.
C. $m=\pm 2$. D. $m=3$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $O(0;0)$.

A. $y=0; y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ hoặc $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

B. $y=0; y=-\frac{\sqrt{3}}{9}x$ hoặc $y=\frac{\sqrt{3}}{9}x$.

C. $y=0; y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x$ hoặc $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x$.

D. $y=-\frac{\sqrt{3}}{9}x$ hoặc $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=(2-x^2)^2$. Biết tiếp tuyến cần tìm đi qua điểm $T(0;4)$.

A. $y=4; y=\frac{16\sqrt{3}}{9}x+4$ hoặc $y=3x+4$.

B. $y=4; y=-\frac{16\sqrt{3}}{9}x+4$ hoặc $y=3x+4$.

C. $y=4; y=\frac{16\sqrt{3}}{9}x+4$ hoặc $y=-\frac{16\sqrt{3}}{9}x+4$.

D. $y=3x+4; y=2x+4$ hoặc $y=-\frac{16\sqrt{3}}{9}x+4$.

Câu 20: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x+1}{x-2}$ kẻ từ gốc tọa độ O là

A. 2. B. 0.
C. 1. D. 3.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án C.

Tìm hệ số góc.

SHIFT ∫ ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 2 ALPHA) + 3 ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}(X^3-2X+3)|_{x=1}$ → 1

$\Rightarrow y=1.(x-1)+2 \Leftrightarrow y=x+1$ là phương trình đường tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3-2x+3$. Vậy ta chọn C.

Câu 2: Đáp án C.

SHIFT ∫ ALPHA) √ ALPHA) ▶ ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}(X\sqrt{X})|_{x=1}$ → 1.5

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}(x-1)+1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ là phương trình tiếp tuyến của đường cong (C). Ta chọn C.

Câu 3: Đáp án A.

$-1=-x^2+5 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}.$

Do $x_0<0$ nên $M\left(-\sqrt{6};-1\right)$.

SHIFT ∫ (−) ALPHA) x^2 + 5 ▶ (−) √ 6 =

$\frac{d}{dx}(-X^2+5)|_{x=-\sqrt{6}}$ → 4.898979486

$\Rightarrow y'(-1)=2\sqrt{6}.$

$\Rightarrow y=2\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)-1.$ Vậy ta chọn A.

Câu 4: Đáp án B.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng 2 là $k=y'(2)$.

SHIFT ∫ ⊟ 2 ALPHA) + 1 ▼ ALPHA) − 1 ▶ ▶ 2 =

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)|_{x=2}$ → -3

$\Rightarrow k=-3.$ Ta chọn B.

Câu 5: Đáp án B.

$y'=x^2-4x+3.$

MODE 5 3 1 = − 4 = 3 = =

$X_1=$ 3 ; $X_2=$ 1

Hàm số đã cho có hệ số $a=\frac{1}{3}>0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có dạng chữ N (phần này tôi đã giới thiệu trong sách công phá toán 3)

$\Rightarrow x=3$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $y'(3)$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}X^3-2X^2+3X-\right.$▸ → 0

$\Rightarrow$ tiếp tuyến song song với trục hoành. Ta chọn B.

Câu 6: Đáp án B.

Do A là giao điểm của đồ thị hàm số với Oy nên $A(0;-m)$.

Sử dụng máy tính.

SHIFT ∫ ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 3 ALPHA S⇔D ALPHA) x^2 + (ALPHA S⇔D + 1) ALPHA) − ALPHA S⇔D ▶ 0 CALC 0 = 1 0 0 =

$\frac{d}{dx}(X^3-3YX^2+(Y+$▸ → 101

$101=100+1=m+1 \Rightarrow y'(0)=m+1.$

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với đường thẳng $y=2x-3$ thì hệ số góc k của tiếp tuyến thỏa mãn $2k=-1$.

$\Leftrightarrow 2(m+1)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}.$ Ta chọn B.

Câu 7: Đáp án C.

Ta có $y'=x^2+6x.$

$y'=-9 \Leftrightarrow x^2+6x+9=0.$

MODE 5 3 1 = 6 = 9 = =

X= -3

$\Rightarrow y=-9(x+3)+16 \Leftrightarrow y=-9x-11$ là phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Vậy ta chọn C.

Câu 8: Đáp án C.

Gán $100 \to X$. 1 0 0 SHIFT RCL)

100→X → 100

Nhập $\frac{d}{dx}\left(4X^3-6X^2+1\right)\Big|_{x=X}(X+1)-9 \to A.$

SHIFT ∫ 4 ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 6 ALPHA) x^2 + 1 ▶ ALPHA) ▶ (ALPHA) + 1) − 9 SHIFT RCL (−)

$\frac{d}{dx}(4X^3-6X^2+1)|_x$▸ → 11998791

Nhập $4X^3-6X^2+1 \to B.$

4 ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 6 ALPHA) x^2 + 1 SHIFT RCL °'''

$4X^3-6X^2+1 \to B$ → 3940001

Tính $A-B=$

```
A-B
                8058790
```

$8058790 = 8.100^3 + 5.100^2 + (100-13).100 + 100 - 10$

$\Rightarrow 8x^3 + 5x^2 + (x-13)x + x - 10 = 0$ là phương trình hoành độ giao điểm cần tìm.

$\Leftrightarrow 8x^3 + 6x^2 - 12x - 10 = 0$

```
X1=            5/4  |  X2=            -1
```

Với $x = \frac{5}{4}$.

```
d/dx(4X^3-6X^2+1)|x
                 15/4
```

$\Rightarrow y = \frac{15}{4}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{9}{16} \Leftrightarrow y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$ là tiếp tuyến cần tìm.

Với $x = -1$.

```
d/dx(4X^3-6X^2+1)|x
                   24
```

$\Rightarrow y = 24x + 15$ là một trong các tiếp tuyến cần tìm.

Vậy ta chọn C.

Câu 9: Đáp án D.

Gán 100 cho X.

```
100→X
                  100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(-2X^3 + 6X^2 - 5\right)\Big|_{x=X}(X+1) - 13 \rightarrow A$.

```
d/dx(-2X^3+6X^2-5)|
             -5938813
```

Nhập $-2X^3 + 6X^2 - 5 \rightarrow B$.

```
-2X^3+6X^2-5→B
             -1940005
```

Tính $A-B=$

```
A-B
             -3998808
```

$3998808 = 3.100^3 + (100-1).100^2 + (100-12).100 + 8$

$\Rightarrow 4x^3 - 12x + 8 = 0$

```
X1=             -2  |  X2=             1
```

Với $x = -2$.

```
d/dx(-2X^3+6X^2-5)|
                  -48
```

$\Rightarrow y = -48x - 61$ là một tiếp tuyến cần tìm.

Ta không cần tìm tiếp tuyến còn lại nữa mà chọn luôn D.

Câu 10: Đáp án D.

Gán 100 cho X.

```
100→X
                  100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^3 - 3X + 1\right)\Big|_{x=X}(X-1) - 6 \rightarrow A$.

```
d/dx(X^3-3X+1)|x=X
              2969697
```

Nhập $X^3 - 3X + 1 \rightarrow B$.

```
X^3-3X+1→B
               999701
```

Tính $A-B=$

```
A-B
              1969996
```

$1969996 = 2.100^3 - 30004 = 2.100^3 - 3.100^2 - 4$

$\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

```
X1=              2  |  X2= -1/4+0.9682458366i
X3= -1/4-0.9682458366i
```

Phương trình có duy nhất một nghiệm thực, do đó chỉ có một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta chọn D.

Câu 11: Đáp án B.

Câu hỏi có thay đổi đôi chút, tuy nhiên cũng là bài toán viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước. Do vậy ta sẽ giải tương tự các bài toán phía trên.

Gán 100 cho X. [1][0][0][SHIFT][RCL][)]

```
100→X
                100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{2X-1}{X-2}\right)\Big|_{x=X}(X-5)-1\to A.$

[SHIFT][∫][▭/▭][2][ALPHA][)][−][1][▼][ALPHA][)][−][2][▶][▶][ALPHA][)][▶][(][ALPHA][)][−][5][)][−][1][SHIFT][RCL][(−)]

```
d/dx((2X−1)/(X−2))|x=X (X-▶
        -1.029675135
```

Nhập $\frac{2X-1}{X-2}\to B.$

[▭/▭][2][ALPHA][)][−][1][▼][ALPHA][)][−][2][SHIFT][RCL][°'"]

```
(2X−1)/(X−2)→B
                199/98
```

Tính $(X-2)^2(A-B)=$

[(][ALPHA][)][−][2][)][x²][(][ALPHA][(−)][−][ALPHA][°'"][)][=]

```
(X-2)²(A-B)
              -29391
```

$29391=3.100^2-6.100-9$

$\Rightarrow 3x^2-6x-9=0.$

[MODE][5][3][3][=][−][6][=][−][9][=][=]

```
X1=          | X2=
            3|            -1
```

Phương trình có hai nghiệm nên có hai tiếp tuyến thỏa mãn. Ta chọn B.

Câu 12: Đáp án D.

Gán 100 cho X. [1][0][0][SHIFT][RCL][)]

```
100→X
                100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{2X-1}{X-2}\right)\Big|_{x=X}(X-5)-1\to A.$

[SHIFT][∫][▭/▭][2][ALPHA][)][−][1][▼][ALPHA][)][−][2][▶][▶][ALPHA][)][▶][(][ALPHA][)][−][5][)][−][1][SHIFT][RCL][(−)]

```
d/dx((2X−1)/(X−2))|x=X (X-▶
        -1.029675135
```

Nhập $\frac{2X-1}{X-2}\to B.$

[▭/▭][2][ALPHA][)][−][1][▼][ALPHA][)][−][2][SHIFT][RCL][°'"]

```
(2X−1)/(X−2)→B
                199/98
```

Tính $(X-2)^2(A-B)=$

[(][ALPHA][)][−][2][)][x²][(][ALPHA][(−)][−][ALPHA][°'"][)][=]

```
(X-2)²(A-B)
              -29391
```

$29391=3.100^2-6.100-9$

$\Rightarrow 3x^2-6x-9=0.$

[MODE][5][3][3][=][−][6][=][−][9][=][=]

```
X1=          | X2=
            3|            -1
```

Với $x=3$

[MODE][1][SHIFT][∫][▭/▭][2][ALPHA][)][−][1][▼][ALPHA][)][−][2][▶][▶][3][=]

```
d/dx((2X−1)/(X−2))|x=3
                   -3
```

$\Rightarrow y=-3(x-3)+5\Leftrightarrow y=-3x+14$ là một phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Với $x=-1$ [◀][◀][DEL][(−)][1][=]

```
d/dx((2X−1)/(X−2))|x=-1
        -0.3333333333
```

$\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ là một phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Từ hai kết quả vừa tìm được ta chọn D.

Câu 13: Đáp án D.

Gán 100 cho X. [1][0][0][SHIFT][RCL][)]

```
100→X
                100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2-5X+6}{X-1}\right)\Big|_{x=X}(X-1)\to A.$

[SHIFT][∫][▭/▭][ALPHA][)][x²][−][5][ALPHA][)][+][6][▼][ALPHA][)][−][1][▶][▶][ALPHA][)][▶][(][ALPHA][)][−][1][)][SHIFT][RCL][(−)]

```
d/dx((X²−5X+6)/(X−1))|x=X▶
                9799/99
```

Nhập $\frac{X^2-5X+6}{X-1}\to B.$

[▭/▭][ALPHA][)][x²][−][5][ALPHA][)][+][6][▼][ALPHA][)][−][1][SHIFT][RCL][°'"]

```
(X²−5X+6)/(X−1)→B
                9506/99
```

Tính $(X-1)^2(A-B)=$

[(][ALPHA][)][−][1][)][x²][(][ALPHA][(−)][−][ALPHA][°'"][)][=]

```
(X-1)²(A-B)
               29007
```

$29007=2.100^2+(100-10).100+7$

$\Rightarrow 2x^2+x^2-10x+7=0\Leftrightarrow 3x^2-10x+7=0.$

[MODE][5][3][3][=][−][1][0][=][7][=][=]

```
X1=          | X2=
          7/3|             1
```

Với $x=\frac{7}{3}.$

[MODE][1][SHIFT][∫][▭/▭][ALPHA][)][x²][−][5][ALPHA][)][+][6][▼][ALPHA][)][−][1][▶][▶][7][▭/▭][3][=]

```
d/dx((X²−5X+6)/(X−1))|x=7/3
                    -0.125
```

$\Rightarrow y=-\frac{1}{8}\left(x-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{6}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$. Vậy ta chọn D.

Câu 14: Đáp án C.

Ta có $y'=-x^2-4x-3$.

$y'=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2+4x+3+\frac{3}{4}=0.$

MODE 5 3 1 = 4 = 3 + 3 ÷ 4 = =

```
X1=            X2=
     -3/2           -5/2
```

Với $x=-\frac{3}{2}$ thì $y=\frac{3}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{17}{8}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$ là một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài, không cần tìm tiếp tuyến còn lại, ta chọn luôn C.

Câu 15: Đáp án B.

Gán 100 cho X. 1 0 0 SHIFT RCL)

```
100→X
                       100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^3-9X^2+17X+2\right)\Big|_{x=X}\left(X+2\right)+5\rightarrow A.$

SHIFT ∫ ALPHA) x■ 3 ▶ − 9 ALPHA) x² + 1 7 ALPHA) + 2 ▶ ALPHA) ▶ (ALPHA) + 2) + 5 SHIFT RCL (−)

```
d/dx(X³−9X²+17X+:▶
                   2878139
```

Nhập $X^3-9X^2+17X+2\rightarrow B.$

ALPHA) x■ 3 ▶ − 9 ALPHA) x² + 1 7 ALPHA) + 2 SHIFT RCL °'''

```
X³−9X²+17X+2→B
                    911702
```

Tính $A-B=$ ALPHA (−) − ALPHA °''' =

```
A−B
                   1966437
```

$1966437=100^3+\left(100-4\right).100^2+\left(100-36\right).100+37$

$\Rightarrow x^3+\left(x-4\right)x^2+\left(x-36\right)x+37=0$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-36x+37=0.$

MODE 5 4 2 = − 3 = − 3 6 = 3 7 = = ▼ ▼

```
X1=                    X2=
     -4.058421985           4.558421985
X3=
                     1
```

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có ba tiếp tuyến thỏa mãn, ta chọn B.

Câu 16: Đáp án A.

SHIFT ∫ ■ ALPHA) + 2 ▼ ALPHA) − 1 ▶ ▶ 2 =

```
d/dx((X+2)/(X−1))|x=2
                        -3
```

$\Rightarrow y=-3\left(x-2\right)+4\Leftrightarrow d:y=-3x+10$ là phương trình tiếp tuyến cần tìm.

$M\left(0;a\right)\in d\Rightarrow a=10$. Ta chọn A.

Câu 17: Đáp án C.

$A\left(1;2-2m^2+2m\right)$ là giao điểm của d và $\left(C_m\right)$.

Ta nhập $\frac{d}{dx}\left(X^4-2Y^2X^2+2Y+1\right)\Big|_{x=1}$ CALC

$X=1;Y=100$

SHIFT ∫ ALPHA) x■ 4 ▶ − 2 ALPHA S⇔D x² ALPHA) x² + 2 ALPHA S⇔D + 1 ▶ 1 CALC 1 = 1 0 0 =

```
d/dx(X⁴−2Y²X²+2Y▶
                    -39996
```

$-39996=-\left(4.100^2-4\right)=-\left(4m^2-4\right)=4-4m^2$.

$\Rightarrow y=\left(4-4m^2\right)x+1$ là phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Mà tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-12x+4$ nên $4-4m^2=-12\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2.$

Vậy ta chọn C.

Câu 18: Đáp án B.

Gán 100 cho X. 1 0 0 SHIFT RCL)

```
100→X
                       100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}X^4-\frac{1}{2}X^2\right)\Big|_{x=X}X\rightarrow A.$

SHIFT ∫ 1 ■ 2 ▶ ALPHA) x■ 4 ▶ − 1 ■ 2 ▶ ALPHA) x² ▶ ALPHA) ▶ ALPHA) SHIFT RCL (−)

```
d/dx(½X⁴−½X²)|x=⁄▶
                 199990000
```

Nhập $\frac{1}{2}X^4-\frac{1}{2}X^2\rightarrow B.$

■ 1 ▼ 2 ▶ ALPHA) x■ 4 ▶ − 1 ■ 2 ▶ ALPHA) x² SHIFT RCL °'''

```
½X⁴−½X²→B
                  49995000
```

Tính $A-B=$ ALPHA (−) − ALPHA °''' =

```
A−B
                 149995000
```

$149995000.2=29990000.$

(Ở đây do hàm số đã cho có các hệ số là phân số nên ta nhân thêm 2 để tránh khó phân tích).

$299990000 = 3.100^4 - 100^2 = 3x^4 - x^2$.

$$\Rightarrow 3x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(3x^2-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiếp tuyến cần tìm.

Với $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

[SHIFT] [∫] [1] [▭/▭] [2] [▶] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▶] [−] [1] [▭/▭] [2] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [▭/▭] [√▭] [3] [▼] [3] [=]

```
d/dx(1/2X⁴−1/2X²)|x=▸
        -0.1924500897
```

So sánh ta thấy kết quả trên màn hình là

$-\frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x$ là một tiếp tuyến cần tìm.

Với $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [◀] [(−)] [=]

```
d/dx(1/2X⁴−1/2X²)|x=▸
         0.1924500897
```

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{9}x$ là một tiếp tuyến cần tìm.

$\Rightarrow y = 0; y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x$ hoặc $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x$ là các tiếp tuyến cần tìm, ta chọn B.

Câu 19: Đáp án C.

Gán 100 cho X. [1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [)] [SHIFT]

```
100→X
                  100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\left(2-X^2\right)^2\right)\Big|_{x=X} X+4 \to A$.

[SHIFT] [∫] [(] [2] [−] [ALPHA] [)] [x²] [)] [x²] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [)] [+] [4] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
d/dx((2−X²)²)|x=X▸
            399920004
```

Nhập $\left(2-X^2\right)^2 \to B$.

[(] [2] [−] [ALPHA] [)] [x²] [)] [x²] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
(2−X²)²→B
             99960004
```

Tính $A - B =$ [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'"] [=]

```
A−B
            299960000
```

$299960000 = 3.100^4 - 4.100^2$

$$\Rightarrow 3x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ là phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Với $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

[SHIFT] [∫] [(] [2] [−] [ALPHA] [)] [x²] [)] [x²] [▶] [2] [▭/▭] [√▭] [3] [=]

```
d/dx((2−X²)²)|x=▸
         -3.079201436
```

$\Rightarrow y = -\frac{16\sqrt{3}}{9}x + 4$ là tiếp tuyến cần tìm.

Tương tự với $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì ta tìm được $y = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ là tiếp tuyến cần tìm. Vậy ta chọn C.

Câu 20: Đáp án A.

Gán 100 cho X. [1] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [)] [SHIFT]

```
100→X
                  100
```

Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{X+1}{X-2}\right)\Big|_{x=X} X \to A$.

[SHIFT] [∫] [▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [)] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
d/dx((X+1)/(X−2))|x=XX→A
       -0.03123698459
```

Nhập $\frac{X+1}{X-2} \to B$.

[▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
(X+1)/(X−2)→B
               101/98
```

Tính $\left(X-2\right)^2.\left(A-B\right) =$

[(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'"] [)] [=]

```
(X−2)²(A−B)
               -10198
```

$10198 = 100^2 + 100 + 100 - 2 = x^2 + 2x - 2$.

$x^2 + 2x - 2 = 0$ [MODE] [5] [3] [1] [=] [2] [=] [−] [2] [=] [=]

```
X1=                   X2=
       -1+√3                 -1−√3
```

Phương trình có hai nghiệm phân biệt do đó có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta chọn A.

VII. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. Kiến thức nền tảng.

Bài toán tổng quát: Xét sự tương giao của hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = f(x)$.

Phương pháp chung

Bước 1: Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:
$f(x) = g(x)$ $(*)$

Bước 2: Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là số nghiệm của phương trình $(*)$.

Bài toán chứa tham số

Tiến hành xác định phương trình hoành độ giao điểm.

Cô lập tham số m và đưa phương trình ban đầu về dạng $f(x) = m$ (2).

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

B. Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay giải bài toán tương giao.

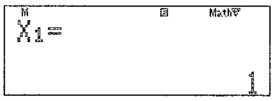
Thông thường để tìm nghiệm phương trình hoành độ giao điểm ta thường dùng lệnh SHIFT SOLVE (SHIFT CALC).

C. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giá trị của m để đồ thị hàm số $(C): y = mx^3 - (6 + m^2)x^2 + 15mx - 9m^2$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt là

A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m \in \{-2; 2\}$. D. $m \in \{-1; 1\}$.

Lời giải





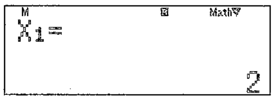
Trường hợp m = 1

Ta thấy phương trình $(*)$ chỉ là phương trình bậc ba. Trong khi đó trong máy tính có chức năng giải phương trình bậc ba. Do đó ta sẽ sử dụng chức năng này để đoán nghiệm của phương trình $(*)$. Ta sẽ thử các trường hợp riêng của m từ đó rút ra kết luận.

Thử $m = 1$. Ta bấm máy như sau:

MODE 5 4 1 = (−) (6 + 1) = 1 5 = − 9 = =

Lúc này phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 3$



Trường hợp m = 2

Tiếp tục ta thử trường hợp 2: $m = 2$. Ta cũng bấm máy tương tự:

MODE 5 4 2 = − (6 + 2 x²) = 1 5 × 2 = − 9 × 2 x² = =

Thì ta có phương trình có 1 nghiệm $x = 2$.

Ta có thể thử tiếp với các trường hợp khác, tuy nhiên từ hai trường hợp thử ở trên ta đã có thể kết luận phương trình $(*)$ luôn có một nghiệm $x = m$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow(x-m)(mx^2-6x+9m)=0$

$(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $mx^2-6x+9m=0(**)$ có đúng một nghiệm khác m hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng m.

STUDY TIPS
Trong trường hợp không tìm được nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm thì phương pháp hàm số vẫn tối ưu hơn cả!

- TH1: $(**)$ có đúng một nghiệm khác m.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9-9m^2=0\\ m.m^2-6m+9m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm 1$

- TH2: $(**)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng m.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=9-9m^2>0\\ m.m^2-6m+9m=0\end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy $m=\pm 1$.

Đáp án D.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$ B. $m\in\mathbb{R}$ C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ D. $m\in(-2;+\infty)$

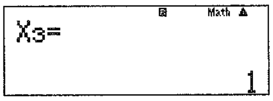
Lời giải

Xét hàm số bậc ba, ta có $y'=3x^2-6x+1;\ y''=6x-6;\ y''=0\Leftrightarrow x=1$.

Khi đó điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là $U(1;1)$ và U là tâm đối xứng của đồ thị.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng:

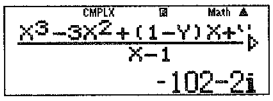
$x^3-3x^2+x+2=mx-m+1\Leftrightarrow x^3-3x^2+(1-m)x+m+1=0\ (*)$



Ta thử các giá trị $m=1;m=2;m=3,...$ bằng máy tính với chức năng MODE 5 4 thì phương trình luôn có một nghiệm $x=1$.

$\Rightarrow(*)$ có nhân tử $x-1$.

(hoặc ta có thể suy luận ta thấy tổng các hệ số của VT phương trình $(*)$ bằng 0, do vậy phương trình $(*)$ luôn có một nghiệm $x=1$).



Phân tích $(*)$ ta sử dụng chức năng CALC 100 để phân tích.

Ta thực hiện nhập $\dfrac{X^3-3X^2+(1-Y)X+Y+1}{X-1}$ CALC cho $X=i;Y=100$.

MODE 2 ⊟ ALPHA) $x^\blacksquare$ 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + (1 − ALPHA S⇔D) ALPHA) + ALPHA S⇔D + 1 ▼ ALPHA) − 1 CALC ENG = 1 0 0 =

Máy hiện kết quả

$-102-2i=-(100+1+1)-2i=-(m+1-x^2)-2x=x^2-2x-m-1$

STUDY TIPS
Ở đây ta có thể phân tích $102=100+1+1$ vì do hàm bậc ba chia hàm bậc hai nên không thể ra bậc 1 được, nên ta phải phân tích xuất hiện x^2 mà $-1=i^2=x^2$.

$(*)\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x-m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2-2x-m-1=0\ (1)\end{array}\right.$.

Với $x=1\Rightarrow y=1$ chính là các tọa độ của điểm uốn của đồ thị hàm bậc ba.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

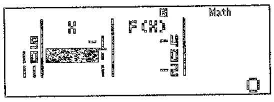
$\Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ \Delta' = 2 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 2 \neq 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$. Vậy $m \in (-2; +\infty)$.

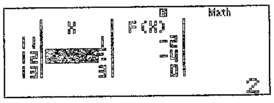
Đáp án D.

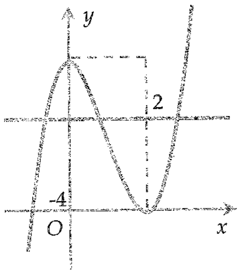
Ví dụ 3: Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thỏa mãn

A. $-4 < m < 0$ B. $-4 \le m \le 0$ C. $0 \le m \le 4$ D. $0 < m < 4$

Lời giải







Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) và trục hoành ta có $x^3 - 3x^2 + m = 0 (1) \Leftrightarrow -m = x^3 - 3x^2$.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m$.

Để khảo sát hàm số $y = f(x)$ ta sử dụng lệnh MODE 7 (TABLE) với Start -9; End 10; Step 1.

MODE 7 ALPHA) x^3 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 = = (−) 9 = 1 0 = =

Quan sát bảng giá trị ta thấy hàm số có giá trị cực đại là 0 và giá trị cực tiểu là -4.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy để đồ thị hàm số cắt nhau tại 3 điểm thì $-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Đáp án D.

STUDY TIPS

Giải thích điều kiện $(*)$. Do khi phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1 > t_2 > 0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1} < -\sqrt{t_2} < \sqrt{t_2} < \sqrt{t_1}$ cho nên từ đó ta có điều kiện $(*)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị (C) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt trong đó có đúng ba điểm có hoành độ lớn hơn -1?

A. $-3 < m < -1$ B. $-2 < m < 2$ C. $2 < m < 3$ D. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 4 = 0 (1)$.

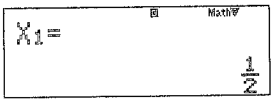
Đặt $x^2 = t, (t \ge 0)$ thì $(1) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$ (2)

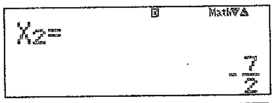
Để phương trình có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng ba nghiệm có hoành độ lớn hơn -1 (tức là đúng một điểm có hoành độ nhỏ hơn -1) thì $0 < t_2 \le 1 < t_1$ $(*)$

Ta thử với từng phương án.

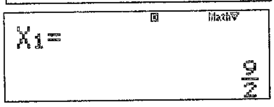
Với $m = -1,5$ ta nhập

MODE 5 3 1 = − 2 × (−) 1 . 5 = ((−) 1 . 5) x^2 − 4 = = =



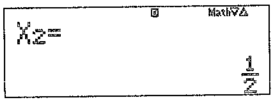


Ta thấy hai nghiệm của phương trình không thỏa mãn điều kiện, do vậy ta loại luôn A và B.



Với $m = 2,5$ ta nhập

MODE 5 3 1 = − 2 × 2 . 5 = 2 . 5 x^2 − 4 = =



Nhìn vào kết quả ta thấy $m=2{,}5$ thì cho ra kết quả thỏa mãn $(*)$. Do vậy ta chọn C.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có ba nghiệm phân biệt.

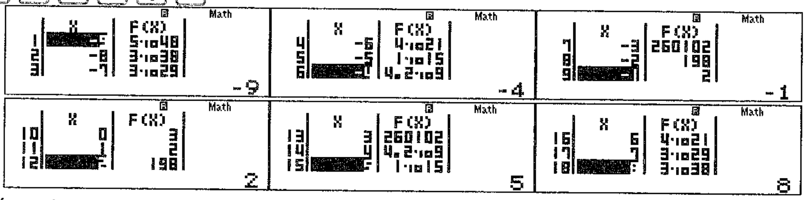
A. $m=3$. B. $m>2$. C. $2\le m\le 3$ D. $2<m<3$.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=4^{x^2}-2^{x^2+2}+6$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương với Ox).

Ta sẽ xét số giao điểm bằng việc sử dụng TABLE để xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ với thiết lập Start -9; End 10; Step 1.

MODE 7 4 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) x^2 ▶ − 2 $x^{\blacksquare}$ ALPHA) x^2 + 2 ▶ + 6 = = (−) 9 = 1 0 = 1 =



Từ kết quả trong bảng giá trị ta có thể đưa ra bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=m$ (cùng phương với Ox) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $m=3$.

Đáp án A.

> **STUDY TIPS**
> Từ ví dụ 5 ta thấy bài toán tương giao còn được dùng cho việc biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị $(H): y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị (H).

A. $-1<m<0$. B. $m>1$. C. $0<m<1$ D. $m>0$.

Lời giải

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Đồ thị (H) có đường tiệm cận đứng $x=1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (H) ta được $mx+1=\dfrac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\(mx+1)(x-1)-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\mx^2-mx-2=0\,(*)\end{cases}$

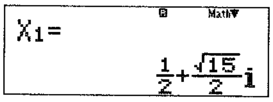
Để đường thẳng d cắt đồ thị (H) tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị (H) thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1<1<x_2$.

Với bài toán này ta sẽ sử dụng MODE 5 3 để thử các phương án.

> *Phân tích:* Do đồ thị (H) có đường tiệm cận đứng $x=1$ nên khi d cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1=a; x_2=b$ thuộc hai nhánh đồ thị thì hai điểm này nằm về hai phía của đường tiệm cận, tức $a<1<b$.

Với A: Ta thử $m=-0{,}5$ thực hiện nhập

MODE 5 3 (−) 0 . 5 = − 0 . 5 = (−) 2 = =



Ta thấy với $m=-0{,}5$ không thỏa mãn, ta loại A.

X2= $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$

X1= 1.618033989

X2= -0.6180339887

X1= 2.561552813

X2= -1.561552813

Với B: Ta thử $m=2$ thực hiện nhập

[MODE] [5] [3] [2] [=] [−] [2] [=] [(−)] [2] [=] [=] [S⇔D] [▼] [S⇔D]

Ta thấy với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1<x_2$, từ đây ta loại được C.

Để xét xem B hay D là đáp án ta thử thêm $m=0,5$ thực hiện nhập

[MODE] [5] [3] [0] [.] [5] [=] [(−)] [0] [.] [5] [=] [−] [2] [=] [=]

Ta thấy với $m=0,5$ cũng thỏa mãn, do vậy ta loại B, chọn D.

2. Giải toán thông thường.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1<1<x_2$ thì

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+8m>0 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ -\dfrac{2}{m}-1+1=-\dfrac{2}{m}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0.$$

Vậy với $m>0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta chọn D.

Đáp án D.

Phân tích: Từ các ví dụ phía trên ta đã biết để giải bài toán này ta cần lập phương trình hoành độ giao điểm. Với bài toán này lại có điều kiện đặc biệt từ giả thiết cho, ta có $x=1$ là một nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm. Từ dữ kiện này ta sẽ tách phương trình hoành độ giao điểm thành $(x-1)h(x,m)=0$, trong đó $h(x,m)$ là một tam thức bậc hai. Ta tiếp tục sử dụng dữ kiện $BC=4$ để tìm m.

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m+2$ cắt đồ thị $(C_m): y=x^3+3x^2+mx-1$ tại ba điểm phân biệt $A;\ B;\ C$ sao cho $BC=4$, biết rằng $x_A=1$.

A. $m=0$ B. $m=-1$ C. $m=3$ D. $m=-2$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_m) và d ta có

$x^3+3x^2+mx-1=x+m+2 \Leftrightarrow x^3+3x^2+(m-1)x-3-m=0\ (*)$

Do phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=1$ nên VT sẽ có nhân tử $x-1$. Ta tìm nhân tử còn lại bằng cách phân tích bằng CALC 100.

Chuyển máy tính sang môi trường tính toán với số phức và nhập vào màn hình $\dfrac{X^3+3X^2+(Y-1)X-3-Y}{X-1}$ và CALC $X=i; Y=100$.

[MODE] [2] [□/□] [ALPHA] [)] [x³] [3] [▶] [+] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [(] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [)] [ALPHA] [)] [−] [3] [−] [ALPHA] [S⇔D] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [CALC] [ENG] [=] [1] [0] [0] [=]

Màn hình hiện kết quả

$\dfrac{X^3+3X^2+(Y-1)X-5}{X-1}$ ▶ 102+4i

$102+4i=100+2+4i=m+2+4x=m+3+4x-1=x^2+4x+m+3.$

(Ở đây ta tách được như vậy bởi nhân tử còn lại là một tam thức bậc hai có số hạng cao nhất là x^2 nên ta tách $2=3-1=3+i^2=3+x^2$)

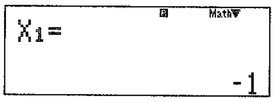
$(*)\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+m+3)=0.$

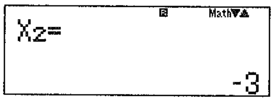
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+4x+m+3=0\ (1) \end{array}\right.$$

1. Sử dụng máy tính cầm tay.

Do ở bốn phương án đều chỉ xuất hiện một giá trị của m, do vậy ta có thể sử dụng máy tính để tìm nhanh xem giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện.

Với A: $m=0\Rightarrow$ ta nhập MODE 5 3 1 = 4 = 3 = =

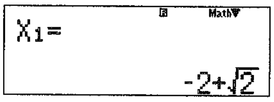


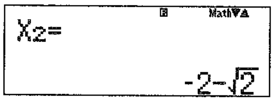


Ta thấy phương trình có hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1=x_B=-1\Rightarrow B(-1;1) \\ x_2=x_C=-3\Rightarrow C(-3;-1) \end{cases}\Rightarrow BC=\sqrt{\left(-1-(-3)\right)^2+\left(1-(-1)\right)^2}=2\sqrt{2}$$ (không thỏa mãn). Vậy ta loại A.

Với B: $m=-1\Rightarrow$ ta nhập MODE 5 3 1 = 4 = (−) 1 + 3 = =





Ta thấy phương trình có hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1=x_B=-2+\sqrt{2}\Rightarrow B\left(-2+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right) \\ x_2=x_C=-2-\sqrt{2}\Rightarrow C\left(-2-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right) \end{cases}\Rightarrow BC=4$$ (thỏa mãn) ta chọn B.

2. Giải toán thông thường.

Để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(1;y_A);B;C$ thì phương trình $f(x)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \Delta'>0 \\ f(1)\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4-(m+3)>0 \\ 1+4+m+3\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<1 \\ m\neq -8 \end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-8)\cup(-8;1).\ (2)$$

Với điều kiện này thì $B(x_1;y_1),C(x_2;y_2)$ là hai giao điểm còn lại của d và (C_m). Lúc này ta có $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1) và đồng thời $B,C\in d$ nên

$$y_1=x_1+m+2;y_2=x_2+m+2.$$

Từ đây ta có $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2(x_2-x_1)^2=2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2$.

Mặt khác, theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1x_2=m+3 \end{cases}$. Do vậy ta có

$$BC^2=2.(-4)^2-8.(m+3)=8(1-m).$$

$BC=4\Leftrightarrow 8(1-m)=16\Leftrightarrow m=-1.$ (thỏa mãn (2)).

Đáp án B.

NHẬN XÉT

Rõ ràng việc biến đổi cho đến khi xuất hiện (1) sau đó thử phương án bằng máy tính cầm tay sẽ tiết kiệm thời gian hơn so với việc giải trực tiếp, mất nhiều thời gian.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm điều kiện của tham số m để đường cong $y = x^4 - 4mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. $m < 0$. B. $m > 1$.
C. $0 < m < 4$. D. $1 < m < 2$.

Câu 2: Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-19;19]$ để đường cong $y = x^4 - 4mx^2 + m - 4$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. 19 giá trị. B. 18 giá trị.
C. 15 giá trị. D. 38 giá trị.

Câu 3: Tìm tung độ giao điểm của đường cong $y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng $y = x - 1$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. −1.

Câu 4: Tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 11x + 21$ và $y = 3\sqrt[3]{4x-4}$.

A. 3 giao điểm. B. 2 giao điểm.
C. 1 giao điểm. D. 4 giao điểm.

Câu 5: Đường cong $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt parabol $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $0 < AB < 2$. B. $2 < AB < 3$.
C. $3 < AB < 4$. D. $1,5 < AB < 2,5$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ cắt đường thẳng đi qua hai điểm $(4;1)$ và $(8;1)$ tại một điểm duy nhất M. Hoành độ điểm M gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 2,13. B. 1,61. C. 3,42. D. 4,56.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+24} - \sqrt{x^2+15}$ cắt đường thẳng $y = 3x - 2$ tại duy nhất một điểm $M(a;b)$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b$.

A. $S = 3$. B. $S = 2$. C. $S = 4$. D. $S = 5,5$.

Câu 8: Đường cong $y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ cắt đường cong $y = \sqrt[3]{x-1}$ tại bao nhiêu điểm?

A. 2 điểm. B. 3 điểm. C. 1 điểm. D. 4 điểm.

Câu 9: Tìm số giao điểm của đường cong $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + (x+2)\sqrt{x-x^2}$ và đường thẳng $y = 1$.

A. 1 giao điểm. B. 2 giao điểm.
C. 3 giao điểm. D. 4 giao điểm.

Câu 10: Tìm số giao điểm của đường cong $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{4-x} + 4(x+2)\sqrt{4-x}$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $(1010;4)$ và $(2017;4)$.

A. 1 giao điểm. B. 2 giao điểm.
C. 3 giao điểm. D. 4 giao điểm.

Câu 11: Tồn tại hai giá trị $m = a; m = b$ thì đường cong $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $T = a + b$.

A. $T = \frac{32}{9}$. B. $T = 1$. C. $T = \frac{22}{5}$. D. $T = \frac{2}{7}$.

Câu 12: Kí hiệu S là tập hợp các giá trị của m để đường cong $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Tính tổng M các phần tử của S.

A. $M = \frac{14}{9}$. B. $M = 2$. C. $M = \frac{22}{5}$. D. $M = \frac{17}{3}$.

Câu 13: Tìm điều kiện của tham số thực m để đường cong $(C): y = x^4 - (6m+4)x^2 + 3(6m+1)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt trong đó có ba điểm có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $m > 1$. B. $m > 0,5$.
C. $m > 2$. D. $0 < m < 4$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường cong $y = (m-3)x^4 - 2mx^2 + 6m$ và trục hoành có điểm chung.

A. $0 < m < 1$. B. $0 \le m \le 3,6$.
C. $2 < m < 3$. D. $0 \le m \le 3$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 16$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m > 12$. B. $m < -12$. C. $m < 0$. D. $m \notin \varnothing$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x = m$ có đúng một nghiệm dương.

A. $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m = -7 \\ m > 0 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} m < -7 \\ m > 20 \end{array}\right.$. D. $m \in \varnothing$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$. B. $m > 2$.
C. $2 \le m \le 3$. D. $2 < m < 3$.

Câu 18: Số nguyên dương lớn nhất m để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm là

A. 20. B. 35. C. 30. D. 25.

Câu 19: Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x - 2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm là

A. $m > 0$. B. $\left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{2} \\ m \ge \sqrt{2} \end{array}\right.$. C. $\forall m \in \mathbb{R}$. D. $m \notin \varnothing$.

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

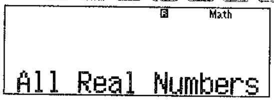
$x^4-4mx^2+m-1=0\ (*)$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có bốn nghiệm phân biệt.

Đặt $x^2=t\,(t\ge 0)$. Để thỏa mãn yêu cầu trên thì phương trình $t^2-4mt+m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $0<t_1<t_2$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(-2m)^2-m+1>0\\ t_1t_2>0\\ t_1+t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m+1>0\\ m-1>0\\ 4m>0\end{cases}$$

MODE ▼ 1 1 1 4 = − 1 = 1 = =



$bpt\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$. Ta chọn B.

Câu 2: Đáp án C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^4-4mx^2+m-4=0(*)$

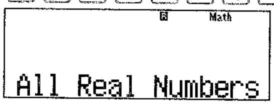
Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)$.

$(*)\Leftrightarrow t^2-4mt+m-4=0.$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình trên có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(-2m)^2-m+4>0\\ t_1t_2=m-4>0\\ t_1+t_2=4m>0\end{cases}$$

MODE ▼ 1 1 1 4 = − 1 = 4 = =

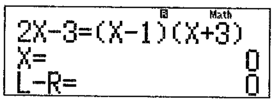


$bpt\Leftrightarrow m>4$. Vậy có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta chọn C.

Câu 3: Đáp án D.

$$\frac{2x-3}{x+3}=(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -3\\ 2x-3=(x-1)(x+3)\end{cases}$$

2 ALPHA) − 3 ALPHA CALC (ALPHA) − 1) (ALPHA) + 3) SHIFT CALC (−) 1 0 0 = SHIFT CALC 1 0 0 =



$x=0\Rightarrow y=-1$. Vậy ta chọn D.

Câu 4: Đáp án C.

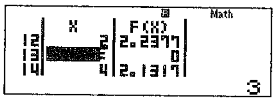
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$

Sử dụng TABLE để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)=2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}$.

MODE 7 2 ALPHA) x^2 − 1 1 ALPHA) + 2 1 − 3 SHIFT √ 4 ALPHA) − 4 = = (−) 9 = 1 0 = 1 = =



Dựa vào bảng giá trị ta có thể kết luận phương trình hoành độ giao điểm có một nghiệm duy nhất là $x=3\Rightarrow$ hai đồ thị hàm số $y=2x^2-11x+21$ và $y=3\sqrt[3]{4x-4}$ có duy nhất một giao điểm.

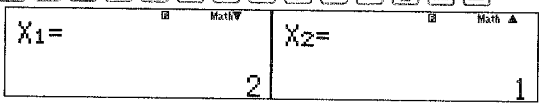
Câu 5: Đáp án A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3-3x^2+2x-1=x^2-3x+1$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0.$

MODE 5 4 1 = − 4 = 5 = − 2 = =



$\Rightarrow A(2;-1),B(1;-1).$

$\Rightarrow AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1+1)^2}=1.$ Vậy ta chọn A.

Câu 6: Đáp án B.

Phương trình đường thẳng đi qua $(4;1)$ và $(8;1)$ là $y=1$.

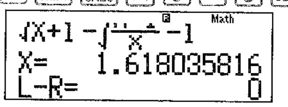
Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\sqrt{x+1}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=1.$

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ -1\le x<0\end{array}\right.$.

Sử dụng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình.

√ ALPHA) + 1 ► − √ ▭/▭ ALPHA) − 1 ▼ ALPHA) ► ► − 1 SHIFT CALC (−) 0 • 5 =

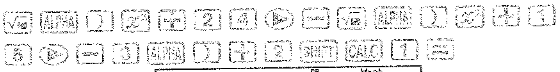


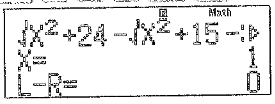
$\Rightarrow$ nghiệm x vừa tìm được chính là hoành độ của điểm M. Vậy ta chọn B.

Câu 7: Đáp án B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+15}=3x-2$





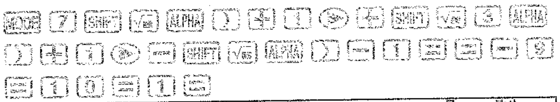
$x=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow S=1+1=2.$

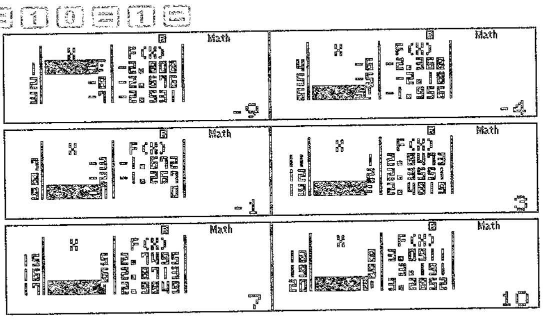
Ta chọn B.

Câu 8: Đáp án C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$





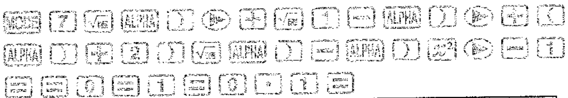
Dựa vào bảng giá trị ta có thể kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$. Vậy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại duy nhất một điểm. Vậy ta chọn C.

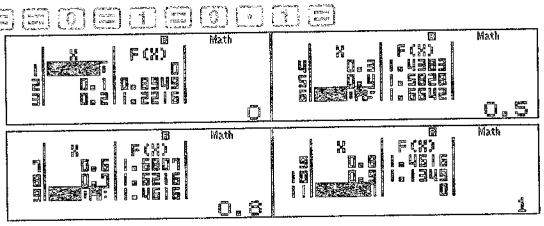
Câu 9: Đáp án B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+(x+2)\sqrt{x-x^2}=1.$

Điều kiện $0 \le x \le 1$.





Nhìn vào bảng giá trị ta thấy phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+(x+2)\sqrt{x-x^2}=1$ có đúng hai nghiệm là $x=0; x=1$. Do vậy đường cong $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+(x+2)\sqrt{x-x^2}$ cắt đường thẳng $y=1$ tại hai giao điểm, ta chọn B.

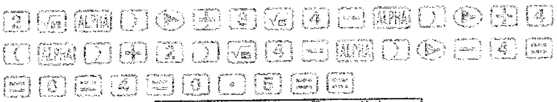
Câu 10: Đáp án A.

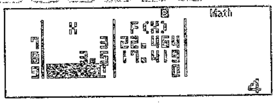
Đường thẳng d đi qua hai điểm $(1010;4)$ và $(2017;4)$ có phương trình $y=4$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$2\sqrt{x}+3\sqrt{4-x}+4(x+2)\sqrt{4-x}=4$

Điều kiện $0 \le x \le 4$.





$\Rightarrow x=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình hoành độ giao điểm. Vậy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại duy nhất một giao điểm. Ta chọn A.

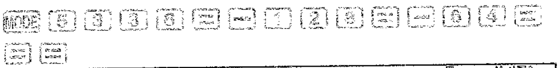
Câu 11: Đáp án A.

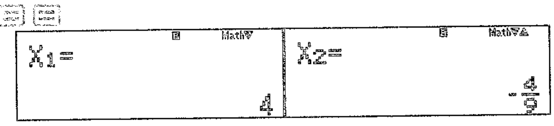
Để đường cong $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng thì $9b^2=100ac$ (công thức được đưa ra ở sách Công phá Toán 3)

$\Leftrightarrow 9.(-2)^2.(m+1)^2=100(2m+1)$

$\Leftrightarrow 36m^2+72m+36=200m+100$

$\Leftrightarrow 36m^2-128m-64=0$





$\Rightarrow a=4; b=-\frac{4}{9} \Rightarrow T=\frac{32}{9}$. Vậy ta chọn A.

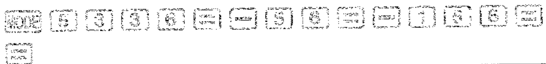
Câu 12: Đáp án A.

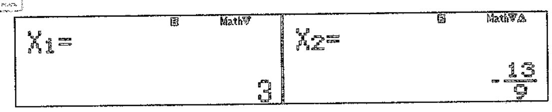
Tương tự như bài trên ta có

$9b^2=100ac \Leftrightarrow 9.4.(m+2)^2=100(2m+3)$

$\Leftrightarrow 36m^2+144m+144=200m+300$

$\Leftrightarrow 36m^2-56m-156=0$





$\Rightarrow M=3-\frac{13}{9}=\frac{14}{9}$. ta chọn A.

Câu 13: Đáp án B.

Số giao điểm của đường cong (C) với trục hoành là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$x^4-(6m+4)x^2+3(6m+1)=0 \; (1)$

Đặt $x^2=t \; (t \ge 0)$ thì phương trình trở thành

$t^2-(6m+4)t+3(6m+1)=0 \; (*)$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình (1) có đúng ba nghiệm nhỏ hơn 2 (tức có đúng một nghiệm lớn hơn 2) thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $0<t_1 \le 4<t_2$.

Ta thử từng phương án.

Với $m=2$ thì giải phương trình $(*)$

MODE 5 3 1 = − (6 × 2 + 4) = 3 × (6 × 2 + 1) = = =

X2=	X1=
3	13

Thỏa mãn, vậy ta loại C.

Với B ta thử $m=0,6$.

AC 1 = − (6 × 0 . 6 + 4) = 3 × (6 × 0 . 6 + 1) = = =

X1=	X2=
$\frac{23}{5}$	3

Thỏa mãn, vậy ta loại A, còn D.

Với D tha thử $m=5$.

AC 1 = − (6 × 5 + 4) = 3 × (6 × 5 + 1) = =

X1=	X2=
31	3

Thỏa mãn, vậy ta loại D, chọn B.

Câu 14: Đáp án B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$(m-3)x^4-2mx^2+6m=0$

Với $m=3$ thỏa mãn (vậy ta loại A và C).

Với $m\neq 3$ ta thực hiện thử.

Đặt $x^2=t\,(t\geq 0)$. Phương trình hoành độ giao điểm trở thành $(m-3)t^2-2mt+6m=0(*)$

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $(*)$ phải có ít nhất một nghiệm không âm.

Ta thử với $m=3,6$.

MODE 5 3 3 . 6 − 3 = (−) 2 × 3 . 6 = 6 × 3 . 6 = = =

X=
6

Thỏa mãn, do vậy ta loại D và chọn B.

Câu 15: Đáp án B.

Để đồ thị hàm số $y=x^3+mx+16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3+mx+16=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $m=14$ sử dụng MODE 5 4

MODE 5 4 1 = 0 = 1 4 = 1 6 = = = =

X1=	X2=	X3=
-1.058213891	0.5291069456+3.▸	0.5291069456-3.▸

Ta thấy nghiệm $x_2;x_3$ là nghiệm ảo, vậy không đủ 3 nghiệm thực, ta loại A.

Với $m=-14$.

MODE 5 4 1 = 0 = − 1 4 = 1 6 = = = =

X1=	X2=	X3=
-4.218186702	2.918522599	1.299664103

Ta thấy có 3 nghiệm thực ⇒ đáp án đúng có thể là B hoặc C.

Thử thêm với $m=-1$ không thỏa mãn, nên ta loại C, chọn B.

Câu 16: Đáp án B.

Đặt $f(x)=2x^3+3x^2-12x$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$ (1). Để (1) có đúng 1 nghiệm dương thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ dương.

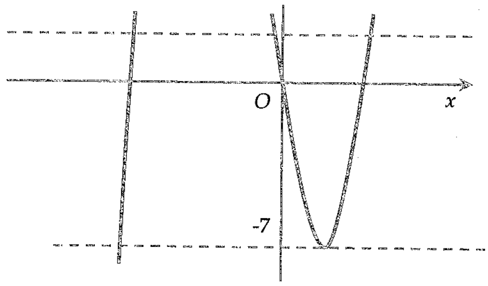
Sử dụng TABLE khảo sát hàm số

MODE 7 2 ALPHA) $x^■$ 3 ▶ + 3 ALPHA) x^2 − 1 2 ALPHA) = = − 4 = 5 = 0 . 5 =

	X	F(X)
4	-2.5	17.5
5	-2	20
6	-1.5	18

	X	F(X)
10	0.5	-5
11	1	-7
12	1.5	-4.5

Ta thấy hàm số có cực đại là 20, cực tiểu là -7 nên ta có đồ thị như sau.



Từ đây ta kết luận $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-7 \end{array}\right.$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại đúng một điểm có hoành độ dương, ta chọn B.

Câu 17: Đáp án A.

Đặt $f(x)=4^{x^2}-2^{x^2+2}+6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start -4; End 5; Step 0,5.

MODE 7 4 $x^■$ ALPHA) x^2 ▶ − 2 $x^■$ ALPHA) x^2 + 2 ▶ + 6 = = − 4 = 5 = 0 . 5 =

	X	F(X)
5	-2	198
6	-1.5	9.6001
7	-1	2

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗	3	↘	2	↗ $+\infty$

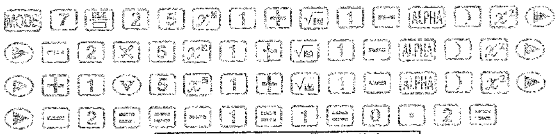
Ta thấy $m=3$ thỏa mãn, vậy ta chọn A.

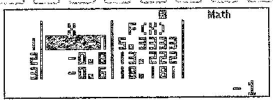
Câu 18: Đáp án D.

Cô lập m ta được $m=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start -1; End 1; Step 0,2.





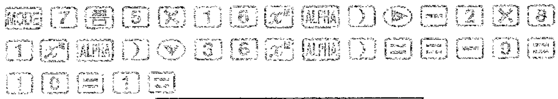
Quan sát bảng giá trị ta thấy $f(x)\le f(0)=25.043$ hay $m\le f(0)$. Vậy số nguyên dương m lớn nhất thỏa mãn là $m=25$. Ta chọn D.

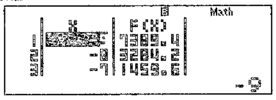
Câu 19: Đáp án C.

Cô lập m ta được $m=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{5.16^x-2.81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x)=m$.

Sử dụng TABLE với thiết lập Start -9; End 10; Step 1.





Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luông nghịch biến.

Suy ra đường thẳng $y=m$ luông cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại đúng 1 điểm. Vậy ta chọn C.

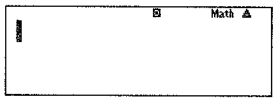
CHỦ ĐỀ 2:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Các chế độ làm việc

Sử dụng các phím [sin], [cos], [tan] để nhập vào máy các hàm lượng giác.
Sử dụng phím [°'"] để nhập đơn vị độ.

CHÚ Ý

Trong máy tính cầm tay, không có phím nào để ta có thể nhập vào trực tiếp hàm cotang. Vì vậy, để đưa vào máy hàm này, ta nhập gián tiếp qua công thức $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ hoặc $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

1. Đưa máy về đơn vị góc là độ (Degree), ấn [SHIFT] [MODE] [3](Deg). Khi đó, trên góc màn hình hiển thị kí hiệu [D]	
2. Đưa máy về đơn vị góc là rađian (Radian), ấn [SHIFT] [MODE] [4](Rad). Khi đó, trên góc màn hình hiển thị kí hiệu [R]	

2. Các dạng toán liên quan

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức lượng giác chứa các góc đặc biệt

Sử dụng các phím [sin], [cos], [tan] và các chế độ góc (Deg hoặc Rad), nhập vào máy biểu thức cần tính. Ấn [=], ta được kết quả.

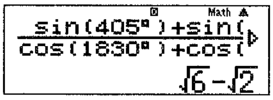
Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin 405° + \sin 495°}{\cos 1830° + \cos 3660°}$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{3}}$ D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào máy $\dfrac{\sin(405°)+\sin(495°)}{\cos(1830°)+\cos(3660°)}$, ấn [▭/▭] [sin] [4] [0] [5] [°'"] [)] [+] [sin] [4] [9] [5] [°'"] [)] [▼] [cos] [1] [8] [3] [0] [°'"] [)] [+] [cos] [3] [6] [6] [0] [°'"] [)].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{6}-\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

Đáp án A.

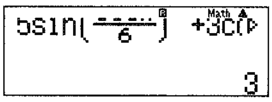
Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = 5\sin^2\dfrac{151\pi}{6} + 3\cos^2\dfrac{85\pi}{3} - 4\tan^2\dfrac{193\pi}{6} + 7\cot^2\dfrac{37\pi}{3}$. Giá trị của biểu thức P là

A. 0 B. 3 C. 2 D. –1

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ góc là rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào máy $5\sin\left(\dfrac{151\pi}{6}\right)^2 + 3\cos\left(\dfrac{85\pi}{3}\right)^2 - 4\tan\left(\dfrac{193\pi}{6}\right)^2 + \dfrac{7}{\tan\left(\dfrac{37\pi}{3}\right)^2}$:



[5] [sin] [▭/▭] [1] [5] [1] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [6] [▶] [)] [x²] [+] [3] [cos] [▭/▭] [8] [5] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [3] [▶] [)] [x²] [−] [4] [tan] [▭/▭] [1] [9] [3] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [6] [▶] [)] [x²] [+] [▭/▭] [7] [▼] [tan] [▭/▭] [3] [7] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [3] [▶] [)] [x²]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 3.

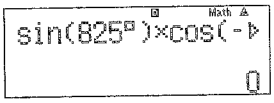
Đáp án B.

> **Ví dụ 3:** Cho $P=\sin 825^\circ\cos(-15^\circ)+\cos 75^\circ\sin(-555^\circ)+\tan 155^\circ\tan 245^\circ$. Tính giá trị của biểu thức P, ta được kết quả sau
>
> A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào máy $\sin 825^\circ\times\cos(-15^\circ)+\cos 75^\circ\times\sin(-555^\circ)+\tan 155^\circ\times\tan 245^\circ$. Ấn [sin] [8] [2] [5] [°'''] [)] [×] [cos] [(−)] [1] [5] [°'''] [)] [+] [cos] [7] [5] [°'''] [)] [×] [sin] [(−)] [5] [5] [5] [°'''] [)] [+] [tan] [1] [5] [5] [°'''] [)] [×] [tan] [2] [4] [5] [°'''] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.



Đáp án C.

> **Ví dụ 4.** Tính giá trị của biểu thức $A=\sin\frac{7\pi}{6}+\cos 9\pi+\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\cot\frac{7\pi}{2}$
>
> A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

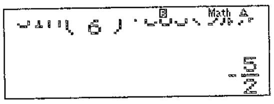
Lời giải

Đưa máy tính về chế độ góc là rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào máy $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\cos(9\pi)+\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\dfrac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}$. Ấn [sin] [7] [SHIFT] [×10^x] [▭] [6] [▶] [)] [+] [cos] [9] [SHIFT] [×10^x] [)] [+] [tan] [(−)] [5] [SHIFT] [×10^x] [▭] [4] [▶] [)] [+] [cos] [7] [SHIFT] [×10^x] [▭] [2] [▶] [)] [▭] [sin] [7] [SHIFT] [×10^x] [▭] [2] [▶] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\frac{5}{2}$.

STUDY TIPS

Nếu sử dụng biến đổi $\cot\frac{7\pi}{2}=\frac{1}{\tan\frac{7\pi}{2}}$ và nhập biểu thức vào máy tính, ấn [=] máy hiện Math ERROR. Thật vậy, do $\cos\frac{7\pi}{2}=0$ nên $\tan\frac{7\pi}{2}$ không xác định. Như vậy, nếu biểu thức nhập vào màn hình xuất hiện $\tan\frac{7\pi}{2}$ thì máy không thể hiển thị kết quả.



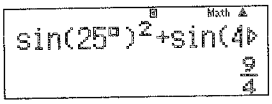
Đáp án A.

> **Ví dụ 5:** Tính giá trị của biểu thức $M=\sin^2 25^0+\sin^2 45^0+\sin^2 60^0+\sin^2 65^0$:
>
> A. $-\frac{5}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào máy $\sin(25^\circ)^2+\sin(45^\circ)^2+\sin(60^\circ)^2+\sin(65^\circ)^2$, ấn [sin] [2] [5] [°'''] [)] [x²] [+] [sin] [4] [5] [°'''] [)] [x²] [+] [sin] [6] [0] [°'''] [)] [x²] [+] [sin] [6] [5] [°'''] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{9}{4}$.



Đáp án B.

Dạng 2: Dựa vào giả thiết cho trước, tính giá trị của một biểu thức lượng giác

– **Bước 1:** Từ những dữ kiện mà giả thiết đưa ra, ta có thể tính toán ở chế độ góc radian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) hay tính toán ở chế độ góc độ: [SHIFT] [MODE] [3] (Deg). Ở dạng toán này, tác giả sẽ chỉ thực hiện tính với đơn vị độ (Deg).

– **Bước 2:** Sử dụng các hàm lượng giác ngược $\arcsin x\left(\sin^{-1}x\right)$: [SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$), $\arccos x\left(\cos^{-1}x\right)$: [SHIFT] [cos] ($\cos^{-1}$) hay là $\arctan x\left(\tan^{-1}x\right)$: [SHIFT] [tan] ($\tan^{-1}$).

STUDY TIPS

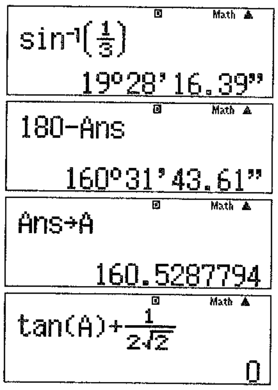
Do $\sin\alpha=\sin\left(180^\circ-\alpha\right)$ nên nếu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ thì $\alpha=\alpha_1$ $=19^\circ28'16{,}39''$ hoặc $\alpha=$ $180^\circ-\alpha_1=160^\circ31'43{,}61''$.

Ví dụ 1: Cho $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Các giá trị lượng giác của góc α là:

A. $\tan\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B. $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\tan\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $\tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Đưa máy về chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3](Deg)

Tìm α: Ấn [SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$) [▭/▭] [1] [▼] [3] [▶] [)]. Ấn [=], máy hiện 19,47122063

Nhập $180-\text{Ans}$: [1] [8] [0] [−] [Ans], ấn [=], máy hiện 160,5287794

Ta có: $\left[\begin{array}{l}\alpha=19^\circ28'16{,}39''\to\text{PreAns}\\ \alpha=160^\circ31'43{,}61''\to\text{Ans}\end{array}\right.$

Do $90^\circ<\alpha<180^\circ$ nên $\alpha=160^\circ31'43{,}61''=\text{Ans}$. Gán $\text{Ans}\to A$: [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)]. Như vậy $\alpha=A$.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\tan(A)+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ấn [tan] [ALPHA] [(−)] [)] [+] [▭/▭] [1] [▼] [2] [√▭] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

Đáp án A.

STUDY TIPS

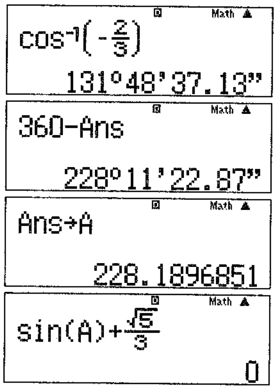
Lý do ta tìm được các góc $\alpha=131^\circ48'37{,}13''$, hay là $\alpha=228^\circ11'22{,}87''$ là từ mối quan hệ $\cos\alpha=\cos(-\alpha)=$ $=\cos\left(360^\circ-\alpha\right)=\ldots$

Tổng quát: Với $k\in\mathbb{Z}$ thì: $\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha=\cos\left(\alpha+k.360^\circ\right)\\ \cos\alpha=\cos(-\alpha)\end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Cho $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Phương án đúng là:

A. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\tan\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Lời giải



Đưa máy về chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3].

Tìm α: Ta ấn [SHIFT] [cos] [(−)] [▭/▭] [2] [▼] [3] [▶] [)]. Ấn [=], máy hiện 131,8103149.

Nhập $360-\text{Ans}$: [3] [6] [0] [−] [Ans], ấn [=], máy hiện 228,1896851.

Như vậy ta có $\left[\begin{array}{l}\alpha=131^\circ48'37{,}13''\to\text{PreAns}\\ \alpha=228^\circ11'22{,}87''\to\text{Ans}\end{array}\right.$

Do $180^\circ<\alpha<270^\circ$ nên $\alpha=228^\circ11'22{,}87''$ là góc thỏa mãn. Gán giá trị góc $\alpha=228^\circ11'22{,}87''$ vào biến nhớ A, ta ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)] $\left(\text{Ans}\to A\right)$.

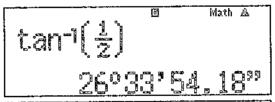
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\sin(A)+\frac{\sqrt{5}}{3}$, ấn [sin] [ALPHA] [(−)] [)] [+] [▭/▭] [√▭] [5] [▼] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Loại A.

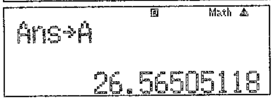
Đáp án A.

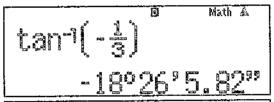
STUDY TIPS

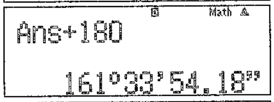
Ở ví dụ này, ta tìm được hai góc $b=-18^0 26'5,82''$ hay $b=161^0 33'54,18''$ là do $\tan b=\tan\left(b+180^0\right)$.

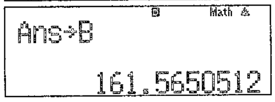
Tổng quát: Với $k\in\mathbb{Z}$ thì: $\tan x=\tan\left(x+k.180^0\right)$.











Ví dụ 3: Nếu biết $\tan a=\frac{1}{2},\left(a\in\left(0°,90°\right)\right)$ và $\tan b=-\frac{1}{3},\left(b\in\left(90°,180°\right)\right)$ thì $\cos\left(2a-b\right)$ có giá trị đúng bằng:

A. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ Deg: SHIFT MODE 3.

Tìm a: Ấn SHIFT tan ▭/▭ 1 ▼ 2 ▶). Ấn =, sau đó ấn °'", ta được kết quả $26°33'54,18''$. Suy ra $a=26°33'54,18''$ do $0°<a<90°$.

Gán giá trị của góc $a=26°33'54,18''$ vào biến nhớ A, ta ấn Ans SHIFT RCL (−) $\left(\text{Ans}\to\text{A}\right)$.

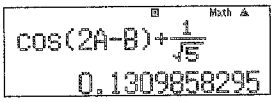
Tìm b: Ấn SHIFT tan (−) ▭/▭ 1 ▼ 3 ▶). Ấn =, sau đó ấn °'", ta được kết quả bằng $-18°26'5,82''$.

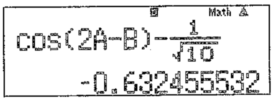
Nhập $\text{Ans}+180$: Ans + 1 8 0, Ấn =, sau đó ấn °'", máy hiện $161°33'54,18''$.

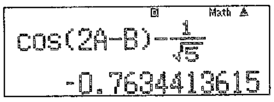
Suy ra $\left[\begin{array}{l} b=-18°26'5,82''\to\text{PreAns} \\ b=161°33'54,18''\to\text{Ans}\end{array}\right.$

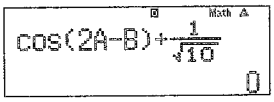
Do $90°<b<180°$ nên $b=161°33'54,18''$ và gán giá trị này vào biến nhớ B, ta ấn Ans SHIFT RCL °'" $\left(\text{Ans}\to\text{B}\right)$.

Như vậy $\cos\left(2a-b\right)=\cos\left(2\text{A}-\text{B}\right)$.









– *Phương án A:* Nhập vào máy $\cos\left(2\text{A}-\text{B}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}$, ấn cos 2 ALPHA (−) − ALPHA °'") + ▭/▭ 1 ▼ √▭ 5. Ấn =, máy hiện kết quả $0,1309858295\neq 0$. Loại A.

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\cos\left(2\text{A}-\text{B}\right)-\frac{1}{\sqrt{10}}$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,632455532\neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\cos\left(2\text{A}-\text{B}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,7634413615\neq 0$. Loại C.

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\cos\left(2\text{A}-\text{B}\right)+\frac{1}{\sqrt{10}}$. Ấn =, được kết quả bằng 0.

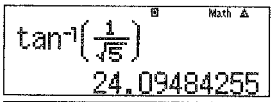
Chọn D.

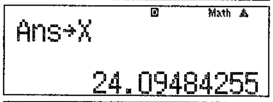
Đáp án D.

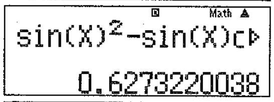
Ví dụ 4: Cho $\cot x=\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x$, ta được kết quả:

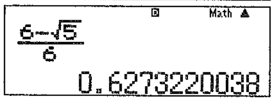
A. $\frac{6-\sqrt{5}}{6}$ B. $\frac{6-2\sqrt{5}}{6}$ C. $\frac{4-\sqrt{5}}{6}$ D. $\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

Lời giải









Từ $\cot x=\sqrt{5}\to\tan x=\frac{1}{\sqrt{5}}\to x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Nhập vào máy [SHIFT] [tan] [1] [▭/▭] [√▭] [5] [▶] [▶] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả là $24,09484255$.

Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)]. Nhập vào máy $\sin(X)^2-\sin(X)\cos(X)+\cos(X)^2$, ấn [sin] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [–] [sin] [ALPHA] [)] [)] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [x^2].

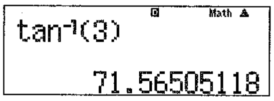
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $0,6273220038=\frac{6-\sqrt{5}}{6}$.

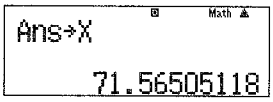
Đáp án A.

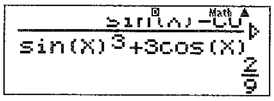
Ví dụ 5: Cho $\tan x=3$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{\sin x-\cos x}{\sin^3 x+3\cos^3 x+2\sin x}$, chọn kết quả đúng:

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{2}{9}$ C. 1 D. $\frac{1}{4}$

Lời giải







Nhập vào máy [SHIFT] [tan] [3] [)] $(\tan^{-1}(3))$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $71,56505118$. Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)].

Nhập vào máy $\frac{\sin(X)-\cos(X)}{\sin(X)^3+3\cos(X)^3+2\sin(X)}$, ấn [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [–] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▼] [sin] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x^2] [+] [3] [cos] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x^2] [+] [2] [sin] [ALPHA] [)] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{2}{9}$.

Đáp án C.

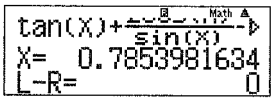
Ví dụ 6: Biết $\tan x+2\cot x=3$. Vậy $\tan x$ và $\cot x$ theo thứ tự bằng

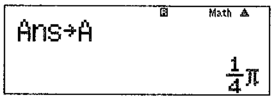
A. –1; –1 hoặc 0,5; 2 B. –1; –1 hoặc 2; 0,5

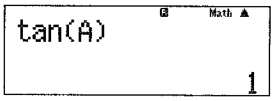
C. 1; 1 hoặc 0,5; 2 D. 1; 1 hoặc 2; 0,5

Lời giải

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]. Sử dụng tính năng SOLVE giải phương trình lượng giác $\tan(X)+\frac{2\cos(X)}{\sin(X)}-3=0$.

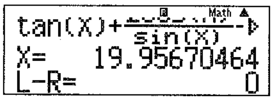


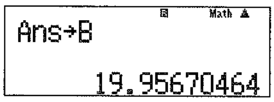




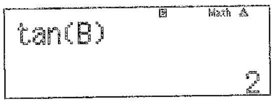
* Nhập vào máy $\tan(X)+\frac{2\cos(X)}{\sin(X)}-3$. Ấn [tan] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▶] [–] [3]. Ấn [SHIFT] [CALC], máy hỏi Solve for X, ấn [0]. Ấn [=] ta được một nghiệm là 0,7853981634. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn [SHIFT] [RCL] [(–)] $(\text{Ans}\to A)$.

Tính $\tan x$, ấn [tan] [ALPHA] [(–)] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1. Như vậy $\tan x=1$ $\to\cot x=1$.





* Quay lại biểu thức $\tan(X)+\frac{2\cos(X)}{\sin(X)}-3$. Ấn [SHIFT] [CALC], máy hỏi Solve for X, ấn [2] [0]. Ấn [=] ta được nghiệm là 19,95670464. Gán kết quả này vào biến nhớ B, ấn [SHIFT] [RCL] [°'"] $(\text{Ans}\to B)$.



Tính $\tan x$, ấn [tan] [ALPHA] [°'''] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 2. Như vậy $\tan x = 2 \to \cot x = \frac{1}{2}$.

Đáp án D.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức lượng giác

Kết quả rút gọn của biểu thức $P(x)$ là $P_i(x)$.

- **Bước 1:** Nhập vào máy $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P_i}(\mathrm{X})$.
- **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập các giá trị tùy ý sao cho thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức $P(x)$.
- **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả. Nếu kết quả cho ít nhất một giá trị khác 0 tại một giá trị x bất kì nào đó thì loại phương án tương ứng với kết quả đó. Nếu kết quả luôn cho giá trị bằng 0 với mọi x tùy ý thỏa mãn điều kiện xác định thì ta chọn phương án tương ứng với kết quả đó.

Ví dụ 1: Rút gọn $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$ ta được kết quả bằng

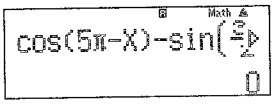
A. 0   B. $\cos x$ C. 1   D. $-2\cos x$

Lời giải

Ta có $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\cos(3\pi - x)}{\sin(3\pi - x)}$

Đưa máy tính về chế độ rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

– *Phương án A:* Nhập $\cos(5\pi - \mathrm{X}) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \mathrm{X}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \mathrm{X}\right) + \frac{\cos(3\pi - \mathrm{X})}{\sin(3\pi - \mathrm{X})}$, ấn



[cos] [5] [SHIFT] [×10ˣ] [−] [ALPHA] [)] [)] [−] [sin] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [2] [▶] [+] [ALPHA] [)] [)] [+] [tan] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [2] [▶] [−] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [−] [ALPHA] [)] [)] [▭/▭] [sin] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [−] [ALPHA] [)] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(\mathrm{X} = 1{,}5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0.

Dùng CALC với vài giá trị X khác ta đều nhận được kết quả bằng 0.

Đáp án A.

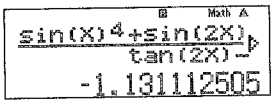
Ví dụ 2: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^4 x + \sin 2x - \cos^4 x}{\tan 2x - 1}$. Rút gọn biểu thức P ta được:

A. $P = \sin 2x$ B. $P = \sin 3x$ C. $P = \cos 2x$ D. $P = -\frac{1}{2}$

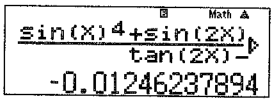
Lời giải

Đưa máy tính về chế độ rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

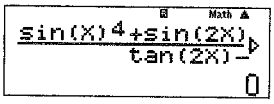
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{\sin(\mathrm{X})^4 + \sin(2\mathrm{X}) - \cos(\mathrm{X})^4}{\tan(2\mathrm{X}) - 1} - \sin(2\mathrm{X})$, ấn [▭/▭] [sin]



[ALPHA] [)] [)] [x■] [4] [▶] [+] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [cos] [ALPHA] [)] [)] [x■] [4] [▼] [tan] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [1] [▶] [−] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(\mathrm{X} = 1{,}5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-1{,}131112505 \neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{\sin(X)^4+\sin(2X)-\cos(X)^4}{\tan(2X)-1}-\sin(3X)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [•] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,01246237894\neq 0$. Loại B.



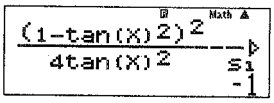
– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{\sin(X)^4+\sin(2X)-\cos(X)^4}{\tan(2X)-1}-\cos(2X)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [•] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác thì kết quả đều hiện bằng 0. Chọn C.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $A=\frac{(1-\tan^2 x)^2}{4\tan^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x.\cos^2 x}$. Chọn đáp án **đúng**

A. 1 B. –1 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

Lời giải



Nhập vào máy $\frac{\left(1-\tan(X)^2\right)^2}{4\tan(X)^2}-\frac{1}{\sin(2X)^2}$, ấn [▭/▭] [(] [1] [−] [tan] [ALPHA] [)] [)] [x²] [)] [x²] [▽] [4] [tan] [ALPHA] [)] [)] [x²] [▷] [−] [1] [▭/▭] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [x²]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [•] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng –1.

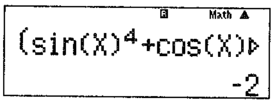
Dùng CALC với vài giá trị khác thì kết quả đều bằng –1. Chọn B.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Biểu thức $M=(\sin^4 x+\cos^4 x-1)(\tan^2 x+\cot^2 x+2)$ có giá trị không đổi bằng

A. 2 B. 1 C. –2 D. –1

Lời giải



Nhập vào máy $\left(\sin(X)^4+\cos(X)^4-1\right)\left(\tan(X)^2+\frac{\cos(X)^2}{\sin(X)^2}+2\right)$, ấn [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [xⁿ] [4] [▷] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [xⁿ] [4] [▷] [−] [1] [)] [(] [tan] [ALPHA] [)] [)] [x²] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [x²] [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [x²] [▷] [+] [2] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [•] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng –2.

Dùng CALC với vài giá trị X khác ta đều nhận được kết quả bằng –2. Chọn C.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức $P=\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}$, kết quả **đúng** là

A. $P=3$ B. $P=4$ C. $P=5$ D. $P=6$

Lời giải

Nhập vào máy $\frac{\cos(X)^3-\cos(3X)}{\cos(X)}+\frac{\sin(X)^3+\sin(3X)}{\sin(X)}$, ấn [▭/▭] [cos] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x²] [−] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [▽] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▷] [+] [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x²] [+]

[sin] [3] [ALPHA] [)] [)] [▽] [sin] [ALPHA] [)] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 3.

Dùng CALC với vài giá trị X khác ta đều nhận được kết quả bằng 3. Chọn A.

Đáp án A.

Dạng 4: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

– **Bước 1:** Đưa máy tính về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

– **Bước 2:** Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1] và [MODE] [7] (TABLE), nhập hàm số $f(X)$, ấn [=] thì máy hỏi Start?, End? và Step?. Ta sẽ sử dụng chức năng TABLE này hai lần cho cùng một hàm số $f(X)$:

+ Lần 1: Nhập $Start=0, End=180, Step=15$ (đơn vị: độ).

+ Lần 2: Nhập $Start=180, End=360, Step=15$ (đơn vị: độ).

– **Bước 3:** Sau khi nhập Start, End và Step, ấn [=] bảng giá trị của hàm số $f(X)$ sẽ hiện ra.

– **Bước 4:** Ấn [▽] để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị gồm 2 cột X và $F(X)$. Quan sát xem tại vị trí nào của biến X tương ứng với cột $F(X)$ hiện chữ ERROR thì tại đó hàm số không xác định. Ta quan sát bốn đáp án A, B, C, D rồi đối chiếu để chọn đáp án đúng nhất.

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 3x-1}$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

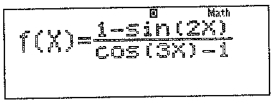
B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

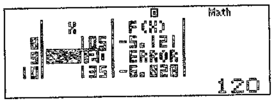
Đưa máy tính về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg)

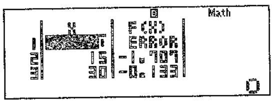


Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1] và [MODE] [7] (TABLE), nhập hàm $f(X)=\dfrac{1-\sin(2X)}{\cos(3X)-1}$. Ấn

[$\frac{\square}{\square}$] [1] [−] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [▽] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [−] [1] [=].

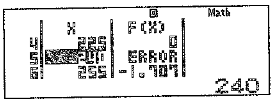
Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(End=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(Step=15)$.



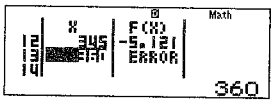


Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▽] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0$ và $X=120$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0$ và $x=120^0$ thì hàm số không xác định.

Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở về hàm số $f(X)=\dfrac{1-\sin(2X)}{\cos(3X)-1}$.



Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(Start=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(End=360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(Step=15)$.



Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=240$ và tại $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=240^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.

Vậy tại các góc $0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi(\text{rad})$ thì hàm số đã cho không xác định. Đối chiếu với bốn phương án A, B, C, D ta chỉ thấy A thỏa mãn với $k=0,k=1,k=2,k=3$.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{1+\cot^2 x}{1-\sin 3x}}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3};k,n\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3};k,n\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{5};k,n\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{5}+n\frac{2\pi}{3};k,n\in\mathbb{Z}\right\}$

STUDY TIPS

Ta có $y=\sqrt{\frac{1+\cot^2 x}{1-\sin 3x}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1-\sin 3x}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x(1-\sin 3x)}}$

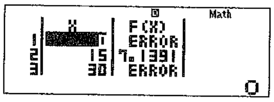
Lời giải

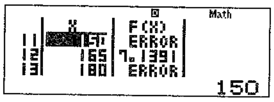
Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1] [MODE] [7] (TABLE), nhập $f(X)=\sqrt{\frac{1}{(\sin(X))^2\times(1-\sin(3X))}}$

Ấn [√] [▭/▭] [1] [▼] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [×] [(] [1] [−] [sin] [3] [ALPHA] [)] [)] [)].

Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(\text{Start}=0)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(\text{End}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

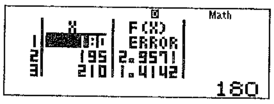


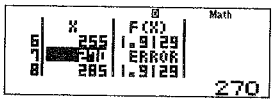


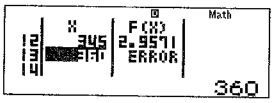
Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0,X=30,X=150$ và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0,x=30^0,x=150^0$ và $x=180^0$ thì hàm số không xác định

Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở lại hàm số $f(X)=\sqrt{\frac{1}{(\sin(X))^2\times(1-\sin(3X))}}$.

Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(\text{Start}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(\text{End}=360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.







Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180,X=270$ và tại $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180^0,x=270^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.

Vậy tại các góc $0,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi(\text{rad})$ thì hàm số đã cho không xác định. Đối chiếu với bốn phương án A, B, C, D ta chỉ thấy A thỏa mãn.

Đáp án A.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y=\tan 2x+\cot 2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

Lời giải

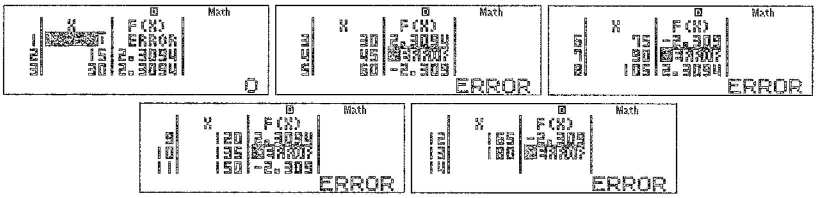
Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1] và [MODE] [7] (TABLE), nhập $f(X)=\tan(2X)+\dfrac{\cos(2X)}{\sin(2X)}$, ấn

[tan] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [2] [ALPHA] [)] [)] [÷] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)].

Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(\text{Start}=0)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(\text{End}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

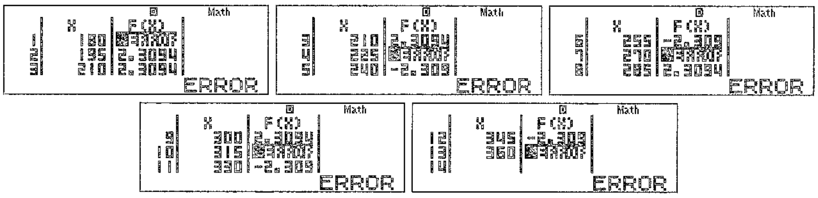
Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0, X=45, X=90, X=135, X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0°, x=45°, x=90°, x=135°$ và $x=180°$ thì hàm số không xác định.



Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở lại hàm số $f(X)=\tan(2X)+\dfrac{\cos(2X)}{\sin(2X)}$.

Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(\text{Start}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(\text{End}=360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180, X=225, X=270, X=315$ và tại $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180°, x=225°, x=270°, x=315°$ và $x=360°$ thì hàm số không xác định.



Vậy tại các góc $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}, 2\pi(\text{rad})$ thì hàm số đã cho không xác định. Đối chiếu với bốn phương án A, B, C, D ta chỉ thấy A thỏa mãn.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}}$

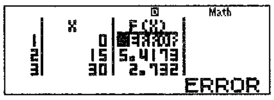
A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $D=\mathbb{R}$

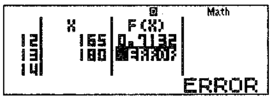
C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Lời giải

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1] và [MODE] [7] (TABLE), nhập $f(X)=\sqrt{\dfrac{1+\cos(X)}{\sin(X)^2}}$, ấn [√■] [■/■] [1] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▼] [sin] [ALPHA] [)] [)] [x^2].



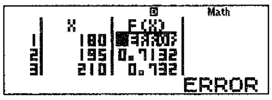


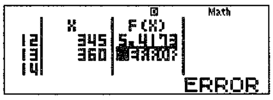
Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(\text{Start}=0)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(\text{End}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0, X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0°$ và $x=180°$ thì hàm số không xác định.

Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở lại hàm số $f(X)=\sqrt{\dfrac{1+\cos(X)}{\sin(X)^2}}$.

Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(\text{Start}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(\text{End}=360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.





Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180$ và tại $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180°$ và $x=360°$ thì hàm số không xác định.

Vậy tại các góc $0,\pi,2\pi(\text{rad})$ thì hàm số đã cho không xác định. Đối chiếu với bốn phương án A, B, C, D ta chỉ thấy C thỏa mãn.

Đáp án C.

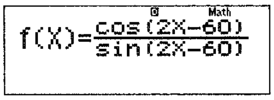
Ví dụ 5: Tìm tập xác định của hàm số $y=\cot\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

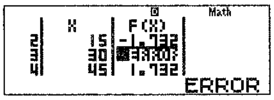
Lời giải

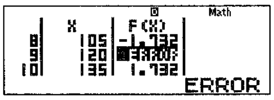
Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).



Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1] và [MODE] [7] (TABLE), nhập $f(X)=\dfrac{\cos(2X-60)}{\sin(2X-60)}$, ấn [cos] [2] [ALPHA] [)] [−] [6] [0] [)] [■/■] [sin] [2] [ALPHA] [)] [−] [6] [0] [)].

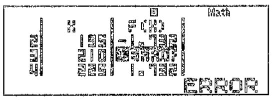
Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(\text{Start}=0)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(\text{End}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

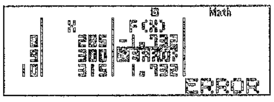




Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=30, X=120$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=30°$ và $x=120°$ thì hàm số không xác định.

Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở lại hàm số $f(X)=\dfrac{\cos(2X-60)}{\sin(2X-60)}$.





Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(\text{Start} = 180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(\text{End} = 360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step} = 15)$.

Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▼] để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X = 210$ và tại $X = 300$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x = 210°$ và $x = 300°$ thì hàm số không xác định..

Vậy tại các góc $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}(\text{rad})$ thì hàm số đã cho không xác định. Đối chiếu với bốn phương án A, B, C, D ta chỉ thấy A thỏa mãn.

Đáp án A.

ĐỌC THÊM:
Giải một số phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính cầm tay

Xét các phương trình lượng giác cơ bản:

$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$ $\qquad \sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$

$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$ $\qquad \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

Trong đó: $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy, các phương trình trên đều là bậc nhất theo *k*. Do vậy nếu gán $k = i$ trong phương thức CMPLX: [MODE] [2] ta sẽ có được họ nghiệm tương ứng.

Dạng 1: Phương trình dạng $\cos(ax+b) = m$ với $|m| \le 1$ và $a \ne 0$.

Phân tích:

$$\cos(ax+b) = m \Leftrightarrow ax+b = \pm\cos^{-1}(m) + k2\pi \Leftrightarrow \frac{ax+b \mp \left(\cos^{-1}(m) + k\times 2\pi\right)}{a} = 0.$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(aX + b - \left(\cos^{-1}(m) + Y\times 2\pi\right)\right) \div a$.

* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$ (đổi dấu kết quả của máy và thay chữ *i* bởi chữ *k*).

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $\left(aX + b - \left(-\cos^{-1}(m) + Y\times 2\pi\right)\right) \div a$.

* **Bước 5:** Ấn [CALC], nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma + \delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\gamma - k\delta, (k \in \mathbb{Z})$.

CHÚ Ý

Ta cũng có thể thực hiện tương tự nếu đơn vị góc của bài toán là độ. Tuy nhiên, trước khi nhập vào máy cần đưa về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

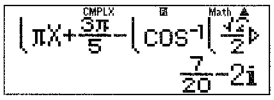
Chú ý: $\pi(\text{rad}) = 180°$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cos\left(\pi x + \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

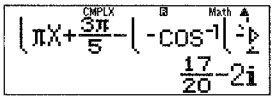
* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(\pi X + \frac{3\pi}{5} - \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y\times 2\pi\right)\right) \div \pi$, ấn [(] [SHIFT] [×10^x] [ALPHA] [)] [+] [3] [SHIFT] [×10^x] [▭/▭] [5] [▶] [−] [(] [SHIFT] [cos] [√▭] [2] [▶] [▭/▭] [2] [▶] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [2] [SHIFT] [×10^x] [)] [)] [÷] [SHIFT] [×10^x].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X = 0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y = i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{7}{20} - 2i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\frac{7}{20} + 2k, (k \in \mathbb{Z})$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(\pi X + \frac{3\pi}{5} - \left(-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y\times 2\pi\right)\right) \div \pi$.



* Bước 5: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X = 0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y = i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{17}{20} - 2i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{-17}{20}+2k,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy $\cos\left(\pi x+\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7}{20}+2k\\x=\frac{-17}{20}+2k\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Dạng 2: Phương trình dạng $\sin\left(ax+b\right)=m$ với $|m|\le 1$ và $a\ne 0$.

Phân tích:

$$\sin\left(ax+b\right)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b=\sin^{-1}\left(m\right)+k2\pi\\ax+b=\pi-\sin^{-1}\left(m\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{ax+b-\left(\sin^{-1}\left(m\right)+k2\pi\right)}{a}=0\\\frac{ax+b-\left(\pi-\sin^{-1}\left(m\right)+k2\pi\right)}{a}=0\end{array}\right.$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(aX+b-\left(\sin^{-1}\left(m\right)+Y\times 2\pi\right)\right)\div a$.

* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $\left(aX+b-\left(\pi-\sin^{-1}\left(m\right)+Y\times 2\pi\right)\right)\div a$.

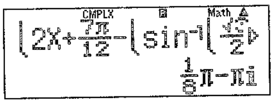
* **Bước 5:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma+\delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x=-\gamma-k\delta,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\sin\left(2x+\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

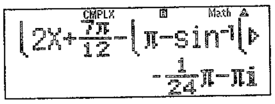
* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(2X+\frac{7\pi}{12}-\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+Y\times 2\pi\right)\right)\div 2$, ấn [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [7] [SHIFT] [×10^x] [▭/▭] [1] [2] [▶] [−] [(] [SHIFT] [sin] [√▭] [3] [▶] [▭/▭] [2] [▶] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [2] [SHIFT] [×10^x] [)] [)] [÷] [2].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $\left(X=0\right)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $\left(Y=i\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{\pi}{8}-\pi i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\frac{\pi}{8}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(2X+\frac{7\pi}{12}-\left(\pi-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+Y\times 2\pi\right)\right)\div 2$.



* Bước 5: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $\left(X=0\right)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $\left(Y=i\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{24}-\pi i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{\pi}{24}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy $\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{24}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 3: Phương trình dạng $\tan(ax+b)=m$ với $a\neq 0$.

Phân tích:

$$\tan(ax+b)=m \Rightarrow ax+b=\tan^{-1}(m)+k\pi \Leftrightarrow \frac{ax+b-\left(\tan^{-1}(m)+k\pi\right)}{a}=0$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(aX+b-\left(\tan^{-1}(m)+Y\times\pi\right)\right)\div a$.

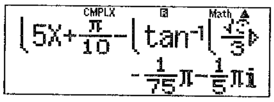
* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\tan\left(5x+\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(5X+\dfrac{\pi}{10}-\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+Y\times\pi\right)\right)\div 5$, ấn [(] [5] [ALPHA] [)] [+] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [1] [0] [▶] [−] [(] [SHIFT] [tan] [√▭] [3] [▶] [▭/▭] [3] [▶] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [SHIFT] [×10ˣ] [)] [)] [÷] [5].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{\pi}{75}-\dfrac{\pi}{5}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\dfrac{\pi}{75}+k\dfrac{\pi}{5},(k\in\mathbb{Z})$.

Như vậy $\tan\left(5x+\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{75}+k\dfrac{\pi}{5},(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 4: Phương trình dạng $\cot(ax+b)=m$ với $m\neq 0$ và $a\neq 0$

Phân tích:

$$\cot(ax+b)=m \Leftrightarrow \tan(ax+b)=\frac{1}{m} \Rightarrow ax+b=\tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax+b-\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\right)+k\pi\right)}{a}=0$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(aX+b-\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\right)+Y\times\pi\right)\right)\div a$.

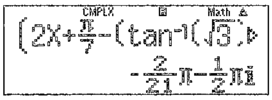
* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cot\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(2X+\frac{\pi}{7}-\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)+Y\times\pi\right)\right)\div 2$, ấn [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [SHIFT] [×10^x] [▭] [7] [▶] [−] [(] [SHIFT] [tan] [√] [3] [▶] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [SHIFT] [×10^x] [)] [)] [÷] [2].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\frac{2\pi}{21}-\frac{\pi}{2}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{2\pi}{21}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Như vậy $\cot\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{21}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 5: Phương trình dạng $\cos(ax+b)=\cos(cx+d)$ với $a\neq\pm c$.

Phân tích:

$$\cos(ax+b)=\cos(cx+d)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b=cx+d+k2\pi\\ ax+b=-(cx+d)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{ax+b-(cx+d+k2\pi)}{a-c}=0\\ \dfrac{ax+b-(-cx-d+k2\pi)}{a+c}=0\end{array}\right.$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX+b-(cX+d+Y\times 2\pi))\div(a-c)$.

* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,(k\in\mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX+b-(-cX-d+Y\times 2\pi))\div(a+c)$.

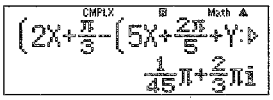
* **Bước 5:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma+\delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x=-\gamma-k\delta,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

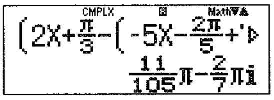
* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(2X+\frac{\pi}{3}-\left(5X+\frac{2\pi}{5}+Y\times 2\pi\right)\right)\div(-3)$, ấn [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [SHIFT] [×10^x] [▭] [3] [▶] [−] [(] [5] [ALPHA] [)] [+] [2] [SHIFT] [×10^x] [▭] [5] [▶] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [2] [SHIFT] [×10^x] [)] [)] [÷] [(] [(−)] [3] [)].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{\pi}{45}+\frac{2\pi}{3}i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\dfrac{\pi}{45}-k\dfrac{2\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$ hay $-\dfrac{\pi}{45}+k\dfrac{2\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(2X+\dfrac{\pi}{3}-\left(-5X-\dfrac{2\pi}{5}+Y\times 2\pi\right)\right)\div 7$.



* Bước 5: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\dfrac{11\pi}{105}-\dfrac{2\pi}{7}i$.

Vậy họ nghiệm khác là $-\dfrac{11\pi}{105}+k\dfrac{2\pi}{7},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(5x+\dfrac{2\pi}{5}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{45}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{11\pi}{105}+k\dfrac{2\pi}{7}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 6: Phương trình dạng $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$ với $a\neq\pm c$.

CHÚ Ý

Nếu phương trình có dạng $\sin u=\cos v$, thì ta biến đổi về $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\cos v$ (dạng 5) hoặc biến đổi về $\sin u=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-v\right)$ (dạng 6).

Phân tích:

$$\sin(ax+b)=\sin(cx+d)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b=cx+d+k2\pi\\ ax+b=\pi-(cx+d)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{ax+b-(cx+d+k2\pi)}{a-c}=0\\ \dfrac{ax+b-(\pi-cx-d+k2\pi)}{a+c}=0\end{array}\right.$$

Quy trình bấm máy:

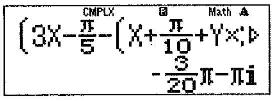
* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).
* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX+b-(cX+d+Y\times 2\pi))\div(a-c)$.
* **Bước 3:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,(k\in\mathbb{Z})$.
* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX+b-(\pi-cX-d+Y\times 2\pi))\div(a+c)$.
* **Bước 5:** Ấn [CALC], nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn [=] máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma+\delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x=-\gamma-k\delta,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{10}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

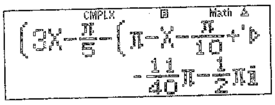
* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(3X-\dfrac{\pi}{5}-\left(X+\dfrac{\pi}{10}+Y\times 2\pi\right)\right)\div 2$, ấn [(] [3] [ALPHA] [)] [−] [SHIFT] [×10^x] [▭/▭] [5] [▶] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [SHIFT] [×10^x] [▭/▭] [1] [0] [▶] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [2] [SHIFT] [×10^x] [)] [)] [÷] [2].



* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{3\pi}{20}-\pi i$.

Vậy một họ nghiệm là $\dfrac{3\pi}{20}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(3X-\dfrac{\pi}{5}-\left(\pi-X-\dfrac{\pi}{10}+Y\times 2\pi\right)\right)\div 4$.



* Bước 5: Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 0 $(X=0)$. Ấn = máy hỏi Y? Nhập ENG $(Y=i)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $-\frac{11\pi}{40}-\frac{\pi}{2}i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{11\pi}{40}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{10}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{20}+k\pi\\x=\frac{11\pi}{40}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 7: Phương trình dạng $\tan(ax+b)=\tan(cx+d)$ với $a\neq c$

Phân tích:

$$\tan(ax+b)=\tan(cx+d)\Rightarrow ax+b=cx+d+k\pi\Leftrightarrow\frac{ax+b-(cx+d+k\pi)}{a-c}=0$$

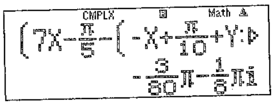
Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: MODE 2 và chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).
* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX+b-(cX+d+Y\times\pi))\div(a-c)$.
* **Bước 3:** Ấn CALC, nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn = máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha+\beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x=-\alpha-k\beta,(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\tan\left(7x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(-x+\frac{\pi}{10}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: MODE 2 và chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).
* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(7X-\frac{\pi}{5}-\left(-X+\frac{\pi}{10}+Y\times\pi\right)\right)\div8$, ấn (7 ALPHA) − SHIFT x10x ▤ 5 ▶ − ((−) ALPHA) + SHIFT x10x ▤ 1 0 ▶ + ALPHA S⇔D × SHIFT x10x)) ÷ 8.



* Bước 3: Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 0 $(X=0)$. Ấn = máy hỏi Y? Nhập ENG $(Y=i)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $-\frac{3\pi}{80}-\frac{\pi}{8}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{3\pi}{80}+k\frac{\pi}{8},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\tan\left(7x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(-x+\frac{\pi}{10}\right)\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{80}+k\frac{\pi}{8},(k\in\mathbb{Z})$.

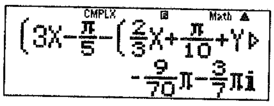
Dạng 8: Phương trình dạng $\cot(ax+b)=\cot(cx+d)$ với $a\neq c$

Ta thấy $\cot(ax+b)=\cot(cx+d)\Rightarrow\tan(ax+b)=\tan(cx+d)$. Như vậy ta đưa được phương trình về dạng 7, các bước bấm máy thực hiện tương tự như ở dạng 7.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cot\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\cot\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{10}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: MODE 2 và chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).



* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(3X-\frac{\pi}{5}-\left(\frac{2}{3}X+\frac{\pi}{10}+Y\times\pi\right)\right)\div\frac{7}{3}$, ấn

[(] [3] [ALPHA] [)] [−] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [5] [▷] [−] [(] [2] [▭] [3] [▷] [ALPHA] [)] [+] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [1] [0] [▷] [+] [ALPHA] [S⇔D] [×] [SHIFT] [×10ˣ] [)] [)] [÷] [7] [▭] [3].

* Bước 3: Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập [ENG] $(Y=i)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\frac{9}{70}\pi-\frac{3}{7}\pi i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{9\pi}{70}+k\frac{3\pi}{7},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $\cot\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\cot\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{10}\right)\Leftrightarrow x=\frac{9\pi}{70}+k\frac{3\pi}{7},(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 9: Phương trình lượng giác chứa $\alpha\sin(ax+b)+\beta\sin(ax+c)$, hoặc chứa $\alpha\cos(ax+b)+\beta\cos(ax+c)$

Nhận biết:

Hàm dưới dấu lượng giác là bậc nhất (theo x) và các hệ số của x bằng nhau.

Phương pháp:

Trong phương thức CMPLX: [MODE] [2], sử dụng phím [SHIFT] [(−)] $(\angle)$.

Ta kí hiệu $\begin{cases}\alpha\sin(ax+b)=\alpha\angle b\\ \beta\cos(cx+d)=\beta\angle d\end{cases}(\alpha,\beta>0)$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) hoặc [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

* **Bước 2:** Tính $\alpha\sin(ax+b)+\beta\sin(ax+c)$, hoặc tính $\alpha\cos(ax+b)+\beta\cos(ax+c)$. Nhập vào máy $\alpha\angle b+\beta\angle c$. Ấn [=] máy hiện kết quả ở dạng $m+ni$, ấn tiếp [SHIFT] [MODE] [▽] [3] [2], kết quả hiển thị dưới dạng $\gamma\angle\delta$.

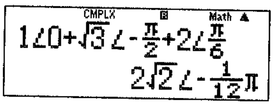
Như vậy $\left[\begin{array}{l}\alpha\sin(ax+b)+\beta\sin(ax+c)=\gamma\sin(ax+m)\\ \alpha\cos(ax+b)+\beta\cos(ax+c)=\gamma\cos(ax+m)\end{array}\right.$

Ví dụ 1: Giải phương trình lượng giác $\cos x+\sqrt{3}\sin x+2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2$

Lời giải

Phương trình tương đương với $\cos x+\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2$

* Bước 1: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2] và chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).



* Bước 2: Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [3] [2]. Nhập vào máy $1\angle 0+\sqrt{3}\angle-\frac{\pi}{2}+2\angle\frac{\pi}{6}$, ấn [1] [SHIFT] [(−)] [0] [+] [√▭] [3] [▷] [SHIFT] [(−)] [(−)] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [2] [▷] [+] [2] [SHIFT] [(−)] [×10ˣ] [▭] [6]. Ấn [=] máy hiện kết quả $2\sqrt{2}\angle-\frac{1}{12}\pi$.

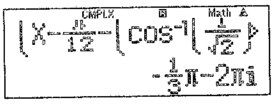
Vậy phương trình trương đương với $2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=2\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (phương trình này có dạng 1).

Ví dụ 2: Giải phương trình $\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

* Bước 1: Nhập vào màn hình $\left(X-\frac{\pi}{12}-\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+Y\times 2\pi\right)\right)$, ấn (ALPHA) =

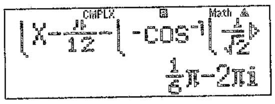
SHIFT $\times10^x$ ▭ 1 2 ▶ − (SHIFT cos 1 ▭ √ 2 ▶ ▶) + ALPHA S⇔D × 2 SHIFT $\times10^x$)).



* Bước 2: Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 0 $(X=0)$. Ấn = máy hỏi Y? Nhập ENG $(Y=i)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $-\frac{1}{3}\pi-2\pi i$.

$\longrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

* Bước 3: Sửa màn hình thành $\left(X-\frac{\pi}{12}-\left(-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+Y\times 2\pi\right)\right)$.



* Bước 4: Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 0 $(X=0)$. Ấn = máy hỏi Y? Nhập ENG $(Y=i)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $\frac{1}{6}\pi-2\pi i$.

$\longrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ và $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Dạng 10: Phương trình dạng $C\cos(ax+b)+S\sin(ax+b)=m$ với $C^2+S^2\geq m^2$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

* **Bước 2:** Tại phương thức COMP: MODE 1. Nhập $\mathrm{Pol}(C,S)$, ấn = máy hiện kết quả ở dạng tọa độ cực gồm r và θ. Khi đó trong máy, hai giá trị r và θ tự động được lưu vào các biến nhớ X và Y. Gán $\cos^{-1}\left(\frac{m}{X}\right)\to X$.

* **Bước 3:** Đưa máy về phương thức CMPLX: MODE 2. Gán $a+bi-Yi\to A$ và gán $Xi\to B$.

* **Bước 4:** Nhập vào màn hình $\mathrm{Conjg}(A-B)$, ấn = máy hiện kết quả dạng $\alpha+\beta i$.

Suy ra $x=\frac{\beta}{\alpha}+k\frac{2\pi}{\alpha},(k\in\mathbb{Z})$.

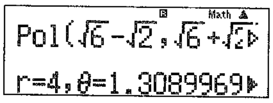
* **Bước 5:** Nhập vào màn hình $\mathrm{Conjg}(A+B)$, ấn = máy hiện kết quả dạng $\gamma+\delta i$.

Suy ra $x=\frac{\delta}{\gamma}+k\frac{2\pi}{\gamma},(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$

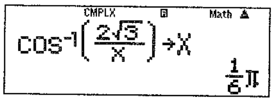
Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

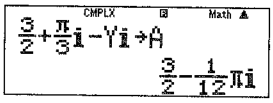


* Bước 2: Tại phương thức COMP: [MODE] [1]. Nhập vào màn hình $\mathrm{Pol}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$, ấn [SHIFT] [+] [√■] [6] [▶] [−] [√■] [2] [▶] [SHIFT] [)] [√■] [6] [▶] [+] [√■] [2] [▶] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả $r=4,\theta=1,3089969...$

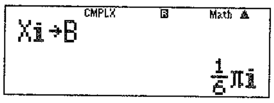
Khi đó r và θ sẽ tự động được lưu vào hai biến nhớ X và Y.



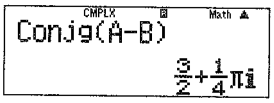
Gán $\cos^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{X}\right)\to X$, ấn [SHIFT] [cos] [2] [√■] [3] [▶] [■/■] [ALPHA] [)] [▶] [)] [SHIFT] [RCL] [)].



* Bước 3: Đưa máy về phương thức CMPLX: [MODE] [2]. Gán $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\pi}{3}i-Yi\to A$, ấn [3] [■/■] [2] [▶] [+] [SHIFT] [×10^x] [■/■] [3] [▶] [ENG] [−] [ALPHA] [S⇔D] [ENG] [SHIFT] [RCL] [(−)].

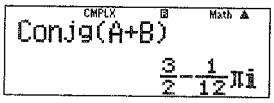


Gán $Xi\to B$, ấn [ALPHA] [)] [ENG] [SHIFT] [RCL] [°'''].



* Bước 4: Nhập vào màn hình $\mathrm{Conjg}(A-B)$, ấn [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'''] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}\pi i\to x=\dfrac{\pi/4}{3/2}+k\dfrac{2\pi}{3/2}=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{4\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.



* Bước 4: Nhập vào màn hình $\mathrm{Conjg}(A+B)$. Ấn [=] máy hiện kết quả $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{12}\pi i\to x=\dfrac{-\pi/12}{3/2}+k\dfrac{2\pi}{3/2}=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{4\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức lượng giác chứa các góc đặc biệt

Câu 1: Cho $P=\tan^2\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}$. Giá trị của biểu thức P là:

A. $-\frac{5}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. –1

Câu 2: Tính $A=\frac{1}{\tan 368^0}+\frac{2\sin 2550^0\cos\left(-188^0\right)}{2\cos 638^0+\cos 98^0}$

A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Câu 3: Cho $M=\frac{1+\cos 1800^0\tan\left(-390^0\right)}{\tan\left(-420^0\right)}$. Giá trị của biểu thức M là:

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1-2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1-3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4-\sqrt{3}}{3}$

Câu 4: Tính giá trị của biểu thức:

$P=\sin^6 10°+\cos^6 10°-2\sin^4 10°-\cos^4 10°+\sin^2 10°$

A. 0 B. –0,5 C. 1 D. –1,5

Câu 5: Tính $P=\frac{\cos 750^0+\sin 420^0}{\sin\left(-330^0\right)-\cos\left(-390^0\right)}$.

A. $-3+\sqrt{3}$ B. $3-\sqrt{3}$ C. $-3-\sqrt{3}$ D. $3+\sqrt{3}$

Dạng 2: Dựa vào giả thiết cho trước, tính giá trị của một biểu thức lượng giác

Câu 6: Cho $\cot\alpha=-\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Chọn đáp án **đúng?**

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 7: Cho $\tan\alpha=2$ và $\pi<\alpha<2\pi$. Chọn đáp án **đúng?**

A. $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ B. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

C. $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 8: Cho $\sin x=\frac{3}{5}$ và $0^0<x<90^0$. Chọn đáp án **đúng?**

A. $\tan x=\frac{3}{4}$ B. $\cot x=\frac{4}{3}$

C. $\cos x=\frac{4}{5}$ D. A, B, C đều đúng.

Câu 9: Cho $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$:

A. $\frac{7}{19}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $\frac{17}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

Câu 10: Cho $\cos a=\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\cot a+3\tan a}{2\cot a+\tan a}$. Chọn kết quả **đúng?**

A. $A=\frac{19}{13}$ B. $A=\frac{14}{3}$ C. $A=\frac{19}{3}$ D. $A=\frac{1}{3}$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức lượng giác

Đề bài: Tính giá trị (rút gọn) các biểu thức sau:

Câu 11: $A=\sqrt{2}-\frac{1}{\sin\left(x+2013\pi\right)}\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}$

với $\pi<x<2\pi$

A. $-\sqrt{2}\cot^2 x$ B. $2\cot^2 x$

C. $-\sqrt{3}\cot^2 x$ D. $-\cot^2 x$

Câu 12: $B=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x+2}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\cos x$ C. 1 D. $-2\cos x$

Câu 13: $D=\frac{\left(\cos 3x+3\cos x\right)\left(1+\tan^2 x\right)}{2\sin 2x\left(\tan x+\cot x\right)}$

A. $\frac{3}{2}$ B. $\cos x$ C. 1 D. $-2\cos x$

Câu 14: $E=\frac{\sin\left(5\pi+x\right).\cos\left(x-\frac{9\pi}{2}\right).\tan\left(10\pi+x\right)}{\cos\left(5\pi-x\right).\sin\left(\frac{11\pi}{2}+x\right).\tan\left(7\pi-x\right)}$

A. $\tan^2 x$ B. $-\sin x$ C. $-2\cos x$ D. $\cos x$

Câu 15: $P=\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

A. $P=8\cos 2x$ B. $P=8\cos x$

C. $P=8\sin 2x$ D. $P=8\sin x$

Câu 16: $P=\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}$

A. $\sin 2x$ B. $2\cos x$ C. $\cos 2x$ D. $2\sin x$

Câu 17: $P=\frac{2\left(\sin 2x+2\cos^2 x-1\right)}{\cos x-\sin x-\cos 3x+\sin 3x}$

A. $\sin x$ B. $\frac{1}{\sin x}$ C. $\cos x$ D. $\frac{1}{\cos x}$

Câu 18: $P=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 3 D. 2

Câu 19: $P=\sin x\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

Câu 20: $P=\sin^6 x+\cos^6 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x$

A. 0 B. –0,5 C. 1 D. –1,5

Dạng 4: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 23: Tập xác định của hàm số $y=\tan 3x.\cot 5x$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3},k\frac{\pi}{5};k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{5}+k\frac{\pi}{3},k\frac{\pi}{5};k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{4},k\frac{\pi}{5};k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},k\frac{\pi}{5};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 24: Hàm số $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ có tập xác định là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{5}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{5}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=\sin 2x+\frac{1}{\cos x}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

B. $D=\mathbb{R}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 27: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{2\sin x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{4}+k2\pi,\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{6}+k2\pi,\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{4}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}+k2\pi,\frac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 28: Tập xác định của hàm $y=\frac{2\cos^2 x}{\tan 2x}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

Câu 29: Hàm số $y=\frac{\tan 2x}{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x}$ có tập xác định là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{5}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\cot x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi,k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa góc đặc biệt

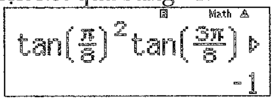
Câu 1: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào máy $\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)$:

[tan] [SHIFT] [×10^x] [□/□] [8] [▶] [)] [x²] [tan] [3] [SHIFT] [×10^x] [□/□] [8] [▶] [)] [tan] [5] [SHIFT] [×10^x] [□/□] [8] [▶] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng –1.

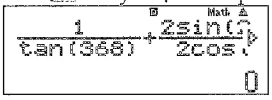


Câu 2: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào máy $\frac{1}{\tan(368)}+\frac{2\sin(2550)\cos(-188)}{2\cos(638)+\cos(98)}$

[1] [□/□] [tan] [3] [6] [8] [)] [▶] [+] [2] [sin] [2] [5] [5] [0] [)] [cos] [(–)] [1] [8] [8] [)] [□/□] [2] [cos] [6] [3] [8] [)] [+] [cos] [9] [8] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0.



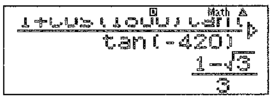
Câu 3: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào máy $\frac{1+\cos(1800)\tan(-390)}{\tan(-420)}$

[□/□] [1] [+] [cos] [1] [8] [0] [0] [)] [tan] [(–)] [3] [9] [0] [)] [▼] [tan] [(–)] [4] [2] [0] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$.



Câu 4: Đáp án A.

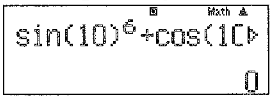
Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào màn hình:

$$(\sin(10))^6+(\cos(10))^6-2(\sin(10))^4-(\cos(10))^4+(\sin(10))^2$$

[sin] [1] [0] [)] [x^■] [6] [▶] [+] [cos] [1] [0] [)] [x^■] [6] [▶] [–] [2] [sin] [1] [0] [)] [x^■] [4] [▶] [–] [cos] [1] [0] [)] [x^■] [4] [▶] [+] [sin] [1] [0] [)] [x²].

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0.



Câu 5: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

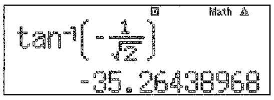
Nhập vào máy $\frac{\cos(750)+\sin(420)}{\sin(-330)-\cos(-390)}$, ấn [□/□] [cos] [7] [5] [0] [)] [+] [sin] [4] [2] [0] [)] [▼] [sin] [(–)] [3] [3] [0] [)] [–] [cos] [(–)] [3] [9] [0] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-3-\sqrt{3}$.

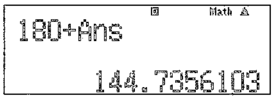
Dạng 2: Dựa vào giả thiết cho trước, tính giá trị của một biểu thức lượng giác

Câu 6: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

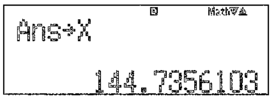
Nhập vào màn hình $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-35,26438968$.



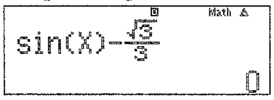


Do $90°<\alpha<270°$ nên $\alpha=180+\text{Ans}=144,7356103$.

Gán kết quả này vào $X\left(\text{Ans}\to X\right)$.



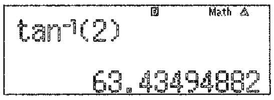
– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\sin(X)-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

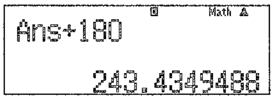


Câu 7: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

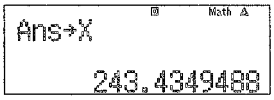
Nhập vào màn hình $\tan^{-1}(2)$, ấn [=] máy hiện kết quả bằng $63,43494882$.



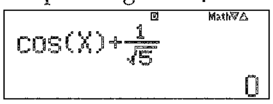


Do $180°<\alpha<360°$ nên $\alpha=\text{Ans}+180=243,4349488$.

Gán kết quả này vào biến nhớ $X\left(\text{Ans}\to X\right)$.



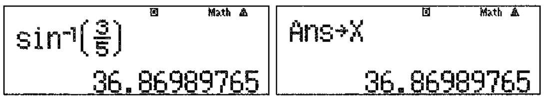
– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\cos(X)+\frac{1}{\sqrt{5}}$, ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



Câu 8: Đáp án D.

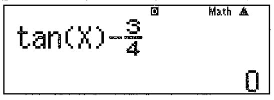
Đưa máy về chế độ [SHIFT] [MODE] [3] (Deg).

Nhập vào màn hình $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $36,86989765$.

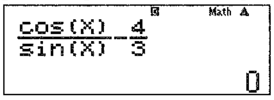


Do $0° < x < 90°$ nên $x = \text{Ans}$. Gán kết quả này vào biến nhớ $X(\text{Ans} \to X)$.

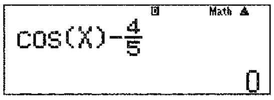
– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\tan(X) - \frac{3}{4}$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng 0. Vậy A đúng.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\frac{\cos(X)}{\sin(X)} - \frac{4}{3}$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng 0. Vậy B đúng.



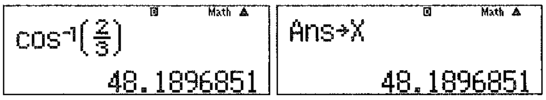
– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\cos(X) - \frac{4}{5}$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng 0. Vậy C đúng.



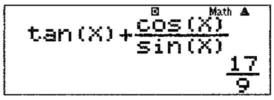
Câu 9: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

Nhập vào màn hình $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $48,1896851$. Gán kết quả này vào biến nhớ $X(\text{Ans} \to X)$.



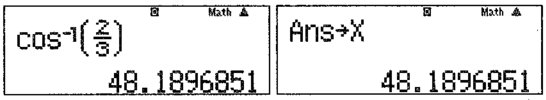
Nhập vào máy $\dfrac{\tan(X) + \dfrac{3\cos(X)}{\sin(X)}}{\tan(X) + \dfrac{\cos(X)}{\sin(X)}}$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $\frac{17}{9}$.



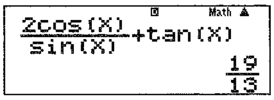
Câu 10: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

Nhập vào màn hình $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $48,1896851$. Gán kết quả này vào biến nhớ $X(\text{Ans} \to X)$.



Nhập vào màn hình $\dfrac{\dfrac{\cos(X)}{\sin(X)} + 3\tan(X)}{\dfrac{2\cos(X)}{\sin(X)} + \tan(X)}$, ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $\frac{19}{13}$.



Dạng 3: Rút gọn biểu thức lượng giác

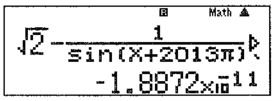
Câu 11: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình:

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sin(X + 2013\pi)}\sqrt{\frac{1}{1+\cos(X)} + \frac{1}{1-\cos(X)}} + \frac{\sqrt{2}(\cos(X))^2}{(\sin(X))^2}$$

Ấn CALC, nhập $X = \frac{13\pi}{10}$ do $X \in (\pi; 2\pi)$. Ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng $-1,8872 \times 10^{-11} \approx 0$.



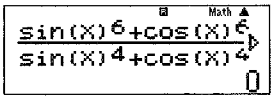
Dùng CALC với các giá trị $X \in (\pi; 2\pi)$ khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

Câu 12: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập $\dfrac{(\sin(X))^6 + (\cos(X))^6 + 2}{(\sin(X))^4 + (\cos(X))^4 + 1} - \dfrac{3}{2}$.

Ấn CALC, nhập $X = 1,5$. Ấn ⊟ máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



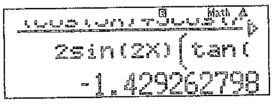
Câu 13: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{\left(\cos(3X)+3\cos(X)\right)\left(1+\left(\tan(X)\right)^2\right)}{2\sin(2X)\left(\tan(X)+\frac{\cos(X)}{\sin(X)}\right)}-\frac{3}{2}$$

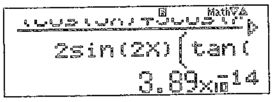
Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $-1,429262798\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình:

$$\frac{\left(\cos(3X)+3\cos(X)\right)\left(1+\left(\tan(X)\right)^2\right)}{2\sin(2X)\left(\tan(X)+\frac{\cos(X)}{\sin(X)}\right)}-\cos(X).$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $3,89\times10^{-14}\approx 0$.



Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.

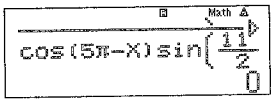
Câu 14: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{\sin(5\pi+X)\cos\left(X-\frac{9\pi}{2}\right)\tan(10\pi+X)}{\cos(5\pi-X)\sin\left(\frac{11\pi}{2}+X\right)\tan(7\pi-X)}-\left(\tan(X)\right)^2$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



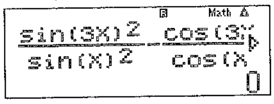
Câu 15: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{\left(\sin(3X)\right)^2}{\left(\sin(X)\right)^2}-\frac{\left(\cos(3X)\right)^2}{\left(\cos(X)\right)^2}-8\cos(2X)$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



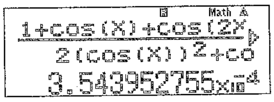
Câu 16: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{1+\cos(X)+\cos(2X)+\cos(3X)}{2\left(\cos(X)\right)^2+\cos(X)-1}-\sin(2X)$$

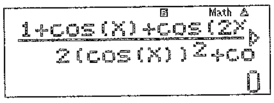
Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $3,543952755\times10^{-4}\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{1+\cos(X)+\cos(2X)+\cos(3X)}{2\left(\cos(X)\right)^2+\cos(X)-1}-2\cos(X)$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.



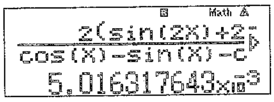
Câu 17: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{2\left(\sin(2X)+2\left(\cos(X)\right)^2-1\right)}{\cos(X)-\sin(X)-\cos(3X)+\sin(3X)}-\sin(X)$$

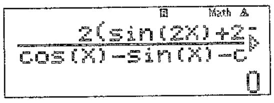
Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $5,016317643\times10^{-3}\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{2\left(\sin(2X)+2\left(\cos(X)\right)^2-1\right)}{\cos(X)-\sin(X)-\cos(3X)+\sin(3X)}-\frac{1}{\sin(X)}$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với các giá trị X khác đều nhận được kết quả bằng 0.



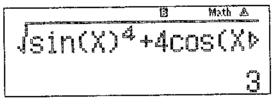
Câu 18: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

Nhập vào màn hình

$$\sqrt{\left(\sin(X)\right)^4+4\left(\cos(X)\right)^2}+\sqrt{\left(\cos(X)\right)^4+4\left(\sin(X)\right)^2}$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 3. Chọn C.

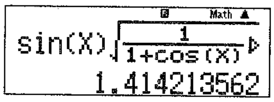


Câu 19: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

Nhập vào máy $\sin(X)\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos(X)}+\dfrac{1}{1-\cos(X)}}$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $1,414213562=\sqrt{2}$.



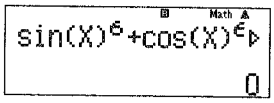
Câu 20: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 4 (Rad).

Nhập vào màn hình

$$(\sin(X))^6+(\cos(X))^6-2(\sin(X))^4-(\cos(X))^4+(\sin(X))^2$$

Ấn CALC, nhập $X=1,5$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

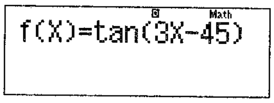


Dạng 4: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Câu 21: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập hàm $f(X)=\tan(3X-45)$.

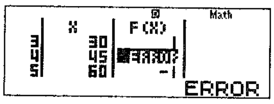


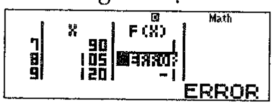
Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(\text{Start}=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(\text{End}=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=45$ và $X=105$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=45^0$ và $x=105^0$ thì hàm số không xác định.

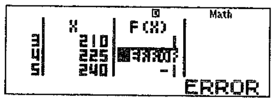


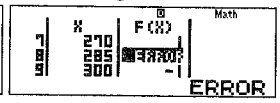


Nhập lần 2: Ấn AC về hàm số $f(X)=\tan(3X-45)$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(\text{Start}=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(\text{End}=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=225$ và tại $X=285$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=225^0$ và $x=285^0$ thì hàm số không xác định.



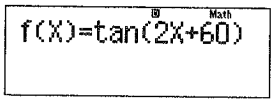


Vậy tại các góc $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{19\pi}{12}$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy A là thỏa mãn.

Câu 22: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập hàm $f(X)=\tan(2X+60)$.

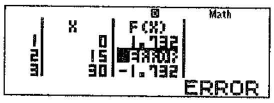


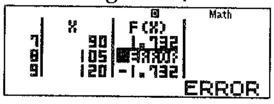
Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(\text{Start}=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(\text{End}=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=15$ và $X=105$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=15^0$ và $x=105^0$ thì hàm số không xác định.

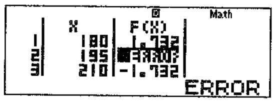


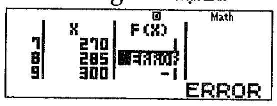


Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\tan(2X+60)$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(\text{Start}=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(\text{End}=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=195$ và tại $X=285$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=195^0$ và $x=285^0$ thì hàm số không xác định.





Vậy tại các góc $\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12},\dfrac{19\pi}{12}$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy B là thỏa mãn.

Câu 23: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

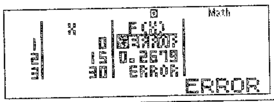
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập vào máy tính hàm số $f(X)=\tan(3X)\times\dfrac{\cos(5X)}{\sin(5X)}$.

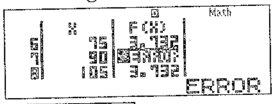
Nhập lần 1: Ấn ≡ máy hỏi Start?, ấn 0 $(\text{Start}=0)$.

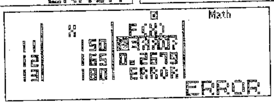
Ấn ≡ tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(\text{End}=180)$.

Ấn ≡ tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn ≡ bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0, X=30, X=90, X=150$ và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0, x=30^0$ $x=90^0$, $x=150^0$, $x=180^0$ thì hàm số không xác định.



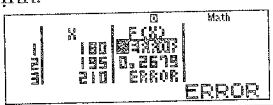


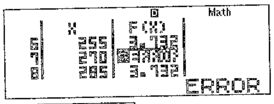


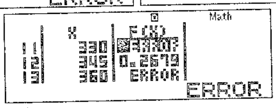
Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\tan(3X)\times\dfrac{\cos(5X)}{\sin(5X)}$.

Ấn ≡ máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(\text{Start}=180)$. Ấn ≡ tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(\text{End}=360)$. Ấn ≡ tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn ≡ bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180, X=210, X=270, X=330$ và $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180^0$, $x=210^0$, $x=270^0$, $x=330^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.







Vậy tại các góc $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy D là thỏa mãn.

Lưu ý: Ta thấy $y=\tan 3x.\cot 5x=\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$ nên sẽ có nhiều bạn nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{\tan(3X)}{\tan(5X)}$. Tuy nhiên điều này là **tuyệt đối không nên**, bởi vì hàm số $y=\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \tan 5x\neq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \sin 5x.\cos 5x\neq 0\end{cases}$ (1), còn hàm số đề cho ban đầu $y=\tan 3x.\cot 5x$ xác định khi $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \sin 5x\neq 0\end{cases}$ (2). Hai điều kiện (1) và (2) hoàn toàn khác nhau nên sẽ ra những điều kiện khác nhau của x và đáp án có thể sẽ không được chính xác. Như vậy, đối với bất kì bài toán tìm tập xác định mà hàm số chứa $\cot(u(x))$ thì khi nhập vào máy, ta nên nhập dưới dạng $\dfrac{\cos(u(X))}{\sin(u(X))}$, còn hàm $\tan(u(x))$ thì không cần thiết nhập như vậy.

Câu 24: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

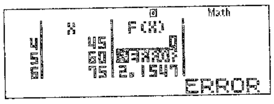
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập vào máy tính hàm số $f(X)=\tan(X-45)\times\dfrac{\cos(X-60)}{\sin(X-60)}$

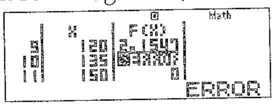
Nhập lần 1: Ấn ≡ máy hỏi Start?, ấn 0 $(\text{Start}=0)$.

Ấn ≡ tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(\text{End}=180)$.

Ấn ≡ tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn ≡ bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=60$ và $X=135$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=60^0$ và $x=135^0$ thì hàm số không xác định.

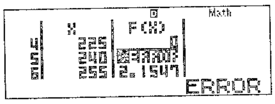


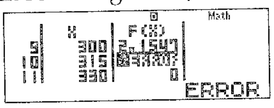


Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\tan(X-45)\times\dfrac{\cos(X-60)}{\sin(X-60)}$.

Ấn ≡ máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(\text{Start}=180)$. Ấn ≡ tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(\text{End}=360)$. Ấn ≡ tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(\text{Step}=15)$.

Ấn ≡ bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=240$ và $X=315$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=240^0$ và $x=315^0$ thì hàm số không xác định.





Vậy tại các góc $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy D là thỏa mãn. Chọn đáp án D.

Câu 25: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

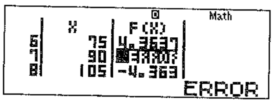
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập vào máy tính hàm số $f(X)=\sin(2X)+\dfrac{1}{\cos(X)}$.

Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(End=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

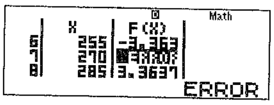
Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=90$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=90^0$ thì hàm số không xác định.



Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\sin(2X)+\dfrac{1}{\cos(X)}$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(Start=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(End=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=270$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=270^0$ thì hàm số không xác định.



Vậy tại các góc $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy A là thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ SHIFT MODE 3 (Deg).

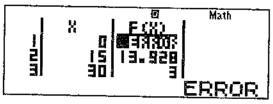
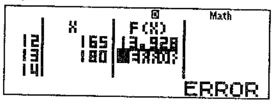
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập hàm $f(X)=\dfrac{1+\cos(2X)}{1-\cos(2X)}$.

Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(End=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

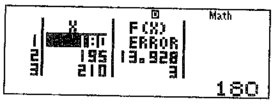
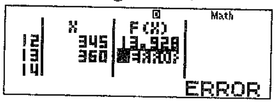
Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0$ và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0$ và $x=180^0$ thì hàm số không xác định.

Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\dfrac{1+\cos(2X)}{1-\cos(2X)}$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(Start=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(End=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180$ và $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.

Vậy tại các góc $0,\pi,2\pi$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy A là thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 27: Đáp án B.

Ấn SHIFT MODE 3 (Deg) để máy tính casio ở đơn vị độ.

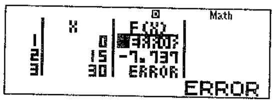
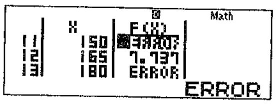
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập vào máy tính hàm số $f(X)=\dfrac{\cos(X)}{\sin(X)(2\sin(X)-1)}$.

Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(End=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

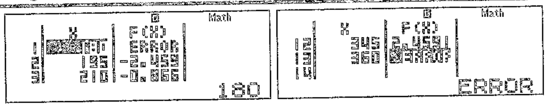
Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại .. và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0,x=30^0,x=150^0$ và $x=180^0$ thì hàm số không xác định.

Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\dfrac{\cos(X)}{\sin(X)(2\sin(X)-1)}$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(Start=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(End=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180$ và $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.



Vậy tại các góc $0,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\pi,2\pi$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy B là thỏa mãn. Chọn đáp án B.

Câu 28: Đáp án A.

Ấn SHIFT MODE 3 (Deg) để máy tính casio ở đơn vị độ.

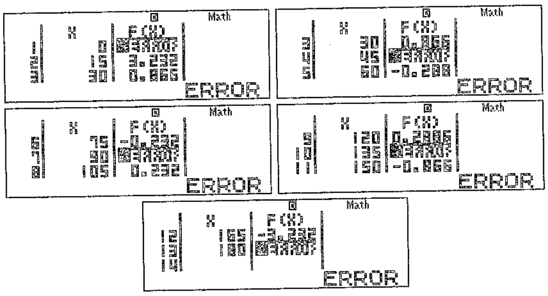
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập hàm $f(X)=\frac{2\cos(X)^2}{\tan(2X)}$.

Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(End=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

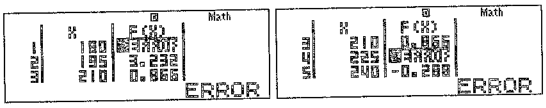
Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0,X=45,X=90,X=135$ và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=0^0$, $x=45^0$, $x=90^0$, $x=135^0$ và $x=180^0$ thì hàm số không xác định.

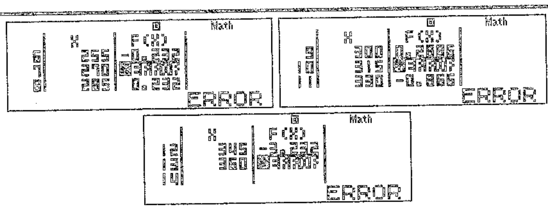


Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\frac{2\cos(X)^2}{\tan(2X)}$

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(Start=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(End=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180,X=225,X=270,X=315$ và $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=180^0,x=225^0$, $x=270^0$, $x=315^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.





Vậy tại các góc $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4},2\pi$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy A là thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 29: Đáp án A.

Ấn SHIFT MODE 3 (Deg) để máy tính casio ở đơn vị độ.

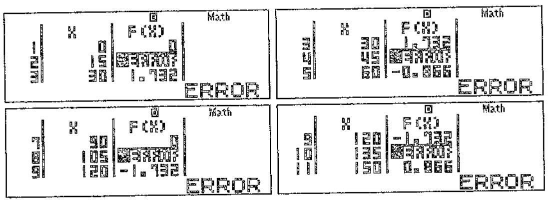
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, ấn MODE 7 (TABLE) và nhập vào máy tính hàm số $f(X)=\frac{\tan(2X)}{\sqrt{3}\sin(X)-\cos(2X)}$.

Nhập lần 1: Ấn = máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 1 8 0 $(End=180)$.

Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

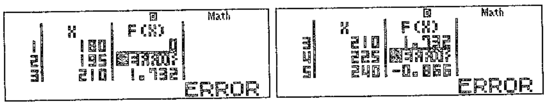
Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=15,X=45,X=105$ và $X=135$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=15^0$, $x=45^0$, $x=105^0$ và $x=135^0$ thì hàm số không xác định.

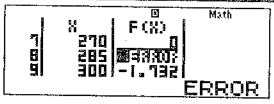


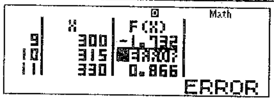
Nhập lần 2: Ấn AC để trở về hàm số $f(X)=\frac{\tan(2X)}{\sqrt{3}\sin(X)-\cos(2X)}$.

Ấn = máy hỏi Start?, ấn 1 8 0 $(Start=180)$. Ấn = tiếp, máy hỏi End?, ấn 3 6 0 $(End=360)$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, ấn 1 5 $(Step=15)$.

Ấn = bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút ▽ để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=195,X=225,X=285$ và $X=315$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR. Tức là tại $x=195^0$, $x=225^0$, $x=285^0$ và $x=315^0$ thì hàm số không xác định.







Vậy tại các góc $\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12},\frac{3\pi}{4},\frac{13\pi}{12},\frac{5\pi}{4},\frac{19\pi}{12},\frac{7\pi}{4}$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy A là thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 30: Đáp án C.

Ấn [SHIFT] [MODE] [3] (Deg) để máy tính casio ở đơn vị độ.

Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], ấn [MODE] [7] (TABLE) và nhập

$$f(X)=\frac{\sin(X)+\cos(X)}{\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-1}.$$

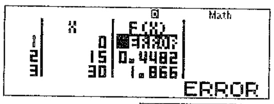
Nhập lần 1: Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [0] $(\text{Start}=0)$.

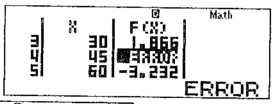
Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [1] [8] [0] $(\text{End}=180)$.

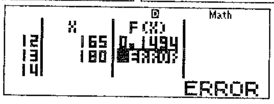
Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▽] để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=0, X=45$ và $X=180$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR.

Tức là tại $x=0^0, x=45^0$ và $x=180^0$ thì hàm số không xác định.





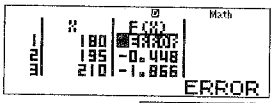


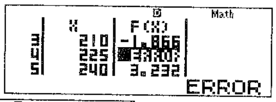
Nhập lần 2: Ấn [AC] để trở về hàm số $f(X)=\frac{\sin(X)+\cos(X)}{\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-1}$.

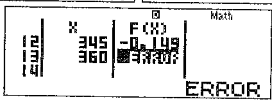
Ấn [=] máy hỏi Start?, ấn [1] [8] [0] $(\text{Start}=180)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi End?, ấn [3] [6] [0] $(\text{End}=360)$. Ấn [=] tiếp, máy hỏi Step?, ấn [1] [5] $(\text{Step}=15)$.

Ấn [=] bảng giá trị sẽ hiện lên. Sử dụng nút [▽] để thực hiện xem toàn bộ bảng giá trị, ta thấy tại $X=180, X=225$ và $X=360$ thì cột $F(X)$ hiện ERROR.

Tức là tại $x=180^0, x=225^0$ và $x=360^0$ thì hàm số không xác định.







Vậy tại các góc $0,\frac{\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},2\pi$ thì hàm số không xác định. Quan sát các đáp án A, B, C, D ta chỉ thấy C là thỏa mãn. Chọn đáp án C.

CHỦ ĐỀ 3: TỔ HỢP – XÁC SUẤT – NHỊ THỨC NEWTON

1. Các chế độ làm việc

1. Giai thừa (!) Sử dụng [x!] ([SHIFT] [x⁻¹])	!
2. Chỉnh hợp (nPr) Sử dụng nPr ([SHIFT] [×])	P
2. Tổ hợp (nCr) Sử dụng nCr ([SHIFT] [÷])	C

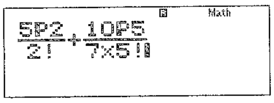
2. Các dạng toán liên quan

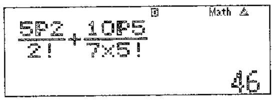
Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}$:

A. 46 B. 64 C. 40 D.

Lời giải





Ta có $M=\frac{5P2}{2!}+\frac{10P5}{7\times5!}$, ấn [⊟] [5] [SHIFT] [×] [2] [▽] [2] [SHIFT] [x!] [▶] [+] [⊟] [1] [0] [SHIFT] [×] [5] [▽] [7] [×] [5] [SHIFT] [x!].

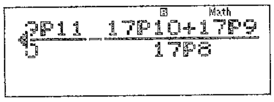
Ấn [=], máy hiện 46. Chọn đáp án A.

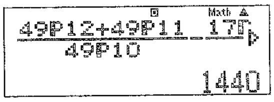
Đáp án A.

Ví dụ 2: Giá trị của biểu thức $M=\frac{A_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}-\frac{A_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$ bằng:

A. 1450 B. 1540 C. 1440 D. 1550

Lời giải





Nhập vào máy $\frac{49P12+49P11}{49P10}-\frac{17P10+17P9}{17P8}$, ấn [⊟] [4] [9] [SHIFT] [×] [1] [2] [+] [4] [9] [SHIFT] [×] [1] [1] [▽] [4] [9] [SHIFT] [×] [1] [0] [▶] [−] [⊟] [1] [7] [SHIFT] [×] [1] [0] [+] [1] [7] [SHIFT] [×] [9] [▽] [1] [7] [SHIFT] [×] [8].

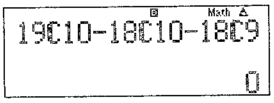
Ấn [=], máy hiện 1440. Chọn đáp án C.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Giá trị của hiệu $C_{19}^{10}-C_{18}^{10}$ bằng:

A. C_{18}^{9} B. C_{19}^{9} C. C_{19}^{11} D. C_{18}^{11}

Lời giải



– *Phương án A:* Xét 19C10 − 18C10 − 18C9, ấn [1] [9] [SHIFT] [÷] [1] [0] [−] [1] [8] [SHIFT] [÷] [1] [0] [−] [1] [8] [SHIFT] [÷] [9].

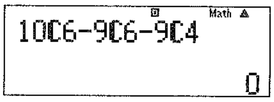
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $C_{10}^6=C_9^6+C_9^4$ B. $C_{10}^6=C_{10}^5+C_{10}^4$ C. $C_{10}^6=C_9^5+C_9^4$ D. $C_{10}^6=C_{10}^5+C_9^4$

Lời giải



– *Phương án A:* Xét 10C6 – 9C6 – 9C4, ấn [1] [0] [SHIFT] [÷] [6] [−] [9] [SHIFT] [÷] [6] [−] [9] [SHIFT] [÷] [4].

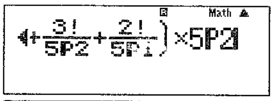
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

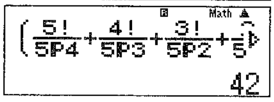
Đáp án A.

Ví dụ 5: Tính $M=\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$:

A. $M=24$ B. $M=42$ C. $M=64$ D. $M=81$

Lời giải





Nhập vào máy $\left(\frac{5!}{5P4}+\frac{4!}{5P3}+\frac{3!}{5P2}+\frac{2!}{5P1}\right)\times 5P2$

[(] [▭/▭] [5] [SHIFT] [x!] [▽] [5] [SHIFT] [×] [4] [▶] [+] [▭/▭] [4] [SHIFT] [x!] [▽] [5] [SHIFT] [×] [3] [▶] [+] [▭/▭] [3] [SHIFT] [x!] [▽] [5] [SHIFT] [×] [2] [▶] [+] [▭/▭] [2] [SHIFT] [x!] [▽] [5] [SHIFT] [×] [1] [▶] [)] [×] [5] [SHIFT] [×] [2]

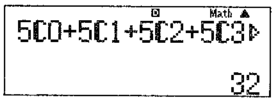
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 42. Chọn đáp án B.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Tính giá trị của $P=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$. Chọn kết quả **đúng**:

A. 0 B. 1 C. 32 D. 64

Lời giải



Cách 1: Nhập vào máy 5C0 + 5C1 + 5C2 + 5C3 + 5C4 + 5C5:

[5] [SHIFT] [÷] [0] [+] [5] [SHIFT] [÷] [1] [+] [5] [SHIFT] [÷] [2] [+] [5] [SHIFT] [÷] [3] [+] [5] [SHIFT] [÷] [4] [+] [5] [SHIFT] [÷] [5].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 32. Chọn đáp án C.

Cách 2: Ta thấy $P=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=\sum_{x=0}^{5}C_5^x=\sum_{x=0}^{5}5CX$.



Nhập vào máy $\sum_{x=0}^{5}(5CX)$, ấn [SHIFT] [log▫□] [5] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▽] [0] [△] [5].

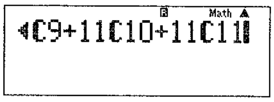
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 32. Chọn đáp án C.

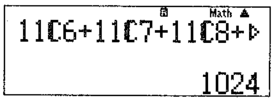
Đáp án C.

Ví dụ 7: Tính $C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}$:

A. 1025 B. 1024 C. 1020 D. 1026

Lời giải

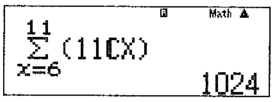




Cách 1: Nhập vào máy 11C6 + 11C7 + 11C8 + 11C9 + 11C10 + 11C11, ấn [1] [1] [SHIFT] [÷] [6] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [7] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [8] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [9] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [1] [0] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [1] [1].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1024. Chọn đáp án B.

Cách 2: Ta có $C_{11}^6+C_{11}^7+C_{11}^8+C_{11}^9+C_{11}^{10}+C_{11}^{11}=\sum_{k=6}^{11}C_{11}^k=\sum_{x=6}^{11}11CX$.



Nhập vào máy $\sum_{x=6}^{11}(11CX)$, ấn [SHIFT] [log▫□] [1] [1] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▽] [6] [△] [1] [1].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1024. Chọn đáp án B.

Đáp án B.

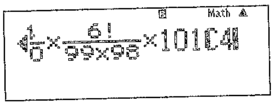
Ví dụ 8: Tính $B=\dfrac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\dfrac{1}{(m+1)(m-4)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{(m-5)!5!}-\dfrac{(m-1)!m}{12(m-4)!3!}\right]$ khi $m=101$

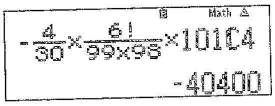
A. $B=-40400$ B. $B=-30400$ C. $B=-40300$ D. $B=-30300$

STUDY TIPS

Do máy tính không thể hiển thị được các kết quả lớn hơn 69! nên ta phải thực hiện phép biến đổi như ở bên về dạng biểu thức có chứa tổ hợp.

Lời giải





Cách 1: Với $m=101$ thì $B=\dfrac{6!}{99.98}\left(\dfrac{1}{102.97}\cdot\dfrac{102!}{96!.5!}-\dfrac{100!.101}{12.97!3!}\right)$

$$\rightarrow B=\frac{6!}{99.98}\left(\frac{101!}{97!.5!}-\frac{101!}{12.97!.3!}\cdot\right)=\frac{6!}{99.98}\left(\frac{101!}{20.97!.3!}-\frac{101!}{12.97!.3!}\right)$$

$$=-\frac{1}{30}\cdot\frac{6!}{99.98}\cdot\frac{101!}{97!.3!}=-\frac{4}{30}\cdot\frac{6!}{99.98}\cdot\frac{101!}{(101-4)!4!}=-\frac{4}{30}\cdot\frac{6!}{99.98}\cdot C_{101}^{4}.$$

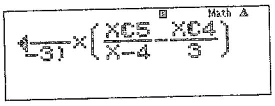
Nhập vào màn hình $-\dfrac{4}{30}\times\dfrac{6!}{99\times98}\times101C4$

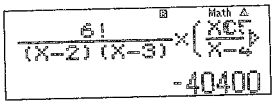
[(-)] [▭/▭] [4] [▼] [3] [0] [▶] [×] [▭/▭] [6] [SHIFT] [x⁻¹] [▼] [9] [9] [×] [9] [8] [▶] [×] [1] [0] [1] [SHIFT] [÷] [4]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng -40400. Chọn đáp án A.

Cách 2: Ta có $B=\dfrac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\dfrac{1}{(m+1)(m-4)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{(m-5)!5!}-\dfrac{(m-1)!m}{12(m-4)!3!}\right]$

$$=\frac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\frac{1}{m-4}\frac{m!}{(m-5)!5!}-\frac{m!}{3(m-4)!4!}\right]=\frac{6!}{(m-2)(m-3)}\left(\frac{C_m^5}{m-4}-\frac{C_m^4}{3}\right)$$





Nhập vào màn hình $\dfrac{6!}{(X-2)(X-3)}\times\left(\dfrac{XC5}{X-4}-\dfrac{XC4}{3}\right)$:

[▭/▭] [6] [SHIFT] [x⁻¹] [▼] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [(] [ALPHA] [)] [−] [3] [)] [▶] [×] [(] [▭/▭] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [5] [▼] [ALPHA] [)] [−] [4] [▶] [−] [▭/▭] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [4] [▼] [3] [▶] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [1] $(X=101)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng -40400. Chọn đáp án A.

Đáp án A.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

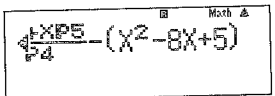
Sử dụng CALC với một vài giá trị cụ thể của ẩn (nguyên và thỏa mãn điều kiện) rồi đối chiếu kết quả trên máy với mỗi đáp án A, B, C, D.

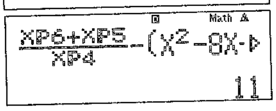
Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}$ với $n\geq6$ và $n\in\mathbb{N}$. Chọn đáp án **đúng**:

A. $M=n^2-8n+5$ B. $M=(n-4)^2$

C. $M=n^2+16$ D. $M=n^2-8n$

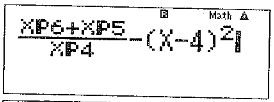
Lời giải

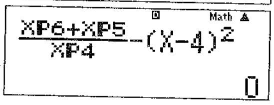




– *Phương án A:* Nhập vào máy $\dfrac{XP6+XP5}{XP4}-(X^2-8X+5)$, ấn [▭/▭] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [6] [+] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [5] [▼] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [4] [▶] [−] [(] [ALPHA] [)] [x²] [−] [8] [ALPHA] [)] [+] [5] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [7] $(X=7)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $11\neq0$.





– *Phương án B:* Nhập vào máy $\dfrac{XP6+XP5}{XP4}-(X-4)^2$, ấn [◄] [DEL](10 lần) [ALPHA] [)] [−] [4] [)] [x²].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [7] $(X=7)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0.

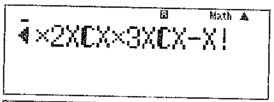
Tiếp tục [CALC] một vài giá trị X khác (X nguyên) thì kết quả nhận được đều bằng 0.

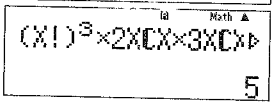
Đáp án B.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $M=(P_n)^3 C_n^n C_{2n}^n C_{3n}^n, (n\in \mathbb{N}^*)$

A. $M=n!$ B. $M=2n!$ C. $M=3n!$ D. $M=4n!$

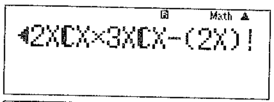
Lời giải

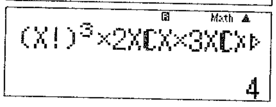




– *Phương án A:* Nhập vào máy $(X!)^3\times 2XCX\times 3XCX-X!$, ấn [(] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x⁻¹] [)] [SHIFT] [x³] [×] [2] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [×] [3] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x⁻¹]

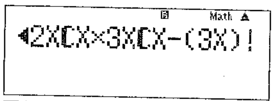
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $5\neq 0\Rightarrow$ Loại A.

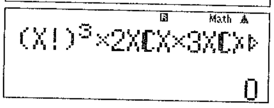




– *Phương án B:* Nhập vào máy $(X!)^3\times 2XCX\times 3XCX-(2X)!$, ấn [◄] [◄] [)] [◄] [◄] [(] [2]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $4\neq 0\Rightarrow$ Loại B.





– *Phương án C:* Nhập vào máy $(X!)^3\times 2XCX\times 3XCX-(3X)!$, ấn [◄] [◄] [◄] [◄] [DEL] [3]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Tiếp tục [CALC] một vài giá trị X khác (X nguyên), kết quả nhận được đều bằng 0.

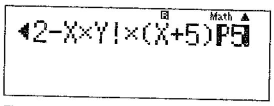
Đáp án C.

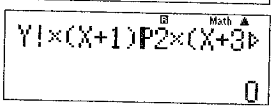
Ví dụ 3: Cho biểu thức $M=P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2, (k,n\in \mathbb{N}^*)$. Mệnh đề **đúng** là:

A. $M=nk!A_{n+5}^5$ B. $M=k!A_{n+5}^5$ C. $M=nk!A_{n+5}^6$ D. $k!A_{n+6}^6$

Lời giải

STUDY TIPS
Với bài toán rút gọn biểu thức hai biến, ta cũng sẽ dùng CALC với từng biến cụ thể rồi đối chiếu với đáp án (tương tự như các ví dụ trên).





– *Phương án A:* Nhập $Y!\times(X+1)P2\times(X+3)P2\times(X+5)P2-X\times Y!\times(X+5)P5$, ấn [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [×] [2] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [SHIFT] [×] [2] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [5] [)] [SHIFT] [×] [2] [−] [ALPHA] [)] [×] [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [5] [)] [SHIFT] [×] [5]

Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Tiếp tục [CALC] một vài giá trị (X,Y) khác (X,Y nguyên), kết quả nhận được đều bằng 0.

Đáp án A.

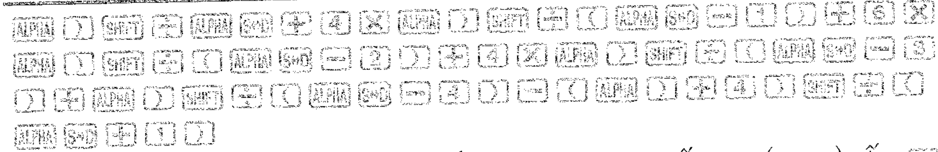
Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}$ với $4\le k\le n$

A. C_{n+4}^{k+1} B. C_{n+4}^{k+3} C. C_{n+4}^{k+2} D. C_{n+4}^{k}

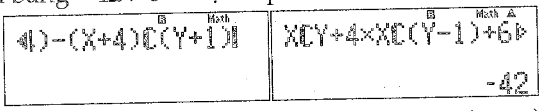
Lời giải

– *Phương án A:* Nhập $XCY+4\times XC(Y-1)+6\times XC(Y-2)+4\times XC(Y-3)+$ $+XC(Y-4)-(X+4)C(Y+1)$

STUDY TIPS
Sau khi CALC $X=6,\ Y=4$ ở đáp án C và được kết quả bằng 0, một số bạn kết luận luôn là C đúng mà không thử thêm một vài giá trị (X,Y) khác. Đây là một sai lầm thường gặp cần phải chú ý.



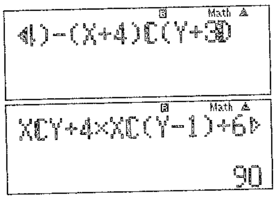
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-42\neq 0$. Loại đáp án A.



– *Phương án B:* Nhập $XCY+4\times XC(Y-1)+6\times XC(Y-2)+4\times XC(Y-3)+$ $+XC(Y-4)-(X+4)C(Y+3)$, ấn [◄] [◄] [DEL] [3]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $90\neq 0$.

Loại đáp án B.

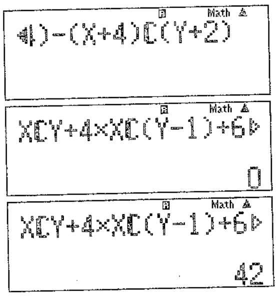


– *Phương án C:* Nhập $XCY+4\times XC(Y-1)+6\times XC(Y-2)+4\times XC(Y-3)+$ $+XC(Y-4)-(X+4)C(Y+2)$, ấn [◄] [◄] [DEL] [2]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Loại đáp án C.

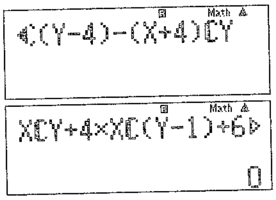
Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $42\neq 0$. Loại đáp án C.



– *Phương án D:* Nhập $XCY+4\times XC(Y-1)+6\times XC(Y-2)+4\times XC(Y-3)+$ $+XC(Y-4)-(X+4)CY$, ấn [◄] [DEL] [DEL] [DEL] [◄] [DEL]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Tiếp tục [CALC] một vài giá trị (X,Y) khác (X,Y nguyên), kết quả nhận được đều bằng 0.



Đáp án D.

Dạng 3: Kiểm tra nghiệm của phương trình, hệ phương trình và bất phương trình

Bài toán 1: Kiểm tra x_0 có là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ hay bất phương trình $f(x)>0\ (f(x)<0, f(x)\geq 0, f(x)\leq 0)$ không?

– **Bước 1:** Biến đổi phương trình, bất phương trình về dạng $f(x)=0$ hay $f(x)>0$ $(f(x)<0, f(x)\geq 0, f(x)\leq 0)$.

– **Bước 2:** Nhập vào máy tính biểu thức $f(X)$.

– **Bước 3:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập x_0 $(X=x_0)$.

– **Bước 4:** Ấn [=], quan sát kết quả:

+ Đối với phương trình: Nếu kết quả khác 0 thì x_0 không là nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Nếu kết quả bằng 0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

+ Đối với bất phương trình: Nếu dấu của kết quả và dấu của bất phương trình giống nhau thì x_0 là nghiệm. Nếu kết quả và bất phương trình có dấu khác nhau thì x_0 không là nghiệm.

Ví dụ 1: Nghiệm của phương trình $3C_{x+1}^2 + xP_2 = 4A_x^2$ là:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Lời giải

Phương trình $3C_{x+1}^2 + xP_2 = 4A_x^2 \Leftrightarrow 3C_{x+1}^2 + x.2! - 4A_x^2 = 0$.

Nhập $3\times(X+1)C2 + X\times 2! - 4\times XP2$, ấn [3] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [2] [+] [ALPHA] [)] [×] [2] [SHIFT] [x⁻¹] [−] [4] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [2]

– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

```
◀)C2+X×2!-4×XP2
```

```
3×(X+1)C2+X×2!-▶
                0
```

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của phương trình $P_2x^2 - P_3x = 8$ là:

A. $\{-1;4\}$ B. $\{-2;4\}$ C. $\{-1;1\}$ D. $\{-2;2\}$

Lời giải

Phương trình $P_2x^2 - P_3x = 8 \Leftrightarrow 2!\times X^2 - 3!\times X - 8 = 0$.

Nhập vào máy $2!\times X^2 - 3!\times X - 8$, ấn [2] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [ALPHA] [)] [−] [8]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [1] $(X=-1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Vậy $x=-1$ là một nghiệm.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Vậy $x=4$ là một nghiệm.

Chọn A.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [2] $(X=-2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 12.

Vậy $x=-2$ không là nghiệm.

Loại ngay B và D.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng -12.

Vậy $x=1$ không là nghiệm.

Loại C.

STUDY TIPS

Đáp án xuất hiện các giá trị $-2;-1;1;2;4$ nên ta sẽ sử dụng CALC biểu thức với các giá trị này để tìm nghiệm.

```
2!×X²-3!×X-8
```

```
2!×X²-3!×X-8
               0
```

```
2!×X²-3!×X-8
               0
```

```
2!×X²-3!×X-8
              12
```

```
2!×X²-3!×X-8
             -12
```

Đáp án A.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của phương trình $P_xA_x^2 + 72 = 6\left(A_x^2 + 2P_x\right)$ là:

A. $\{-3;4\}$ B. $\{3;-4\}$ C. $\{3;4\}$ D. $\{-3;-4\}$

Lời giải

Nhập $X!\times XP2 + 72 - 6(XP2 + 2\times X!)$, ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [2] [+] [7] [2] [−] [6] [(] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [2] [+] [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x⁻¹] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [3] $(X=-3)$. Ấn [=], máy hiện Math ERROR. Vậy $x=-3$ không là nghiệm.

Loại A và D.

STUDY TIPS

Thật vậy, để ý điều kiện là $x \ge 2$ nên ta có thể loại ngay ba đáp án A, B, D mà không cần sử dụng máy tính.

```
◀2-6(XP2+2×X!)
```

Math ERROR
[AC] :Cancel
[◄][►]:Goto

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [4] $(X=-4)$. Ấn [=], máy hiện Math ERROR. Vậy $x=-4$ không là nghiệm.

Loại B. Vậy chọn C.

Đáp án C.

STUDY TIPS
Ta sẽ CALC biểu thức với các giá trị 1; 2; 3; 4; 5; 8 này. Nếu giá trị nào cho kết quả của biểu thức dương thì không phải là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 4: Các số nguyên dương n thỏa mãn $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}$ là:

A. $n\in\{1;2;3\}$ B. $n\in\{3;4;5\}$ C. $n\in\{2;3;4\}$ D. $n\in\{1;4;8\}$

Lời giải

Bất phương trình $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}\Leftrightarrow\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}-\dfrac{15}{(n-1)!}<0$

Nhập $\dfrac{(X+4)P4}{(X+2)!}-\dfrac{15}{(X-1)!}$, ấn [□/□] [(] [ALPHA] [)] [+] [4] [)] [SHIFT] [×] [4] [▽] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [SHIFT] [x^{-1}] [▷] [−] [□/□] [1] [5] [▽] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [SHIFT] [x^{-1}]

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5>0$. Vậy $n=1$ không là nghiệm. Loại A, D.

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!
5

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Vậy $n=2$ không là nghiệm. Loại A, C.

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!
0

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{1}{2}<0$. Vậy $n=3$ là một nghiệm.

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!
$-\frac{1}{2}$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{1}{6}<0$. Vậy $n=4$ là một nghiệm.

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!
$-\frac{1}{6}$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{1}{40}<0$. Vậy $n=5$ là một nghiệm. Chọn B.

(X+4)P4/(X+2)! − 15/(X−1)!
$-\frac{1}{40}$

Đáp án B.

STUDY TIP
Ta thấy điều kiện của bất phương trình là $n\ge 5$, $n\in\mathbb{Z}$ nên loại ngay đáp án A. Do 3 đáp án còn lại (B, C, D) đều xuất hiện các giá trị 7; 8; 9; 10 nên chắc chắn đây đều là nghiệm của bất phương trình. Khi đó không cần thiết phải CALC biểu thức với 4 giá trị này.

Ví dụ 5: Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3-\dfrac{5}{4}A_{n-2}^2<0$

A. $n\in\{4;5;6;7;8;9\}$ B. $n\in\{6;7;8;9;10;11\}$

C. $n\in\{5;6;7;8;9;10\}$ D. $n\in\{7;8;9;10;11;12\}$

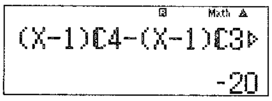
Lời giải

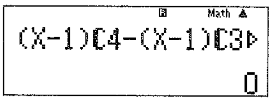
Nhập vào máy $(X-1)C4-(X-1)C3-\dfrac{5}{4}\times(X-2)P2$

[(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [SHIFT] [÷] [4] [−] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [SHIFT] [÷] [3] [−] [□/□] [5] [▽] [4] [▷] [×] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [SHIFT] [×] [2]

(X−1)C4−(X−1)C3▷
$-\frac{21}{2}$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\dfrac{21}{2}<0$. Vậy $n=5$ là một nghiệm là một nghiệm của bất phương trình.





Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-20<0$. Vậy $n=6$ là một nghiệm của bất phương trình.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [1] $(X=11)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0. Vậy $n=11$ không là nghiệm của bất phương trình. Loại B và D. Vậy chọn C.

Đáp án C.

Bài toán 2: Kiểm tra cặp số $(x_0;y_0)$ có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$ hay không?

ĐA CÂU LỆNH (:)

Để sử dụng kí tự đa câu lệnh (:), ta ấn [ALPHA] [∫].
Kí tự đa câu lệnh (:) cho phép nối hai hay nhiều biểu thức và thực hiện tính các biểu thức đó lần lượt từ trái sang phải khi ta ấn nút [=].

– **Bước 1:** Biến đổi hệ phương trình về dạng $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$

– **Bước 2:** Nhập vào máy hai biểu thức $f(X)$ và $g(X)$ ngăn cách nhau bởi kí tự đa câu lệnh (:) .Cụ thể, nhập $f(X;Y):g(X;Y)$.

– **Bước 3:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập x_0 $(X=x_0)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Nhập y_0 $(Y=y_0)$.

– **Bước 4:** Ấn [=], máy hiện giá trị của $f(X;Y)$ khi $X=x_0, Y=y_0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện giá trị của $g(X;Y)$ khi $X=x_0, Y=y_0$.

+ Nếu giá trị của $f(X;Y)$ và $g(X;Y)$ tại $X=x_0, Y=y_0$ đều bằng 0 thì $(x_0;y_0)$ **là nghiệm** của hệ phương trình.

+ Nếu giá trị của $f(X;Y)$ hoặc $g(X;Y)$ tại $X=x_0, Y=y_0$ khác 0 thì $(x_0;y_0)$ **không là nghiệm** của hệ phương trình.

CHÚ Ý

Với các hệ gồm nhiều phương trình hay các hệ bất phương trình, ta cũng sử dụng kí tự đa câu lệnh (:) để ngăn cách các biểu thức với nhau và dùng [CALC] để xác định nghiệm.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_{x+1}^{y+1}=C_{x+1}^{y} \\ 3C_{x+1}^{y+1}=5C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$

A. $x=6, y=3$ B. $x=2, y=1$ C. $x=2, y=5$ D. $x=1, y=3$

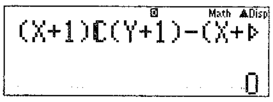
STUDY TIP

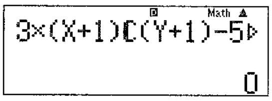
Để ý điều kiện của hệ là $x\ge y\ge 1; x,y\in\mathbb{N}$ ta loại ngay được đáp án C và D. Khi đó chỉ cần kiểm tra nghiệm trong hai đáp án còn lại.

Lời giải

Nhập $(X+1)C(Y+1)-(X+1)CY:3\times(X+1)C(Y+1)-5\times(X+1)C(Y-1)$, ấn

[(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [∫] [3] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [−] [5] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [)].





– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [3] $(Y=3)$. Ấn [=], máy hiện $(X+1)C(Y+1)-(X+1)CY=0$. Ấn [=] tiếp máy hiện $3\times(X+1)C(Y+1)-5\times(X+1)C(Y-1)=0$. Chọn A.

Đáp án A.

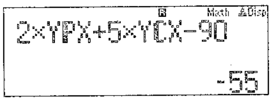
Ví dụ 7: Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2A_y^x+5C_y^x=90 \\ 5A_y^x-2C_y^x=80 \end{cases}$ là:

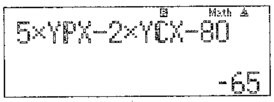
A. $x=1, y=5$ B. $x=2, y=1$ C. $x=2, y=5$ D. $x=1, y=3$

Lời giải

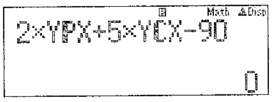
Nhập $2\times YPX+5\times YCX-90:5\times YPX-2\times YCX-80$: [2] [×] [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [×] [ALPHA] [)] [+] [5] [×] [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [−] [9] [0] [ALPHA] [∫] [5] [×] [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [×] [ALPHA] [)] [−] [2] [×] [ALPHA] [S⇔D] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [−] [8] [0]

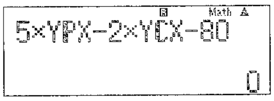
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [5] $(Y=5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện $2\times YPX+5\times YCX-90=-55\neq 0$. Ấn [=] tiếp máy hiện $5\times YPX-2\times YCX-80=-65\neq 0$. Loại A.





– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [5] $(Y=5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện $2\times YPX+5\times YCX-90=0$ Ấn [=] tiếp máy hiện $5\times YPX-2\times YCX-80=0$. Chọn C.





Đáp án C.

> **STUDY TIPS**
> Để ý điều kiện của hệ là $0\le x\le y; x,y\in\mathbb{N}$ ta loại ngay được đáp án B. Khi đó chỉ cần kiểm tra nghiệm trong ba đáp án còn lại.

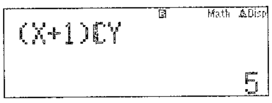
Ví dụ 8: Định x và y sao cho $C_{x+1}^{y}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y-1}=6:5:2$

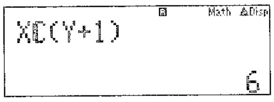
A. $(1;4)$ B. $(4;1)$ C. $(3;8)$ D. $(8;3)$

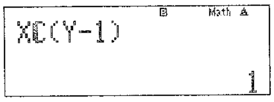
Lời giải

Nhập vào máy $(X+1)CY:XC(Y+1):XC(Y-1)$, ấn: [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [)]

– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện $(X+1)CY=5$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y+1)=6$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y-1)=1$. Khi đó $C_{x+1}^{y}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y-1}=5:6:1$. Loại B.

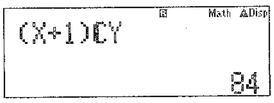


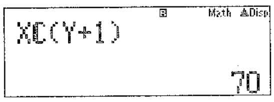


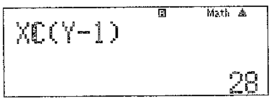


– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [8] $(X=8)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [3] $(Y=3)$. Ấn [=], máy hiện $(X+1)CY=84$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y+1)=70$ Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y-1)=28$.

Khi đó $C_{x+1}^{y}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y-1}=84:70:28=6:5:2$. Chọn D.







Đáp án D.

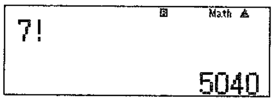
> **STUDY TIP**
> Để ý điều kiện của x, y là $0\le y\le x+1, 0\le y+1\le x$; $x,y\in\mathbb{N}$ nên ta loại ngay đáp án A và C.
> Bản chất của bài toán này là tìm x,y thỏa mãn tỉ số mà giả thiết đưa ra. Ta sẽ xử lý bài toán bằng lệnh CALC kí tự đa câu lệnh (:)

Dạng 4: Giải các bài toán đếm và tính xác suất

Ví dụ 1: Sắp xếp 7 người vào một băng ghế có 7 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách?

A. 5040 B. 5050 C. 5030 D. 5010

Lời giải



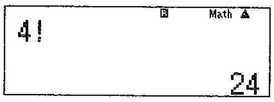
Mỗi cách đổi chỗ 1 trong 7 người trên băng ghế là 1 hoán vị. Vậy có tất cả $P_7 = 7!$ cách xếp. Ấn [7] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện 5040.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho tập $E = \{1;2;3;4;5;6;7\}$. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E và bắt đầu bằng 123?

A. 12 B. 24 C. 6 D. 120

Lời giải



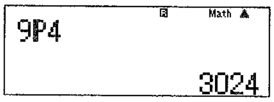
Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập E và bắt đầu bằng 123, số các số như vậy ứng với số hoán vị của 4 chữ số $\{4,5,6,7\}$. Vậy số các số cần tìm là $P_4 = 4!$ (số). Ấn [4] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện 24.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho 9 chữ số 1;2;3;4;5;6;7;8;9. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số nói trên?

A. 126 B. 3024 C. 5040 D. 252

Lời giải



Số các số cần lập là $A_9^4 = 9\text{P}4$ (số).

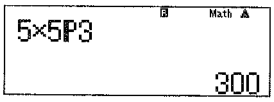
Ấn [9] [SHIFT] [×] [4]. Ấn [=], máy hiện 3024.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Từ tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 360 B. 350 C. 300 D. 320

Lời giải



Gọi $\overline{abcd}$ với $a \neq 0$ và a,b,c,d phân biệt là số cần lập.

+ Do $a \neq 0$ nên có 5 cách chọn a.

+ Chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để sắp xếp vào các vị trí $\overline{bcd}$ ta có A_5^3 (cách).

Vậy có tất cả $5A_5^3 = 5 \times 5\text{P}3$ cách lập số $\overline{abcd}$ thỏa mãn bài toán.

Ấn [5] [×] [5] [SHIFT] [×] [3]. Ấn [=], máy hiện 300.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Một tổ học sinh có 9 nam và 3 nữ. Cần chia tổ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

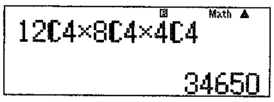
A. 495 B. $A_{12}^4 A_8^4 A_4^4$ C. 11880 D. 34650

Lời giải

Số cách chọn nhóm đầu tiên gồm 4 người trong tổ (12 người) là C_{12}^4 (cách).

Số cách chọn nhóm thứ hai gồm 4 người từ 8 người còn lại trong tổ là C_8^4 (cách).

Số cách chọn nhóm thứ ba gồm 4 người từ 4 người còn lại trong tổ là C_4^4 (cách).



Vậy có tất cả $C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 12\text{C}4 \times 8\text{C}4 \times 4\text{C}4$ (cách).

Ấn [1] [2] [SHIFT] [÷] [4] [×] [8] [SHIFT] [÷] [4] [×] [4] [SHIFT] [÷] [4].

Ấn [=], máy hiện 34650.

Đáp án D.

Ví dụ 6: Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả ba loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

A. 176450 B. 176400 C. 176451 D. 176460

Lời giải

– **Bước 1:** Chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} (cách).

– **Bước 2:** Chọn 10 câu sao cho có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.

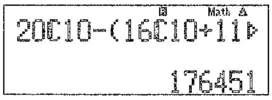
+ Chọn 10 câu trong 16 câu dễ và trung bình có C_{16}^{10} (cách).

+ Chọn 10 câu trong 11 câu trung bình và khó có C_{11}^{10} (cách).

+ Chọn 10 câu trong 13 câu dễ và khó có C_{13}^{10} (cách).

Vậy số đề kiểm tra có thể lập được đủ cả ba loại dễ, trung bình và khó là:

$C_{20}^{10}-\left(C_{16}^{10}+C_{11}^{10}+C_{13}^{10}\right)=20C10-\left(16C10+11C10+13C10\right)$ (đề).



Ấn 2 0 SHIFT ÷ 1 0 − (1 6 SHIFT ÷ 1 0 + 1 1 SHIFT ÷ 1 0 + 1 3 SHIFT ÷ 1 0).

Ấn =, máy hiện 176451.

Đáp án C.

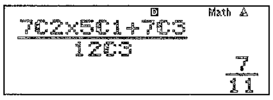
Ví dụ 7: Một hộp đựng bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt, và 5 bóng còn lại kém. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt.

A. $\frac{7}{11}$ B. $\frac{4}{11}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{4}{12}$

Lời giải

Ta có $\left|\Omega\right|=C_{12}^{3}$. Gọi A là biến cố "có ít nhất 2 bóng tốt". Suy ra $\left|\Omega_A\right|=C_7^2C_5^1+C_7^3$

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right)=\frac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{C_7^2C_5^1+C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7C2\times 5C1+7C3}{12C3}$.



Ấn ▭/▭ 7 SHIFT ÷ 2 × 5 SHIFT ÷ 1 + 7 SHIFT ÷ 3 ▼ 1 2 SHIFT ÷ 3.

Ấn =, máy hiện $\frac{7}{11}$.

Đáp án A.

Ví dụ 8: Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 thẻ mang số lẻ, 5 thẻ mang số chẵn trong đó có đúng 1 thẻ mang số chia hết cho 10.

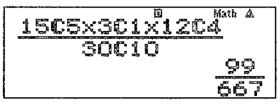
A. $\frac{568}{667}$ B. $\frac{99}{667}$ C. $\frac{101}{667}$ D. $\frac{566}{667}$

Lời giải

Ta có $\left|\Omega\right|=C_{30}^{10}$.

Gọi A là biến cố "có 5 thẻ mang số lẻ, 5 thẻ mang số chẵn và 1 thẻ mang số chia hết cho 10". Suy ra $\left|\Omega_A\right|=C_{15}^5C_3^1C_{12}^4$.

Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right)=\frac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|}=\frac{C_{15}^5C_3^1C_{12}^4}{C_{30}^{10}}=\frac{15C5\times 3C1\times 12C4}{30C10}$.



Ấn ▭/▭ 1 5 SHIFT ÷ 5 × 3 SHIFT ÷ 1 × 1 2 SHIFT ÷ 4 ▼ 3 0 SHIFT

[$\frac{\square}{\square}$] [1] [0]. Ấn [=], máy hiện $\frac{99}{667}$.

Đáp án B.

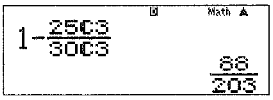
Ví dụ 9: Lớp 12B có 30 học sinh, trong đó có 5 em giỏi, 17 em khá và 8 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em, tính xác suất để có ít nhất 1 em giỏi.

A. $\frac{115}{203}$ B. $\frac{110}{203}$ C. $\frac{93}{203}$ D. $\frac{88}{203}$

Lời giải

Ta có $|\Omega| = C_{30}^3$ .Gọi A là biến cố "Chọn 3 em, trong đó có ít nhất 1 em giỏi" thì $\overline{A}$ là biến cố "Chọn 3 em, trong đó không có học sinh giỏi nào".

Khi đó $|\Omega_{\overline{A}}| = C_{25}^3$, suy ra $P(\overline{A}) = \frac{C_{25}^3}{C_{30}^3} \rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{25}^3}{C_{30}^3} = 1 - \frac{25C3}{30C3}$.



Ấn [1] [−] [$\frac{\square}{\square}$] [2] [5] [SHIFT] [÷] [3] [▼] [3] [0] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện $\frac{88}{203}$.

Đáp án D.

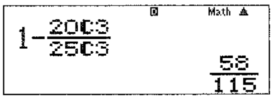
Ví dụ 10: Công ty Samsung phát hành 25 vé khuyến mại trong đó có 5 vé trúng thưởng. Một đại lý được phân phối 3 vé. Tính xác suất để đại lý đó có ít nhất một vé trúng

A. $\frac{57}{115}$ B. $\frac{58}{115}$ C. $\frac{19}{46}$ D. $\frac{27}{46}$

Lời giải

Ta có $|\Omega| = C_{25}^3$.

Gọi A là biến cố "có ít nhất một vé trúng" thì $\overline{A}$ là biến cố "không có vé nào trúng". Khi đó $|\Omega_{\overline{A}}| = C_{20}^3$. Xác suất của biến cố $\overline{A}$ là $P(\overline{A}) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3}$.



Vậy xác suất cần tính là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = 1 - \frac{20C3}{25C3}$.

Ấn [1] [−] [$\frac{\square}{\square}$] [2] [0] [SHIFT] [÷] [3] [▼] [2] [5] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện $\frac{58}{115}$.

Đáp án B.

Dạng 5: Tìm số hạng chứa x^α trong khai triển nhị thức Newton

Bài toán 1: Tìm số hạng chứa x^α trong khai triển Newton $(a+b)^n$

– **Bước 1:** Khai triển nhị thức Niu–tơn theo công thức:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}g(k).f(x;k).$$

Chọn $x=x_0$ là một số bất kì (thường chọn $x_0=1,2,3$). Khi đó hệ số của x^α trong khai triển là x_0^α.

– **Bước 2:** Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 để chuyển sang chế độ hai hàm $f(x)$ và $g(x)$.

– **Bước 3:** Ấn MODE 7 (TABLE). Nhập hàm $f(\mathrm{X})$ (là hàm $f(x;k)$ với $x=x_0$ và $k=\mathrm{X}$). Ấn =, nhập hàm $g(\mathrm{X})$ (là hàm $g(k)$ với $k=\mathrm{X}$).

– **Bước 4:** Ấn =, máy hỏi Start?, nhập $Start=0$. Ấn = tiếp máy hỏi End?, nhập $\mathrm{End}=n$. Ấn = tiếp, máy hỏi Step?, nhập $Step=1$.

– **Bước 5:** Ấn =, bảng giá trị hiện ra gồm 3 cột $\mathrm{X},\mathrm{F}(\mathrm{X})$ và $\mathrm{G}(\mathrm{X})$. Ấn ▽ để thực hiện kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị, ta sẽ chọn kết quả thỏa mãn.

Quan sát bảng giá trị, tại hàng có giá trị bằng x_0^α của cột $\mathrm{F}(\mathrm{X})$, giá trị của X chính là giá trị của k, giá trị của $\mathrm{G}(\mathrm{X})$ chính là hệ số của số hạng chứa x^α trong khai triển.

GIẢI THÍCH LÝ DO CHỌN STEP

Đối với dạng toán này, ta sẽ chọn $\mathrm{Step}=1$ vì step phải là giá trị nguyên chạy từ 0 đến n.

Ví dụ 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$.

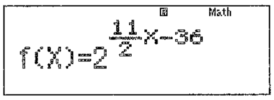
A. 495　　B. 313　　C. 1303　　A. 13129

Lời giải

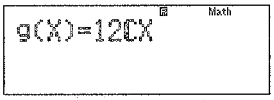
$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x^{-3}+x^{\frac{5}{2}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^{12-k}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\frac{11}{2}k-36}\text{ với }\begin{cases}0\le k\le 12\\k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{\frac{11}{2}k-36}\\g(k)=C_{12}^k\end{cases}\xrightarrow[k=\mathrm{X}]{x=2}\begin{cases}f(\mathrm{X})=2^{\frac{11}{2}\mathrm{X}-36}\\g(\mathrm{X})=C_{12}^{\mathrm{X}}=12C\mathrm{X}\end{cases}(0\le\mathrm{X}\le 12,\mathrm{X}\in\mathbb{N}).$$

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2. Sau đó ấn MODE 7 (TABLE).

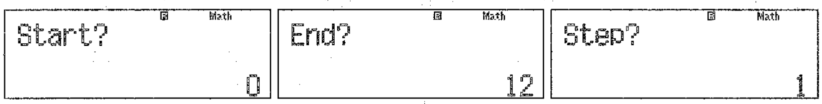


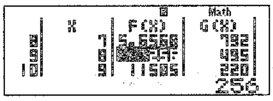
Nhập $f(\mathrm{X})=2^{\frac{11}{2}\mathrm{X}-36}$: 2 x^■ ■/■ 1 1 ▽ 2 ▷ ALPHA) − 3 6. Ấn =.



Nhập $g(\mathrm{X})=12C\mathrm{X}$: 1 2 SHIFT ÷ ALPHA).

Ấn =, máy hỏi Start?, ấn 0 $(Start=0)$. Ấn = tiếp máy hỏi End?, ấn 1 2 $(End=12)$. Ấn = tiếp máy hỏi Step?, ấn 1 $(Step=1)$.





Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Ấn ▽ để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

Quan sát bảng giá trị ta thấy, tại $\mathrm{F}(\mathrm{X})=256=2^8=x^8$ (do $x=2$) thì $\mathrm{X}=8\rightarrow k=8$ và $\mathrm{G}(\mathrm{X})=495$ là hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{14} trong khai triển $\left(1-x^2\right)^{12}$:

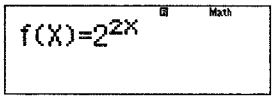
A. –904　　B. 792　　C. –792　　D. 904

Lời giải

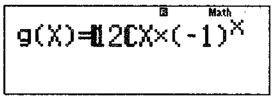
$\left(1-x^2\right)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(-x^2\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(-1\right)^k x^{2k}$ với $0\le k\le 12$ và $k\in\mathbb{N}$.

$$\longrightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{2k}\\ g(k)=C_{12}^{k}.(-1)^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{2X}\\ g(X)=C_{12}^{X}.(-1)^X=12CX\times(-1)^X\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0\le X\le 12;\\ X\in\mathbb{N}\end{pmatrix}$$

Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7](TABLE).



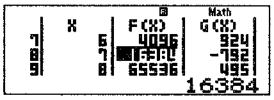
Nhập $f(X)=2^{2X}$: [2] [x■] [2] [ALPHA] [)]. Ấn [=].



Nhập $g(X)=12CX\times(-1)^X$: [1] [2] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [×] [(] [(−)] [1] [)] [x■] [ALPHA] [)].

Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [1] [2] $(End=12)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.





Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▽] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị. Quan sát bảng giá trị ta thấy, tại hàng $F(X)=16384=2^{14}=x^{14}$ (do $x=2$) thì $X=7\rightarrow k=7$ và $G(X)=-792$ là hệ số của x^{14} trong khai triển.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Tìm hệ số không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7,(x>0)$:

A. 34 B. 36 C. 35 D. 37

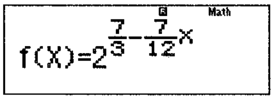
Lời giải

Sử dụng máy tính casio

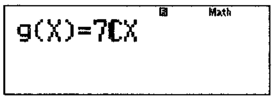
$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\sqrt[4]{x^{-1}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}k}x^{-\frac{1}{4}k}=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}\text{ với }\begin{cases}0\le k\le 7\\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}\\ g(k)=C_7^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}X}\\ g(X)=C_7^X=7CX\end{cases}\quad(0\le X\le 7;X\in\mathbb{N}).$$

Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7](TABLE).

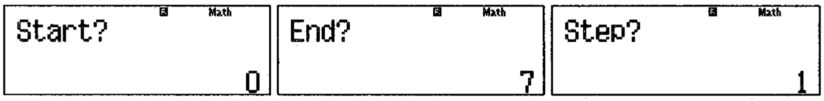


Nhập $f(X)=2^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}X}$: [2] [x■] [▭/▭] [7] [▽] [3] [▷] [−] [▭/▭] [7] [▽] [1] [2] [▷] [ALPHA] [)].



Ấn [=]. Nhập $g(x)=7CX$: [7] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)].

Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [7] $(End=7)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.





Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▽] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị. Quan sát bảng giá trị ta thấy tại hàng $F(X)=1=2^0=x^0$ (do $x=2$) thì $x=4\rightarrow k=4$ và $G(X)=35$ là hệ số của số hạng không chứa $x\left(x^0\right)$ trong khai triển.

Đáp án C.

Ví dụ 4: Trong khai triển nhị thức $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$ thì hệ số của số hạng không chứa x bằng:

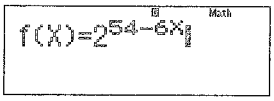
A. 45620. B. 46620. C. 47620. D. 48620.

Lời giải

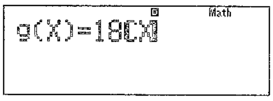
Ta có $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}=\sum\limits_{k=0}^{18}C_{18}^k\left(x^3\right)^{18-k}\left(x^{-3}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{18}C_{18}^k x^{54-6k}$ với $0\le k\le 18$ và $k\in\mathbb{N}$.

$$\longrightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{54-6k}\\ g(k)=C_{18}^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{54-6X}\\ g(X)=C_{18}^X=18CX\end{cases}\left(0\le X\le 18;X\in\mathbb{N}\right)$$

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7] (TABLE).

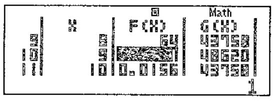


Nhập $f(X)=2^{54-6X}$: [2] [x■] [5] [4] [−] [6] [ALPHA] [)]. Ấn [=].



Nhập $g(x)=18CX$: [1] [8] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)].

Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [1] [8] $(End=18)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.



Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▼] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

Quan sát bảng giá trị ta thấy, tại hàng $F(X)=1=2^0=x^0$ (do $x=2$) thì $x=9\to k=9$ và $G(X)=48620$ là hệ số của số hạng không chứa $x\left(x^0\right)$ trong khai triển.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Hệ số của x^{17} trong khai triển $x^5\left(1-x^2\right)^{12}$ là:

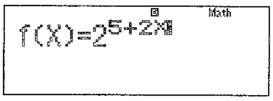
A. 12376. B. 924. C. −12376. D. −6188.

Lời giải

$$x^5\left(1-x^2\right)^{12}=\left[x^{\frac{5}{12}}\left(1-x^2\right)\right]^{12}=\left(x^{\frac{5}{12}}-x^{\frac{29}{12}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{\frac{5}{12}}\right)^{12-k}\left(-x^{\frac{29}{12}}\right)^k$$

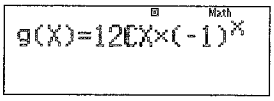
$=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k(-1)^k x^{5+2k}$ với $0\le k\le 12$ và $k\in\mathbb{N}$.

$$\longrightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{5+2k}\\ g(k)=C_{12}^k(-1)^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{5+2X}\\ g(X)=C_{12}^X\times(-1)^X=12CX\times(-1)^X\end{cases}\left(0\le X\le 18;X\in\mathbb{N}\right)$$



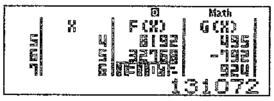
Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7] (TABLE).

Nhập $f(X)=2^{5+2X}$: [2] [x■] [5] [+] [2] [ALPHA] [)]. Ấn [=].



Nhập $g(x)=12CX\times(-1)^X$: [1] [2] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [×] [(] [(−)] [1] [)] [x■] [ALPHA] [)].

Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [1] [2] $(End=12)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.



Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▼] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

Quan sát bảng giá trị ta thấy khi $F(X)=131072=2^{17}=x^{17}$ (do $x=2$) thì $X=6\to k=6$ và $G(X)=924$ là hệ số của số hạng chứa x^{17} trong khai triển.

Đáp án B.

CHÚ Ý

Hệ phương trình (I) có nghiệm đều là các số tự nhiên. Phương trình (1) có hệ số đều bằng 1. Phương trình (2) có hệ số tăng dần khi chỉ số k tăng.

Bài toán 2: Tìm hệ số của x^m trong khai triển biểu thức:

$$f(x)=\left(a_t x^t+a_{t-1}x^{t-1}+a_{t-2}x^{t-2}+\ldots+a_1x+a_0\right)^n$$

Hệ số của x^m được tính bằng: $\left[x^m\right]=\sum\frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!\ldots k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}\ldots a_1^{k_1}a_0^{k_0}$

Với $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_t\in\mathbb{N}$ thỏa mãn: $\begin{cases}k_0+k_1+k_2+\ldots+k_t=n & (1)\\ k_1+2k_2+3k_3+\ldots+tk_t=m & (2)\end{cases}\ (I)$

Ví dụ 6: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Nhị thức Newton của $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$

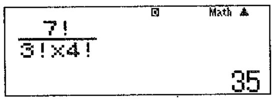
A. 35 B. 30 C. 45 D. 90

Lời giải

$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\left(x^{1/3}+x^{-1/4}\right)^7$.

Ta có hệ $\begin{cases}k_{1/3}+k_{-1/4}=7\\ \frac{1}{3}k_{1/3}-\frac{1}{4}k_{-1/4}=0\end{cases}\xrightarrow[k_{-1/4}=Y]{k_{1/3}=X}\begin{cases}X+Y=7\\ \frac{1}{3}X-\frac{1}{4}Y=0\end{cases}$

Chọn MODE 5 (EQN) 1 để giải hệ phương trình trên, ta được các nghiệm là $X=3,Y=4\rightarrow k_{1/3}=3,k_{-1/4}=4$.



Vậy hệ số không chứa x trong khai triển là $\left[x^0\right]=\frac{7!}{3!\times 4!}=35$.

Ấn [phân số] 7 SHIFT x^{-1} ▽ 3 SHIFT x^{-1} × 4 SHIFT x^{-1}

Đáp án A.

Ví dụ 7: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$, biết rằng $x>0$

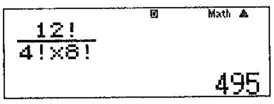
A. 490 B. 485 C. 495 D. 500

Lời giải

$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x^{-3}+x^{5/2}\right)^{12}$.

Ta có hệ $\begin{cases}k_{-3}+k_{5/2}=12\\ -3k_{-3}+\frac{5}{2}k_{5/2}=8\end{cases}\xrightarrow[k_{5/2}=Y]{k_{-3}=X}\begin{cases}X+Y=12\\ -3X+\frac{5}{2}Y=8\end{cases}$

Chọn MODE 5 (EQN) 1 để giải hệ phương trình trên, ta được các nghiệm là $X=4,Y=8\rightarrow k_{-3}=4,k_{5/2}=8$.



Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển là: $\left[x^8\right]=\frac{12!}{4!\times 8!}=495$.

Ấn [phân số] 1 2 SHIFT x^{-1} ▽ 4 SHIFT x^{-1} × 8 SHIFT x^{-1}

Đáp án C.

Ví dụ 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{1}{x}-x+x^2\right)^{10}$

A. 1008 B. 2016 C. 1009 D. 2018

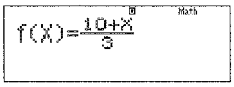
Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x}-x+x^2\right)^{10}=\left(x^{-1}-x+x^2\right)^{10}$. Có hệ: $\begin{cases}k_{-1}+k_1+k_2=10\\-k_{-1}+k_1+2k_2=0\end{cases}$

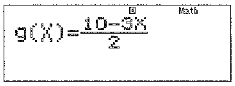
Do $k_{-1},k_1,k_2\in\mathbb{N}$ nên $0\le k_{-1}<10$. Đặt $k_2=\mathrm{X}\to 0\le \mathrm{X}<10$.

Hệ có dạng $\begin{cases}k_{-1}+k_1=10-\mathrm{X}\\k_{-1}-k_1=2\mathrm{X}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_{-1}=\dfrac{10+\mathrm{X}}{3}=\mathrm{f}(\mathrm{X})\\k_1=\dfrac{10-3\mathrm{X}}{2}=\mathrm{g}(\mathrm{X})\end{cases}\longrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{X}),\mathrm{g}(\mathrm{X})\in\mathbb{N}$

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7] (TABLE).

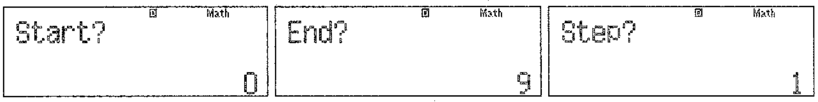


Nhập $\mathrm{f}(\mathrm{X})=\frac{10+\mathrm{X}}{3}$: [■/□] [1] [0] [+] [ALPHA] [)] [▼] [3]. Ấn [=].



Nhập $\mathrm{g}(\mathrm{X})=\frac{10-3\mathrm{X}}{2}$: [■/□] [1] [0] [−] [3] [ALPHA] [)] [▼] [2]

Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [9] $(End=9)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.



Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▼] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

Quan sát bảng giá trị, do $\mathrm{X},\mathrm{F}(\mathrm{X}),\mathrm{G}(\mathrm{X})\in\mathbb{N}$ nên ta xác định được $\mathrm{X}=0,\mathrm{F}(\mathrm{X})=5,\mathrm{G}(\mathrm{X})=5$ và $\mathrm{X}=2,\mathrm{F}(\mathrm{X})=6,\mathrm{G}(\mathrm{X})=2$ thỏa mãn hệ trên.

Hay ta có $\left[\begin{array}{l}k_{-1}=5,k_1=5,k_2=0\\k_{-1}=6,k_1=2,k_1=2\end{array}\right.$

Hệ số không chứa x trong khai triển đã cho là

$$\left[x^0\right]=\frac{10!}{5!\times 5!\times 0!}\times 1^5\times(-1)^5\times 1^0+\frac{10!}{6!\times 2!\times 2!}\times 1^6\times(-1)^2\times 1^2=1008$$

Ấn [■/□] [1] [0] [SHIFT] [x^{-1}] [▼] [5] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [5] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [0] [SHIFT] [x^{-1}] [▶] [×] [1] [$x^■$] [5] [▶] [×] [(] [(−)] [1] [)] [$x^■$] [5] [▶] [×] [1] [$x^■$] [0] [▶] [+] [■/□] [1] [0] [SHIFT] [x^{-1}] [▼] [6] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [2] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [2] [SHIFT] [x^{-1}] [▶] [×] [1] [$x^■$] [6] [▶] [×] [(] [(−)] [1] [)] [x^2] [×] [1] [x^2]. Ấn [=].

Đáp án A.

CHÚ Ý

Đối với một đa thức dạng $f(x)=\left(a_\alpha x^\alpha+a_\beta x^\beta+a_\gamma x^\gamma\right)^n$ thì hệ số của x^m được tính bằng:

$\left[x^m\right]=\frac{n!}{k_\alpha!k_\beta!k_\gamma!}.a_\alpha^{k_\alpha}a_\beta^{k_\beta}a_\gamma^{k_\gamma}$

Với $\begin{cases}k_\alpha+k_\beta+k_\gamma=n\\\alpha k_\alpha+\beta k_\beta+\gamma k_\gamma=m\end{cases}$ và $k_\alpha,k_\beta,k_\gamma\in\mathbb{N}$.

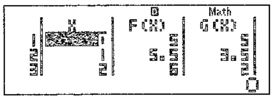
Đặt $k_\gamma=\mathrm{X}\to\begin{cases}k_\alpha=\mathrm{f}(\mathrm{X})\\k_\beta=\mathrm{g}(\mathrm{X})\end{cases}$

Để tìm $k_\alpha,k_\beta,k_\gamma$ ta sử dụng TABLE, nhập hai hàm $\mathrm{f}(\mathrm{X}),\mathrm{g}(\mathrm{X})$.

Cho $Start=0, End=n-1, Step=1$.

Quan sát bảng giá trị và chọn những giá trị mà tại đó $\mathrm{X},\mathrm{F}(\mathrm{X}),\mathrm{G}(\mathrm{X})\in\mathbb{N}$.

Khi đó $k_\gamma=\mathrm{X}$, $k_\alpha=\mathrm{F}(\mathrm{X})$ và $k_\beta=\mathrm{G}(\mathrm{X})$.

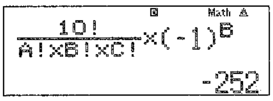


STUDY TIPS

Việc đưa cả quy trình ấn $\left[x^0\right]$ vào máy như ở bên khá dài dòng và mất nhiều thời gian, nhất là đối với các học sinh chưa thông thạo bấm máy. Cũng bằng máy tính casio (hay vinacal) nhưng ta có thể thực hiện thao tác đó dễ dàng hơn qua các phím [CALC], [RCL] (STO), [M+].

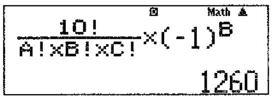
Tính tổng $\left[x^m\right]=\sum\frac{n!}{k_t!k_{t-1}!k_{t-2}!...k_0!}.a_t^{k_t}a_{t-1}^{k_{t-1}}a_{t-2}^{k_{t-2}}...a_1^{k_1}a_0^{k_0}$ bằng máy tính casio với các phím [CALC], [RCL] (STO), [M+].

* Cách 1: Gõ biểu thức tổng quát (ví dụ như $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times 1^A\times(-1)^B\times 1^C=\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^B$ của Ví dụ 8). Sau đó ấn [CALC], máy hỏi các giá trị A, B, C cần gán. Nhập lần lượt giá trị của A, B, C (ví dụ như ấn [5] [=] [5] [=] [0] [=]), máy sẽ hiện giá trị của biểu thức ứng với A, B, C vừa gán (máy hiện



$\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^B=-252$). Lưu các kết quả ra nháp rồi sau đó cộng chúng lại, ta được đáp án.

* Cách 2: Sau mỗi lần CALC xong, chúng ta cộng dồn và lưu giá trị vào một biến nhớ nào đó. Ví dụ như vừa rồi ta tính được $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^B=-252$. Ta lưu nó vào X bằng phím [SHIFT] [RCL] (STO) [)], sau đó tính giá trị biểu thức tiếp theo là $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^B=1260$, ta lấy $X+Ans\to X$ (khi này $X=(-252)+1260=1008$).



* Cách 3: Đầu tiên ta gán cho M bằng 0 $(0\to M)$. Sau đó mỗi lần tính xong, ấn [M+] là máy tự động thêm vào M $(M+Ans\to M)$.

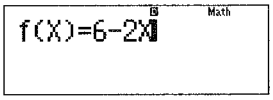
Ví dụ 9: Tìm hệ số của x^6 sau khi khai triển biểu thức $f(x)=(3x^2-2x-1)^9$

A. 84 B. –84 C. –95 D. 95

Lời giải

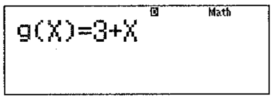
Với $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$ ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}k_0+k_1+k_2=9\\k_1+2k_2=6\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}k_2=X\\k_1=6-2X\\k_0=3+X\end{cases}$

Từ phương trình (1) của hệ, suy ra $0\le k_2<9\longrightarrow 0\le X<9$.

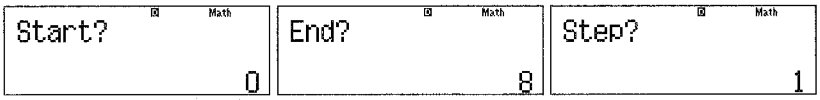


Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7] (TABLE).

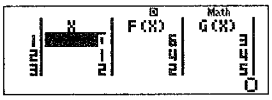
Nhập $f(X)=6-2X$: [6] [−] [2] [ALPHA] [)]. Ấn [=]. Nhập $g(X)=3+X$: [3] [+] [ALPHA] [)].

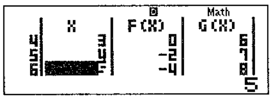


Ấn [=], máy hỏi Start?, ấn [0] $(Start=0)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi End?, ấn [8] $(End=8)$. Ấn [=] tiếp máy hỏi Step?, ấn [1] $(Step=1)$.



Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Ấn [▽] để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.





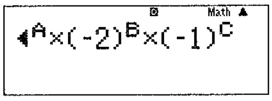
Ta có $(k_2,k_1,k_0)=(X,F(X),G(X))$ và $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$ nên $(k_2,k_1,k_0)=(0;6;3)$, $(1;4;4),(2;2;5),(3;0;6)$.

Công thức tổng quát tính hệ số của x^6 là:

$$[x^6]=\sum\frac{9!}{k_2!k_1!k_0!}.3^{k_2}.(-2)^{k_1}.(-1)^{k_0}=\sum\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C.$$

Dưới đây là 3 cách để tính $[x^6]$ bằng máy tính:

* Cách 1: Nhập vào máy $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$, ấn [▤] [9] [SHIFT] [$x^{-1}$] [▽] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [°'''] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [x^{-1}] [▷] [×] [3] [$x^{■}$] [ALPHA] [(−)] [▷] [×] [(] [(−)] [2] [)] [$x^{■}$] [ALPHA] [°'''] [▷] [×] [(] [(−)] [1] [)] [$x^{■}$] [ALPHA] [hyp]



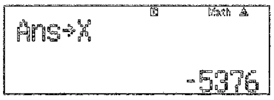
* Ấn [CALC] với $A=0,B=6,C=3$ ta được kết quả -5376.

* Ấn [CALC] với $A=1,B=4,C=4$ ta được kết quả 30240.

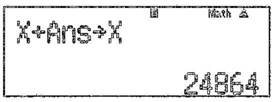
* Ấn [CALC] với $A=2,B=2,C=5$ ta được kết quả -27216.

* Ấn [CALC] với $A=3,B=0,C=6$ ta được kết quả 2268.

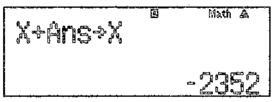
Cộng các kết quả trên lại, ta được $\left[x^6\right] = -5376 + 30240 - 27216 + 2268 = -84$.



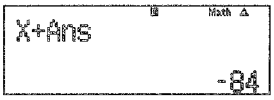
* Cách 2 (Cộng dồn): Nhập vào máy $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$. Ấn [CALC] với $A=0,\ B=6,\ C=3$ ta được kết quả -5376. Ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [)] để gán kết quả vừa tìm được vào biến nhớ $X\ (\text{Ans}\to X)$.



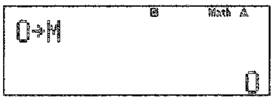
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=1, B=4, C=4$ ta được kết quả 30240. Ấn tiếp [ALPHA] [)] [+] [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] $(X+\text{Ans}\to X)$.



Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=2, B=2, C=5$ ta được kết quả -27216. Ấn tiếp [ALPHA] [)] [+] [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] $(X+\text{Ans}\to X)$.



Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=3, B=0, C=6$ ta được kết quả 2268. Ấn [ALPHA] [)] [+] [Ans] $(X+\text{Ans})$, ấn [=], máy hiện kết quả bằng -84.

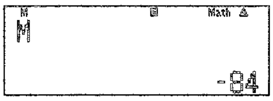


* Cách 3: Gán $0\to M$, ấn [0] [SHIFT] [RCL] [M+].

Nhập vào máy $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$. Ấn [CALC] với $A=0,\ B=6,\ C=3$ ta được kết quả -5376. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.

Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=1, B=4, C=4$ ta được kết quả 30240. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.

Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=2, B=2, C=5$ ta được kết quả -27216. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\frac{9!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times(-2)^B\times(-1)^C$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=3, B=0, C=6$ ta được kết quả 2268. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.

Vậy $\left[x^6\right] = M = -84$ (ấn [ALPHA] [M+] [=]).

Đáp án B.

Ví dụ 10: Tìm hệ số của x^7 sau khi khai triển biểu thức $f(x) = \left(2x^3 - x^2 - x + 3\right)^8$

A. 193560 B. 193500 C. −193500 D. −193560

Lời giải

Với $k_3, k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{N}$, ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 8 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 7 \end{cases}$ (I)

Hệ số của x^7 trong khai triển là:

STUDY TIPS

Để quét hết các nghiệm của hpt (I), ta chọn $k_3=0$, rồi cho k_2 tăng dần từ 0 đến 7 (do $0\le k_3,k_2,k_1,k_0<8$) rồi giải hệ gồm hai phương trình ẩn k_0,k_1. Lại chọn $k_3=1$, rồi cho k_2 tăng dần từ 0 đến 7 tiếp và giải hệ phương trình hai ẩn k_0,k_1 ..... Cứ lần lượt như thế cho đến $k_3=7$, cho k_2 tăng dần từ 0 đến 7 để tìm k_0,k_1. Ta chọn các kết quả sao cho k_3, $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$.

$$\left[x^7\right]=\sum\frac{8!}{k_3!k_2!k_1!k_0!}2^{k_3}(-1)^{k_2}(-1)^{k_1}3^{k_0}$$
$$=\sum\frac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}.$$

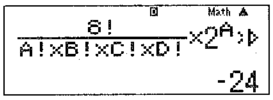
Ta có bảng các giá trị $k_3,k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$ sau.

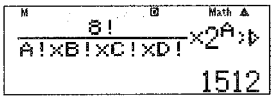
k_3	k_2	k_1	k_0
0	0	7	1
0	1	5	2
0	2	3	3
0	3	1	4
1	0	4	3
1	1	2	4
1	2	0	5
2	0	1	5

Gán $0\to$ M, ấn [0] [SHIFT] [RCL] [M+].

Nhập $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vào máy, ấn [▭/▭] [8] [SHIFT] [x^{-1}] [▼] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [°'''] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [x^{-1}] [▶] [×] [2] [$x^{■}$] [ALPHA] [(−)] [▶] [×] [(] [(−)] [1] [)] [$x^{■}$] [ALPHA] [°'''] [▶] [×] [(] [(−)] [1] [)] [$x^{■}$] [ALPHA] [hyp] [▶] [×] [3] [$x^{■}$] [ALPHA] [sin]

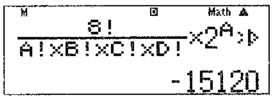
Ấn [CALC] với $A=0$, $B=0$, $C=7$, $D=1$ ta được kết quả -24. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



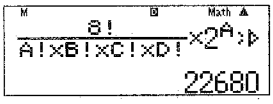


Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=0,B=1,C=5,D=2$ ta được kết quả 1512. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.

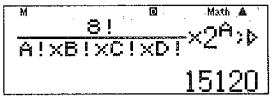
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=0,B=2,C=3,D=3$ ta được kết quả -15120. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



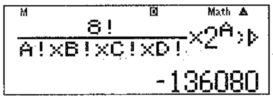
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=0,B=3,C=1,D=4$ ta được kết quả 22680. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



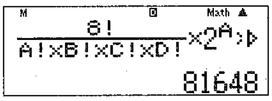
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=1,B=0,C=4,D=3$ ta được kết quả 15120. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



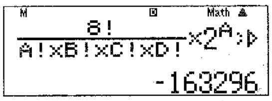
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=1,B=1,C=2,D=4$ ta được kết quả -136080. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



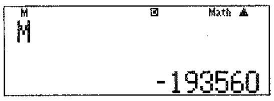
Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=1,B=2,C=0,D=5$ ta được kết quả 81648. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



Ấn [▲] để quay trở lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!\times D!}\times 2^{A}\times(-1)^{B}\times(-1)^{C}\times 3^{D}$ vừa nhập. Ấn [CALC] với $A=2,B=0,C=1,D=5$ ta được kết quả -163296. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.



Vậy $\left[x^7\right]=M=-193560$ (ấn [ALPHA] [M+] [=]).



Đáp án D.

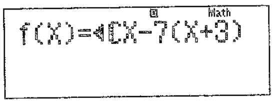
Ví dụ 11: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$. Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $f(x)=\left(1+\frac{n}{6}x+3x^2\right)^{n-2}$

A. $8050x^4$ B. $8080x^4$ C. $8085x^4$ D. $8500x^4$

Lời giải

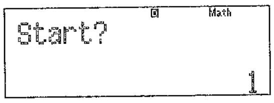
Điều kiện $n>0$. Sử dụng TABLE để tìm nghiệm của phương trình $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

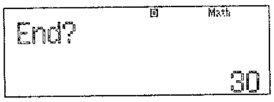
Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], rồi ấn [MODE] [7] (TABLE).

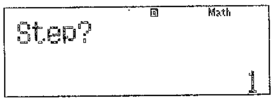


Nhập vào hàm $f(X)=(X+4)C(X+1)-(X+3)CX-7(X+3)$: [(] [ALPHA] [)] [+] [4] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [−] [7] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)]

Cho Start = 1, End = 30, Step = 1.





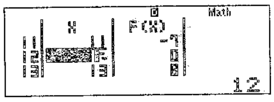


STUDY TIPS

Do $n>0$ nên ta chọn Start = 1. Khi đưa về chế độ [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1] để nhập duy nhất hàm $f(X)$, bảng hiện được tối đa 30 giá trị, nên ta chọn End = 30. Lại có nghiệm phải nguyên nên Step = 1

Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $X=12$ thì $F(X)=0$.

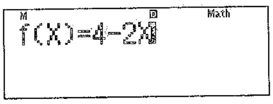
Như vậy, phương trình $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$ có nghiệm là $n=12$.

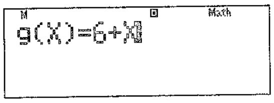


Khi đó $f(x)=(1+2x+3x^2)^{10}$. Với $k_2,k_1,k_0\in\mathbb{N}$, ta có hệ $\begin{cases}k_0+k_1+k_2=10\\k_1+2k_2=4\end{cases}$

$$\longrightarrow\begin{cases}k_2=X\\k_0+k_1=10-X\\k_1=4-2X\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}k_2=X\\k_1=4-2X=f(X)\\k_0=6+X=g(X)\end{cases}\rightarrow X,f(X),g(X)\in\mathbb{N}\text{ và }0\le X<10.$$

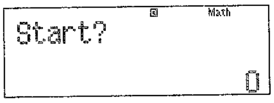
Ấn [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [2], rồi ấn [MODE] [7] (TABLE).

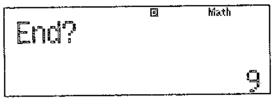


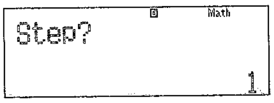


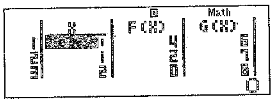
Nhập vào $f(X)=4-2X$ và $g(X)=6+X$.

Ấn [=], nhập Start = 0, End = 9, Step = 1.





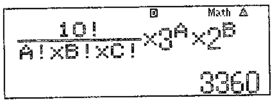




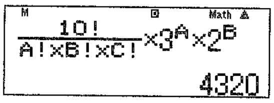
Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $(X,F(X),G(X))=(0;4;6),(1;2;7),(2;0;8)$. Suy ra $(k_2;k_1;k_0)=(0;4;6),(1;2;7),(2;0;8)$

Hệ số của x^4 trong khai triển là $[x^4]=\sum\frac{10!}{k_2!k_1!k_0!}.3^{k_2}.2^{k_1}=\sum\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times3^A\times2^B$

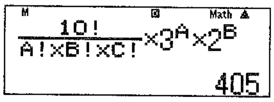
Nhập vào máy $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times3^A\times2^B$, ấn [▯] [1] [0] [SHIFT] [x^{-1}] [▽] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [°'''] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [x^{-1}] [▶] [×] [3] [$x^{■}$] [ALPHA] [(−)] [▶] [×] [2] [$x^{■}$] [ALPHA] [°''']



Ấn [CALC] với A = 0, B = 4, C = 6 ta được kết quả 3360. Ấn [M+] để thêm kết quả này vào M.

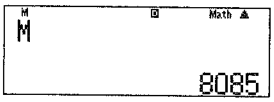


Ấn (▲) để quay trở lại biểu thức $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times 2^B$ vừa nhập. Ấn CALC với $A=1,B=2,C=7$ ta được kết quả 4320. Ấn M+ để thêm kết quả này vào M.



Ấn (▲) để quay trở lại biểu thức $\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times 2^B$ vừa nhập.

Ấn CALC với $A=2,B=0,C=8$ ta được kết quả 405.



Ấn M+ để thêm kết quả này vào M.

Vậy $\left[x^4\right]=\sum\frac{10!}{A!\times B!\times C!}\times 3^A\times 2^B=M$, ấn ALPHA M+ =, máy hiện kết quả 8085.

Đáp án C.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức

Câu 1: $\frac{(5+3)!}{5!+3!}$ bằng số nào dưới đây?

A. 1 B. 56 C. 320 D. 8

Câu 2: Giá trị của $\sqrt{6A_4^3}$ bằng:

A. 24 B. 12 C. 144 D. 121

Câu 3: Giá trị của $5!-P_4$ bằng:

A. 5 B. 120 C. 24 D. 96

Câu 4: Tích $P_3.P_4$ bằng:

A. 24. B. 30. C. 144. D. 576.

Câu 5: Giá trị của tổng $A_5^3+A_5^2$ bằng:

A. 60. B. 80 C. 100. D. 120.

Câu 6: Giá trị của $A_8^5:A_6^4$ bằng:

A. $\frac{56}{3}$. B. $\frac{5}{4}$. C. 11. D. 7.

Câu 7: Giá tri của $P_4.C_4^3$ bằng:

A. 16 B. 48 C. 96 D. 120

Câu 8: Giá trị của tổng $C_{15}^8+C_{15}^9$ có giá trị bằng:

A. C_{16}^8 B. C_{16}^9 C. C_{15}^{10} D. C_{16}^{10}

Câu 9: Giá trị của hiệu $C_{19}^{10}-C_{18}^{10}$ bằng:

A. C_{18}^9 B. C_{19}^9 C. C_{19}^{11} D. C_{18}^{11}

Câu 10: Cho biểu thức $B=\frac{C_{100}^{98}+C_{1000}^{998}}{C_{100}^2+C_{1000}^2}$. Rút gọn biểu thức B, ta được kết quả bằng:

A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 11: Tính giá trị biểu thức $N=\frac{C_{21}^4}{C_{19}^3+C_{19}^4+C_{20}^3}$, ta được kết quả:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 12: Tính $M=C_5^3C_4^2+C_4^2C_3^1+C_3^1C_3^0$

A. $M=81$ B. $M=72$ C. $M=39$ D. $M=33$

Câu 13: Tính $M=\frac{1+C_7^4+C_7^3-C_8^4}{1+C_{10}^5+C_{10}^6-C_{11}^6}+\frac{A_3^2}{P_2}$

A. $M=1$ B. $M=3$ C. $M=4$ D. $M=7$

Câu 14: Đánh giá $\frac{453!}{450!3!}$ thì phỏng đoán nào dưới đây đúng?

A. Lớn hơn 10^{100}

B. Nằm giữa 10^{10} và 10^{100}

C. Nằm giữa 10^5 và 10^{10}

D. Nằm giữa 10 và 10^5

Câu 15: Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $C_{10}^6=C_9^6+C_9^4$ B. $C_{10}^6=C_{10}^5+C_{10}^4$

C. $C_{10}^6=C_9^5+C_9^4$ D. $C_{10}^6=C_{10}^5+C_9^4$

Câu 16: Trong các đẳng thức sau, hãy chọn đẳng thức **sai**:

A. $C_{14}^3=C_{14}^{11}$

B. $C_{10}^3+C_{10}^4=C_{11}^4$

C. $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$

D. $C_{10}^4+C_{11}^4=C_{11}^5$

Câu 17: Tính $C_5^0-C_5^1+C_5^2-C_5^3+C_5^4-C_5^5$. Chọn kết quả đúng:

A. 1 B. 6 C. 0 D. 64

Câu 18: Tổng $S=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4$ bằng:

A. 31 B. 27 C. 32 D. 30

Câu 19: Giá trị của $C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+...+2^5C_5^5$ bằng:

A. 81. B. 2^5. C. 5. D. 3^5.

Câu 20: Giá trị của tích số $C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2$ bằng:

A. 7200 B. 1720 C. 2700 D. 2520

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Câu 21: Cho biểu thức $M=C_{2n}^n+C_{2n}^{n-1}$. Kết quả **đúng** là:

A. $M=\frac{1}{2}C_{2n+1}^{n+1}$ B. $M=\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$

C. $M=\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+2}$ D. $M=\frac{1}{2}C_{2n+1}^{n+2}$

Câu 22: Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $C_{n+1}^2-C_n^2=n+1$ B. $C_{n+1}^2-C_n^2=n$

C. $C_{n+1}^2-C_n^2=n+2$ D. $C_{n+1}^2-C_n^2=n-2$

Câu 23: Rút gọn biểu thức $M=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)$

A. $M=\frac{1}{C_n^k}$ B. $M=\frac{1}{C_{n+1}^k}$

C. $M=\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}$ D. $M=\frac{1}{C_{n+1}^{k-1}}$

Câu 24: Cho biểu thức $M=A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}$. Kết quả **đúng** là:

A. $M=kA_{n+k}^n$ B. $M=k^2A_{n+k}^{n+1}$

C. $M=k^2A_{n+k}^n$ D. $M=kA_{n+k}^{n+1}$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $C_n^k+3C_n^{k+1}+3C_n^{k+2}+C_n^{k+3}$. Kết quả **đúng** là

A. C_{n+2}^{k+2} B. C_{n+3}^k C. C_{n+3}^{k+2} D. C_{n+3}^{k+3}

Câu 26: Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $A_n^k-A_{n-1}^k=kA_{n-1}^{k-1}$ B. $A_n^k-A_{n-1}^k=kA_{n-1}^k$

C. $A_n^k-A_{n-1}^k=kA_n^k$ D. $A_n^k-A_{n-1}^k=kA_n^{k-1}$

Câu 27: Rút gọn biểu thức $\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+...+\frac{1}{A_n^2}+\frac{1}{n}$ với $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Kết quả bằng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 28: Biểu thức $1+P_1+2P_2+3P_3+...+(n-1)P_{n-1}$ có kết quả sau khi rút gọn bằng:

A. $P_{n-1}+1$ B. P_n+1 C. P_n D. P_{n-1}

Dạng 3: Kiểm tra nghiệm của phương trình, hệ phương trình và bất phương trình

Câu 29: Nghiệm của phương trình $C_x^3=2C_x^2$ là:

A. $\{2\}$ B. $\{3\}$

C. $\{4\}$ D. $\{8\}$

Câu 30: Nếu $2A_n^4=6A_{n-1}^4$ thì n nhận kết quả nào dưới đây:

A. 4 B. 6 C. 24 D. 26

Câu 31: Nếu $A_{n+1}^4=63(n^2-1)$ thì n bằng:

A. 4 B. 7 C. 9 D. 11

Câu 32: Tập nghiệm của phương trình $C_{2x+4}^{3x-1}=C_{2x+4}^{x^2-2x+3}$ là

A. $\{3;4\}$ B. $\{2;3\}$ C. $\{2;4\}$ D. $\{1;2\}$

Câu 33: Phương trình $\frac{5}{C_5^x}-\frac{2}{C_6^x}=\frac{14}{C_7^x}$ có nghiệm là

A. $x=3$ B. $x=4$ C. $x=5$ D. $x=6$

Câu 34: Phương trình $24\left(A_{x+1}^3-C_x^{x-4}\right)=23A_x^4$ có nghiệm là

A. $x=3$ B. $x=4$ C. $x=5$ D. $x=6$

Câu 35: Phương trình $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$ có nghiệm là

A. $x=3$ B. $x=4$ C. $x=5$ D. $x=7$

Câu 36: Phương trình $C_x^2C_x^{x-2}+2C_x^2C_x^3+C_x^3C_x^{x-3}=100$ có nghiệm là:

A. $x=3$ B. $x=4$ C. $x=5$ D. $x=6$

Câu 37: Phương trình $C_x^2+2C_{x+1}^2+3C_{x+2}^2+4C_{x+3}^2=365$ có nghiệm là

A. $x=7$ B. $x=4$ C. $x=5$ D. $x=6$

Câu 38: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n=243$

A. $n=4$ B. $n=5$ C. $n=6$ D. $n=7$

Câu 39: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^13^{n-1}+2C_n^23^{n-2}+3C_n^33^{n-3}+...+nC_n^n=256$

A. $n=4$ B. $n=5$ C. $n=6$ D. $n=7$

Câu 40: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$

A. $n=8$ B. $n=9$ C. $n=10$ D. $n=11$

Câu 41: Tìm số nguyên dương n sao cho $P_{n-1}.A_{n+4}^4<15P_{n+2}$

A. $\{3;4;5\}$ B. $\{5;6;7\}$ C. $\{2;6;8\}$ D. $\{7;8;9\}$

Câu 42: Giải bất phương trình $(x!)^3C_x^xC_{2x}^xC_{3x}^x\le 720$

A. $x\in\{1;2;3\}$ B. $x\in\{0;1;2\}$

C. $x\in\{0;2;3\}$ D. $x\in\{2;3;4\}$

Câu 43: Bất phương trình $\frac{C_{n+1}^2}{C_n^2}\ge\frac{3}{10}n$ có tập nghiệm là

A. $2\le n<4$ B. $0\le n\le 2$

C. $1\le n\le 5$ D. $2\le n\le 5$

Câu 44: Bất phương trình $A_{n+1}^3+C_{n+1}^{n-1}<14(n+1)$ có tập nghiệm là

A. $2\le n<4$ B. $0\le n\le 2$

C. $1\le n\le 5$ D. $2\le n\le 5$

Câu 45: Bất phương trình $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{143}{4P_n}$ có tập nghiệm là:

A. $2\le n<4$ B. $0\le n\le 2$

C. $3<n\le 5$ D. $4<n\le 5$

Câu 46: Bất phương trình $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3-C_n^{n-4}}\le\frac{24}{23}$ có tập nghiệm là

A. $2\le n<4$ B. $0\le n\le 2$

C. $1\le n\le 5$ D. $2\le n\le 5$

Câu 47: Các giá trị $(x;k)$ thỏa mãn bất phương trình $\frac{P_{x+5}}{(x-k)!}\le 60A_{x+3}^{k+2}$ là

A. $(0;0),(1;1),(3;3)$

B. $(0;0),(1;0),(2;2)$

C. $(1;0),(1;1),(2;2),(3;3)$

D. $(0;0),(1;0),(1;1),(2;2),(3;3)$

Câu 48: Hệ phương trình $\begin{cases}C_x^y-C_x^{y+1}=0\\4C_y^x-5C_x^{y-1}=0\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x=17,y=8$ B. $x=17,y=-8$

C. $x=9,y=8$ D. $x=7,y=9$

Câu 49: Hệ phương trình $\begin{cases}C_y^x:C_{y+2}^x=\frac{1}{3}\\C_y^x:A_y^x=\frac{1}{24}\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x=4,y=1$ B. $x=4,y=8$

C. $\left[\begin{array}{l}x=4,y=1\\x=4,y=8\end{array}\right.$ D. $x=1,y=8$

Câu 50: Xác định các giá trị x và y sao cho $\left(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1$

A. $(2;1)$ B. $(2;2)$ C. $(3;7)$ D. $(7;3)$

Dạng 4: Giải các bài toán đếm và tính xác suất

Câu 51: Trong mặt phẳng, cho 7 điểm A, B, C, D, E, M, N khác nhau. Có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3

điểm lấy trong 7 điểm đó? (Giả thiết trong 7 điểm đó, không có 3 điểm thẳng hàng).

A. 210 B. 30 C. 35 D. 70

Câu 52: Một đội tuyển học sinh giỏi Toán gồm 10 em: 5 nam và 5 nữ. Muốn chọn ra một tổ trưởng, một tổ phó và một thư kí, trong đó tổ trưởng và tổ phó phải là hai người khác giới. Số cách chọn là:

A. 360 B. 380 C. 400 D. 420

Câu 53: Có 13 cuốn tập khác nhau: 3 cuốn bìa đỏ, 4 cuốn bìa xanh, 6 cuốn bìa vàng. Xếp tất cả lên một kệ dài, sao cho mọi cuốn tập có bìa cùng màu được xếp cạnh nhau. Số cách xếp bằng:

A. 622800 B. 622080 C. 622400 D. 622040

Câu 54: Một công ty trách nhiệm hữu hạn gồm 10 thành viên, trong đó có hai anh em ruột. Cần chọn một ban đại diện gồm 4 người sao cho nếu người anh được chọn thì người em không được chọn. Số cách để lập ban đại diện là:

A. 100 B. 98 C. 80 D. 182

Câu 55: Một đội bóng đá gồm 18 cầu thủ. Số cách chọn ra 11 cầu thủ để thi đấu là (trong 11 cầu thủ có 1 thủ môn, 1 đội trưởng và cầu thủ nào cũng có thể là thủ môn hoặc đội trưởng):

A. 3500640 B. 3500600 C. 3500650 D. 3500620

Câu 56: Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ, còn lại là nam. Từ hội đồng đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Số cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ là:

A. 5500 B. 5510 C. 5520 D. 5530

Câu 57: Một hộp đựng 6 viên bi trắng và 4 viên bi đỏ có kích cỡ bằng nhau, chỉ khác nhau về màu sắc. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để 2 viên bi lấy được có cùng màu là:

A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{6}{15}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 58: Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 lá bài (12 lá hình và 40 lá nút ghi số 1 (ách), 2,..., 10). Rút ngẫu nhiên 2 lá. Xác suất để 2 lá rút được là hai lá hình là:

A. $\frac{210}{221}$ B. $\frac{11}{221}$ C. $\frac{13}{221}$ D. $\frac{211}{221}$

Câu 59: Một thùng chứa 10 bóng đèn, trong đó có 4 bóng đèn hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Xác suất để có ít nhất 1 bóng đèn hỏng là:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 60: Chọn ngẫu nhiên 3 số trong 80 số tự nhiên từ 1 đến 80. Xác suất để trong 3 số đó có ít nhất 1 số chính phương là:

A. $\frac{53}{254}$ B. $\frac{56}{205}$ C. $\frac{563}{2054}$ D. $\frac{53}{204}$

Dạng 5: Tìm số hạng chứa x^a trong khai triển Nhị thức Newton

Câu 61: Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển Niu–tơn nhị thức $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6, (x>0)$ là:

A. 60 B. 80. C. 160. D. 240.

Câu 62: Hệ số của x^{31} trong khai triển nhị thức Niu–tơn $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$ là:

A. 9881. B. 9880. C. 9882. D. 9885.

Câu 63: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\frac{8}{x^2}\right)^8$ là:

A. 140. B. 960. C. 28. D. 25.

Câu 64: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$ là:

A. −35. B. 35. C. 40. D. −40.

Câu 65: Biết rằng $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ là:

A. −792. B. 790. C. 792. D. −790.

Câu 66: Biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$. Hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu–tơn $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ là:

A. 490. B. 492. C. 495. D. 485.

Câu 67: Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $f(x)=(1+2x)^{10}(x^2+x+1)^2$

A. 41748 B. 41750 C. 41784 D. 41740

Câu 68: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=36$. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển Newton của biểu thức $f(x)=(1+2x^2-x^3)^n$

A. 1356 B. 1556 C. 1456 D. 1450

Câu 69: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển Newton của $(x^5-4x^3-2)^{20}$

A. 49807360 B. 49807300
C. 49807350 D. 49807340

Câu 70: Hệ số của x^{193} trong khai triển Newton của $\left(x^2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{100}$ là:

A. 19850 B. 19000 C. 19845 D. 19800

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức

Câu 1: Đáp án C.

Nhập vào máy $\frac{(5+3)!}{5!+3!}$, ấn [▭/▭] [(] [5] [+] [3] [)] [SHIFT] [x^{-1}] [▽] [5] [SHIFT] [x^{-1}] [+] [3] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 320.

```
(5+3)!
5!+3!
                320
```

Câu 2: Đáp án B.

Nhập vào máy $\sqrt{6\times 4P3}$, ấn [√▭] [6] [×] [4] [SHIFT] [×] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 12.

```
√6×4P3
                 12
```

Câu 3: Đáp án D.

Nhập vào máy $5!-4!$, ấn [5] [SHIFT] [x^{-1}] [−] [4] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 96.

```
5!-4!
                 96
```

Câu 4: Đáp án C.

Nhập vào máy $3!\times 4!$, ấn [3] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [4] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 144.

```
3!×4!
                144
```

Câu 5: Đáp án B.

Nhập vào máy $5P3+5P2$, ấn [5] [SHIFT] [×] [3] [+] [5] [SHIFT] [×] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 80.

```
5P3+5P2
                 80
```

Câu 6: Đáp án A.

Nhập vào máy $8P5\div 6P4$, ấn [8] [SHIFT] [×] [5] [÷] [6] [SHIFT] [×] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{56}{3}$.

```
8P5÷6P4
                 56
                  3
```

Câu 7: Đáp án C.

Nhập biểu thức $4!\times 4C3$ vào máy tính: [4] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [4] [SHIFT] [÷] [3].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 96.

```
4!×4C3
                 96
```

Câu 8: Đáp án B.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $15C8+15C9-16C8$, ấn [1] [5] [SHIFT] [÷] [8] [+] [1] [5] [SHIFT] [÷] [9] [−] [1] [6] [SHIFT] [÷] [8]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1430\neq 0$.

```
15C8+15C9-16C8
              -1430
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $15C8+15C9-16C9$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
15C8+15C9-16C9
                  0
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $15C8+15C9-15C10$ vào máy tính. Ấn [=], máy hiện kết quả $8437\neq 0$.

```
15C8+15C9-15C10
               8437
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $15C8+15C9-16C10$ vào máy tính. Ấn [=], máy hiện kết quả $3432\neq 0$.

```
15C8+15C9-16C10
               3432
```

Câu 9: Đáp án A.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $19C10-18C10-18C9$, ấn [1] [9] [SHIFT] [÷] [1] [0] [−] [1] [8] [SHIFT] [÷] [1] [0] [−] [1] [8] [SHIFT] [÷] [9]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
19C10-18C10-18C9
                  0
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $19C10-18C10-19C9$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-43758\neq 0$.

```
19C10-18C10-19C9
             -43758
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $19C10-18C10-19C11$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-26962\neq 0$.

```
19C10-18C10-19C▸
             -26962
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $19C10-18C10-18C11$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $16796\neq 0$.

```
19C10-18C10-18C▸
              16796
```

Câu 10: Đáp án B.

Nhập vào máy $\frac{100C98+1000C998}{100C2+1000C2}$, ấn [▭/▭] [1] [0] [0] [SHIFT] [÷] [9] [8] [+] [1] [0] [0] [0] [SHIFT] [÷] [9] [9] [8] [▽] [1] [0] [0] [SHIFT] [÷] [2] [+] [1] [0] [0] [0] [SHIFT] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1.

```
100C98+1000C998
 100C2+1000C2
                1
```

Câu 11: Đáp án D.

Nhập vào máy $\dfrac{21C4}{19C3+19C4+20C3}$, ấn [▭] [2] [1] [SHIFT] [÷] [4] [▽] [1] [9] [SHIFT] [÷] [3] [+] [1] [9] [SHIFT] [÷] [4] [+] [2] [0] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả 1.

```
     21C4
19C3+19C4+20C3
                1
```

Câu 12: Đáp án A.

Nhập vào máy $5C3\times 4C2+4C2\times 3C1+3C1\times 3C0$, ấn [5] [SHIFT] [÷] [3] [×] [4] [SHIFT] [÷] [2] [+] [4] [SHIFT] [÷] [2] [×] [3] [SHIFT] [÷] [1] [+] [3] [SHIFT] [÷] [1] [×] [3] [SHIFT] [÷] [0]. Ấn [=], máy hiện kết quả 81.

Câu 13: Đáp án C.

Nhập vào máy $\dfrac{1+7C4+7C3-8C4}{1+10C5+10C6-11C6}+\dfrac{3P2}{2!}$, ấn [▭] [1] [+] [7] [SHIFT] [÷] [4] [+] [7] [SHIFT] [÷] [3] [−] [8] [SHIFT] [÷] [4] [▽] [1] [+] [1] [0] [SHIFT] [÷] [5] [+] [1] [0] [SHIFT] [÷] [6] [−] [1] [1] [SHIFT] [÷] [6] [▷] [+] [▭] [3] [SHIFT] [×] [2] [▽] [2] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện kết quả 4 .

Câu 14: Đáp án C.

Nhập vào máy $\dfrac{453!}{450!\times 3!}$, ấn [▭] [4] [5] [3] [SHIFT] [x^{-1}] [▽] [4] [5] [0] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [3] [SHIFT] [x^{-1}]. Ấn [=], máy hiện Math ERROR (Lỗi phép tính).

```
  453!
450!x3!
```

```
Math ERROR

[AC]   :Cancel
[◀][▶]:Goto
```

Nhận thấy rằng $\dfrac{453!}{450!.3!}=\dfrac{453!}{(453-3)!.3!}=C_{453}^{3}$.

Nhập vào máy 453C3, ấn [4] [5] [3] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện $1539086=15,39086.10^{6}\in\left(10^{5};10^{10}\right)$.

```
453C3
          15.390826x10^6
```

Quả thật, khi nhập biểu thức $\dfrac{453!}{450!\times 3!}$ vào máy tính, kết quả ta nhận được sẽ là Math ERROR là vì trong biểu thức có chứa giá trị lớn hơn 69!, đây là một giá trị quá lớn.

Câu 15: Đáp án A.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $10C6-9C6-9C4$, ấn [1] [0] [SHIFT] [÷] [6] [−] [9] [SHIFT] [÷] [6] [−] [9] [SHIFT] [÷] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
10C6-9C6-9C4
               0
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $10C6-9C5-9C4$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-42\neq 0$.

```
10C6-9C5-9C4
             -42
```

– *Phương án C:* Xét $10C6-10C5-10C4$ Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-252\neq 0$.

```
10C6-10C5-10C4
            -252
```

– *Phương án D:* Xét $10C6-10C5-9C4$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-168\neq 0$.

```
10C6-10C5-9C4
            -168
```

Câu 16: Đáp án D.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $14C3-14C11$, ấn [1] [4] [SHIFT] [÷] [3] [−] [1] [4] [SHIFT] [÷] [1] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0 . A đúng.

```
14C3-14C11
               0
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $10C3+10C4-11C4$, ấn [1] [0] [SHIFT] [÷] [3] [+] [1] [0] [SHIFT] [÷] [4] [−] [1] [1] [SHIFT] [÷] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. B đúng.

```
10C3+10C4-11C4
               0
```

– *Phương án C:* Nhập $4C0+4C1+4C2+4C3+4C4$, ấn [4] [SHIFT] [÷] [0] [+] [4] [SHIFT] [÷] [1] [+] [4] [SHIFT] [÷] [2] [+] [4] [SHIFT] [÷] [3] [+] [4] [SHIFT] [÷] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 16 . C đúng.

```
4C0+4C1+4C2+4C3▶
              16
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $10C4+11C4-11C5$, ấn [1] [0] [SHIFT] [÷] [4] [+] [1] [1] [SHIFT] [÷] [4] [−] [1] [1] [SHIFT] [÷] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $78\neq 0$. D sai.

```
10C4+11C4-11C5
              78
```

Ta thấy $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=\sum_{x=0}^{4}C_4^x$ nên bằng cách sử dụng lệnh tính tổng [SHIFT] [$\log_\square\square$] ($\sum\square$), ta có thể tính được tổng trên một cách nhanh hơn.

```
 4
 Σ (4CX)
x=0
              16
```

Câu 17: Đáp án C.

Cách 1: Nhập $5C0-5C1+5C2-5C3+5C4-5C5$ vào máy, ấn [5] [SHIFT] [÷] [0] [−] [5] [SHIFT] [÷] [1] [+] [5] [SHIFT]

[÷] [2] [−] [5] [SHIFT] [÷] [3] [+] [5] [SHIFT] [÷] [4] [−] [5] [SHIFT] [÷] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
5C0-5C1+5C2-5C3▸
                0
```

Cách 2: Có $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5 = \sum_{x=0}^{5}(-1)^x C_5^x$.

Nhập vào máy $\sum_{x=0}^{5}\left((-1)^X \times 5CX\right)$, ấn [SHIFT] [log□] [(] [(−)] [1] [)] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [×] [5] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
 5
 Σ ((-1)^X×5CX)
x=0
                0
```

Với những tổng gồm nhiều số hạng có dạng $f(a)+f(a+1)+f(a+2)+...+f(b-2)+f(b-1)+f(b)$ thì ta có thể đưa về hàm tổng $\sum_{x=a}^{b} f(x)$ và sử dụng lệnh [SHIFT] [log□] (Σ□) trong máy để tính.

Câu 18: Đáp án A.

– *Cách 1:* Nhập vào máy $5C0 + 5C1 + 5C2 + 5C3 + 5C4$, ấn [5] [SHIFT] [÷] [0] [+] [5] [SHIFT] [÷] [1] [+] [5] [SHIFT] [÷] [2] [+] [5] [SHIFT] [÷] [3] [+] [5] [SHIFT] [÷] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 31.

```
5C0+5C1+5C2+5C3▸
               31
```

– *Cách 2:* Ta có $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = \sum_{x=0}^{4} C_5^x$.

Nhập vào máy $\sum_{x=0}^{4}(5CX)$, ấn [SHIFT] [log□] [5] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 31.

Câu 19: Đáp án D.

– *Cách 1:* Nhập vào máy $5C0 + 2\times 5C1 + 2^2 \times 5C2 + 2^3 \times 5C3 + 2^4 \times 5C4 + 2^5 \times 5C5$. Ấn [5] [SHIFT] [÷] [0] [+] [2] [×] [5] [SHIFT] [÷] [1] [+] [2] [x²] [×] [5] [SHIFT] [÷] [2] [+] [2] [SHIFT] [x²] [×] [5] [SHIFT] [÷] [3] [+] [2] [x■] [4] [▶] [×] [5] [SHIFT] [÷] [4] [+] [2] [x■] [5] [▶] [×] [5] [SHIFT] [÷] [5].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $243 = 3^5$.

```
5C0+2×5C1+2²×5C▸
              243
```

– *Cách 2:* Ta có $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + ... + 2^5C_5^5 = \sum_{x=0}^{5} 2^x C_5^x$.

Nhập vào máy $\sum_{x=0}^{5}\left(2^X \times 5CX\right)$, ấn [SHIFT] [log□] [2] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [×] [5] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $243 = 3^5$.

```
 5
 Σ (2^X×5CX)
x=0
              243
```

Câu 20: Đáp án D.

– *Cách 1:* Nhập vào máy $8C2 \times 6C2 \times 4C2 \times 2C2$, ấn [8] [SHIFT] [÷] [2] [×] [6] [SHIFT] [÷] [2] [×] [4] [SHIFT] [÷] [2] [×] [2] [SHIFT] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2520.

```
8C2×6C2×4C2×2C2
             2520
```

– *Cách 2:* Ta có $C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2 = \prod_{x=1}^{4} C_{2x}^2$.

Nhập vào máy $\prod_{x=1}^{4}(2XC2)$, ấn [ALPHA] [log□] [2] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [▼] [1] [▲] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2520.

```
 4
 Π (2XC2)
x=1
             2520
```

Với những tích gồm nhiều số hạng có dạng $f(a)\times f(a+1)\times f(a+2)\times...\times f(b-2)\times f(b-1)\times f(b)$ thì ta cũng có thể đưa về hàm tích $\prod_{x=a}^{b} f(x)$ và dùng lệnh [ALPHA] [log□] trong máy để tính.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Câu 21: Đáp án B.

– *Phương án A:* Nhập vào máy

$$2XCX + 2XC(X-1) - \frac{1}{2}\times(2X+1)C(X+1)$$

Ấn [2] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [+] [2] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [−] [■/■] [1] [▼] [2] [▶] [×] [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{3}{2} \neq 0$. A sai.

```
2XCX+2XC(X-1)-½▸
                3/2
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy

$$2XCX + 2XC(X-1) - \frac{1}{2}\times(2X+2)C(X+1)$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

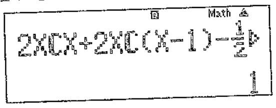
Sử dụng CALC với vài giá trị X nguyên khác $(X \geq 1)$ máy đều hiện kết quả bằng 0. B đúng.

```
2XCX+2XC(X-1)-½▸
                0
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy

$$2XCX+2XC(X-1)-\frac{1}{2}\times(2X+2)C(X+2)$$

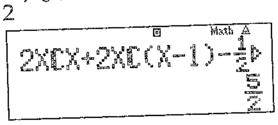
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1\neq 0$. C sai.



– *Phương án C:* Nhập vào máy

$$2XCX+2XC(X-1)-\frac{1}{2}\times(2X+1)C(X+2)$$

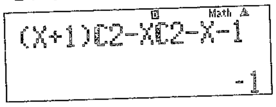
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{5}{2}\neq 0$. D sai.



Câu 22: Đáp án B.

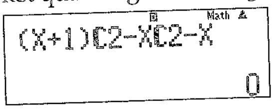
– *Phương án A:* Nhập vào máy $(X+1)C2-XC2-X-1$, ấn [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [2] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [−] [ALPHA] [)] [−] [1]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1\neq 0$. A sai.



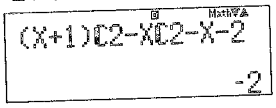
– *Phương án B:* Nhập vào máy $(X+1)C2-XC2-X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Sử dụng CALC với vài giá trị X nguyên khác $(X\geq 2)$ máy đều hiện kết quả bằng 0. B đúng.



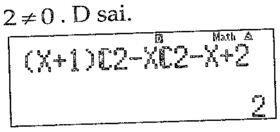
– *Phương án C:* Nhập vào máy $(X+1)C2-XC2-X-2$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2\neq 0$. C sai.



– *Phương án D:* Nhập $(X+1)C2-XC2-X+2$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2\neq 0$. D sai.



Câu 23: Đáp án A.

Coi $n=X$ và $k=Y$ với $X\geq Y\geq 0$ (do $n\geq k\geq 0$).

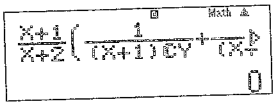
– *Phương án A:* Nhập vào máy

$$\frac{X+1}{X+2}\left(\frac{1}{(X+1)CY}+\frac{1}{(X+1)C(Y+1)}\right)-\frac{1}{XCY}$$

Ấn [▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [+] [2] [▶] [(] [▭/▭] [1] [▼] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [+] [▭/▭] [1] [▼] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [▶] [)] [−] [▭/▭] [1] [▼] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [S⇔D]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

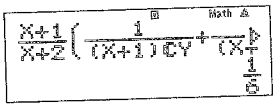
Sử dụng CALC với vài giá trị X,Y nguyên khác $(X\geq Y\geq 0)$ máy đều hiện kết quả bằng 0.



– *Phương án B:* Nhập vào máy

$$\frac{X+1}{X+2}\left(\frac{1}{(X+1)CY}+\frac{1}{(X+1)C(Y+1)}\right)-\frac{1}{(X+1)CY}$$

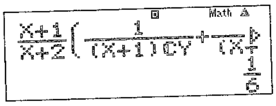
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{1}{6}\neq 0$.



– *Phương án C:* Nhập vào máy

$$\frac{X+1}{X+2}\left(\frac{1}{(X+1)CY}+\frac{1}{(X+1)C(Y+1)}\right)-\frac{1}{(X+1)C(Y+1)}$$

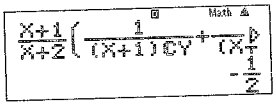
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{1}{6}\neq 0$.



– *Phương án D:* Nhập vào máy

$$\frac{X+1}{X+2}\left(\frac{1}{(X+1)CY}+\frac{1}{(X+1)C(Y+1)}\right)-\frac{1}{(X+1)C(Y-1)}$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{1}{2}\neq 0$.



Câu 24: Đáp án C.

Coi $n=X$ và $k=Y$ với $X\geq 0, Y\geq 2$ (do $n\geq 0, k\geq 2$).

– *Phương án A:* Nhập vào máy

$(X+Y)P(X+2)+(X+Y)P(X+1)-Y\times(X+Y)PX$

Ấn [(] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [)] [SHIFT] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [)] [SHIFT] [×] [(] [ALPHA]

[)] [+] [1] [)] [–] [ALPHA] [S⇔D] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [)] [SHIFT] [×] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $6 \neq 0$.

(X+Y)P(X+2)+(X+▷
6

– *Phương án B:* Nhập vào máy $(X+Y)\mathbf{P}(X+2)+(X+Y)\mathbf{P}(X+1)-Y^2\times(X+Y)\mathbf{P}(X+1)$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-12 \neq 0$.

(X+Y)P(X+2)+(X+▷
-12

– *Phương án C:* Nhập vào máy $(X+Y)\mathbf{P}(X+2)+(X+Y)\mathbf{P}(X+1)-Y^2\times(X+Y)\mathbf{P}X$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0.

Sử dụng CALC với vài giá trị X,Y nguyên khác $(X\geq 0, Y\geq 2)$ máy đều hiện kết quả bằng 0.

(X+Y)P(X+2)+(X+▷
0

– *Phương án D:* Nhập vào máy $(X+Y)\mathbf{P}(X+2)+(X+Y)\mathbf{P}(X+1)-Y\times(X+Y)\mathbf{P}(X+2)$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0.

(X+Y)P(X+2)+(X+▷
0

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [3] $(Y=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-36 \neq 0$.

(X+Y)P(X+2)+(X+▷
-36

Câu 25: Đáp án D.

Coi $n=X$ và $k=Y$ với $0\leq Y+3\leq X$

– *Phương án A:* Nhập vào máy $X\mathbf{C}Y+3\times X\mathbf{C}(Y+1)+3\times X\mathbf{C}(Y+2)+X\mathbf{C}(Y+3)-(X+2)\mathbf{C}(Y+2)$.

Ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [S⇔D] [+] [3] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [)] [+] [3] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [2] [)] [+] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [3] [)] [–] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [2] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $35 \neq 0$.

XCY+3×XC(Y+1)+3▷
35

– *Phương án B:* Nhập vào máy $X\mathbf{C}Y+3\times X\mathbf{C}(Y+1)+3\times X\mathbf{C}(Y+2)+X\mathbf{C}(Y+3)-(X+3)\mathbf{C}Y$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $62 \neq 0$.

XCY+3×XC(Y+1)+3▷
62

– *Phương án C:* Nhập vào máy $X\mathbf{C}Y+3\times X\mathbf{C}(Y+1)+3\times X\mathbf{C}(Y+2)+X\mathbf{C}(Y+3)-(X+3)\mathbf{C}(Y+2)$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $14 \neq 0$.

XCY+3×XC(Y+1)+3▷
14

– *Phương án D:* Nhập vào máy $X\mathbf{C}Y+3\times X\mathbf{C}(Y+1)+3\times X\mathbf{C}(Y+2)+X\mathbf{C}(Y+3)-(X+3)\mathbf{C}(Y+3)$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0.

Sử dụng CALC với vài giá trị X,Y nguyên khác $(X\geq Y+3\geq 0)$ máy đều hiện kết quả bằng 0.

XCY+3×XC(Y+1)+3▷
0

Câu 26: Đáp án A.

Coi $n=X$ và $k=Y$ với $0\leq Y\leq X-1$

– *Phương án A:* Nhập vào máy $X\mathbf{P}Y-(X-1)\mathbf{P}Y-Y\times(X-1)\mathbf{P}(Y-1)$. Ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [ALPHA] [S⇔D] [–] [(] [ALPHA] [)] [–] [1] [)] [SHIFT] [×] [ALPHA] [S⇔D] [–] [ALPHA] [S⇔D] [×] [(] [ALPHA] [)] [–] [1] [)] [SHIFT] [×] [(] [ALPHA] [S⇔D] [–] [1] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0.

Sử dụng CALC với vài giá trị X,Y nguyên khác $(0\leq Y\leq X-1)$ máy đều hiện kết quả bằng 0.

XPY−(X−1)PY−Y×(▷
0

– *Phương án B:* Nhập vào máy $X\mathbf{P}Y-(X-1)\mathbf{P}Y-Y\times(X-1)\mathbf{P}Y$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn

[=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-1\neq 0$.

```
XPY-(X-1)PY-Y×(▸
                -1
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $XPY-(X-1)PY-Y\times XPY$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-2\neq 0$.

```
XPY-(X-1)PY-Y×X▸
                -2
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $XPY-(X-1)PY-Y^2\times XPY$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-2\neq 0$.

```
XPY-(X-1)PY-Y²×▸
                -2
```

Câu 27: Đáp án A.

> **Nhận xét:** Dựa vào đáp án, ta có thể kết luận rằng với mọi giá trị $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ thì giá trị của biểu thức luôn không đổi. Có nghĩa kết quả của biểu thức đó không phụ thuộc vào n.

Chọn $n=3$ thì $\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+...+\frac{1}{A_n^2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+\frac{1}{3}$.

Nhập vào máy $\frac{1}{2P2}+\frac{1}{3P2}+\frac{1}{3}$, ấn [▭/▭] [1] [▼] [2] [SHIFT] [×] [2] [▶] [+] [▭/▭] [1] [▼] [3] [SHIFT] [×] [2] [▶] [+] [▭/▭] [1] [▼] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1.

```
1/2P2+1/3P2+1/3
                 1
```

Câu 28: Đáp án C.

Chọn $n=5$ thì $1+P_1+2P_2+3P_3+...+(n-1)P_{n-1}$ $=1+1!+2.2!+3.3!+4.4!$.

Nhập vào máy $1+1+2\times 2!+3\times 3!+4\times 4!$, ấn [1] [+] [1] [+] [2] [×] [2] [SHIFT] [x⁻¹] [+] [3] [×] [3] [SHIFT] [x⁻¹] [+] [4] [×] [4] [SHIFT] [x⁻¹]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 120.

Với $n=5$ thì $P_n=P_5=5!=120$.

```
1+1+2×2!+3×3!+4▸        5!
                 120                120
```

Dạng 3: Kiểm tra nghiệm của phương trình, hệ phương trình và bất phương trình

Câu 29: Đáp án D.

Điều kiện $x\geq 3, x\in\mathbb{N}$ nên ta loại ngay đáp án A.

Nhập vào máy $XC3-2\times XC2$, ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [3] [–] [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-5\neq 0$. Loại B.

```
XC3-2×XC2
               -5
```

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –8. Loại C.

```
XC3-2×XC2
               -8
```

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [8] $(X=8)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

```
XC3-2×XC2
                0
```

Câu 30: Đáp án B.

Điều kiện $n\geq 5, n\in\mathbb{N}$ nên ta loại ngay đáp án B.

Nhập vào máy $2\times XP4-6\times(X-1)P4$, ấn [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [4] [–] [6] [×] [(] [ALPHA] [)] [–] [1] [)] [SHIFT] [×] [4]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [6] $(X=6)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Câu 31: Đáp án C.

Nhập vào máy $(X+1)P4-63(X^2-1)$, ấn [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [×] [4] [–] [6] [3] [(] [ALPHA] [)] [x²] [–] [1] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [9] $(X=9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
(X+1)P4-63(X²-1▸
                0
```

Câu 32: Đáp án C.

Nhập $(2X+4)C(3X-1)-(2X+4)C(X^2-2X+3)$, ấn [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [4] [)] [SHIFT] [÷] [(] [3] [ALPHA] [)] [–] [1] [)] [–] [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [4] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [x²] [–] [2] [ALPHA] [)] [+] [3] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-165\neq 0$. Loại A, B.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

```
(2X+4)C(3X-1)-(▶
                0
```

Câu 33: Đáp án A.

Điều kiện $x \le 5, x \in \mathbb{N}$ nên loại D.

Nhập vào máy $\frac{5}{5CX}-\frac{2}{6CX}-\frac{14}{7CX}$, ấn [▭/▭] [5] [▽] [5] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▷] [−] [▭/▭] [2] [▽] [6] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▷] [−] [▭/▭] [1] [4] [▽] [7] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
 5     2     14
5CX - 6CX - 7CX
                0
```

Câu 34: Đáp án C.

Điều kiện $x \ge 4, x \in \mathbb{N}$ nên loại ngay A.

Nhập vào máy $24((X+1)P3 - XP(X-4)) - 23 \times XP4$, ấn [2] [4] [(] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [×] [3] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [(] [ALPHA] [)] [−] [4] [)] [)] [−] [2] [3] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [×] [4]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
24((X+1)P3-XP(X▶
                0
```

Câu 35: Đáp án D.

Nhập vào máy $XC1+6\times XC2+6\times XC3-9X^2+14X$, ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [1] [+] [6] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [+] [6] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [3] [−] [9] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [4] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [7] $(X=7)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
XC1+6×XC2+6×XC3▶
                0
```

Câu 36: Đáp án B.

Nhập vào máy $XC2\times XC(X-2)+2\times XC2\times XC3+XC3\times XC(X-3)-100$, ấn [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [+] [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [3] [+] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [3] [×] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [3] [)] [−] [1] [0] [0]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
XC2×XC(X-2)+2×X▶
                0
```

Câu 37: Đáp án A.

Nhập vào máy $XC2+2\times(X+1)C2+3\times(X+2)C2+4(X+3)C2-365$:

[ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [+] [2] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [2] [+] [3] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [SHIFT] [÷] [2] [+] [4] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [SHIFT] [÷] [2] [−] [3] [6] [5]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [7] $(X=7)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

```
XC2+2×(X+1)C2+3▶
                0
```

Câu 38: Đáp án B.

– *Phương án A:* Với $n=4$ thì vế trái (VT) của phương trình có dạng $2^0C_4^0+2^1C_4^1+2^2C_4^2+2^3C_4^3+2^4C_4^4=\sum_0^4 2^xC_4^x$. Nhập vào máy $\sum_{x=0}^4 2^X\times 4CX$, ấn [SHIFT] [log▫□] [2] [x■] [ALPHA] [)] [▷] [×] [4] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [▽] [0] [△] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả $81 \to VT \ne VP$ (Vế phải). Loại A.

```
 4
 Σ (2^X×4CX)
x=0
               81
```

– *Phương án B:* Với $n=5$, VT phương trình có dạng $2^0C_5^0+2^1C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5=\sum_0^5 2^xC_5^x$.

Nhập vào máy $\sum_{x=0}^5 2^X\times 5CX$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $243 \to VT = VP$. Chọn B.

```
 5
 Σ (2^X×5CX)
x=0
              243
```

> Với các phương trình dạng này, không thể dùng CALC thử nghiệm như các ví dụ trước bởi phương trình có tận n số hạng và ta không thể nào nhập hết được vào máy. Cách tối ưu nhất là từ đáp án, thay trực tiếp nghiệm vào phương trình rồi sau đó có thể phải sử dụng hàm tổng Σ ([SHIFT] [log▫□] (Σ)) để xác định xem đó có phải là nghiệm của phương trình hay không.

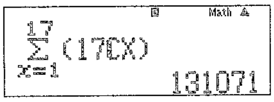
Câu 39: Đáp án A.

– *Phương án A:* Với $n=4$ thì VT của phương trình có dạng $C_4^1.3^3+2.C_4^2.3^2+3.C_4^3.3^1+4.C_4^4.3^0=\sum_{x=1}^4 xC_4^x3^{4-x}$

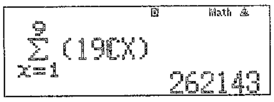
Nhập vào máy $\sum_{x=1}^4 X\times 4CX\times 3^{4-X}$, ấn [SHIFT] [log▫□] [ALPHA] [)] [×] [4] [SHIFT] [÷] [ALPHA] [)] [×] [3] [x■] [4] [−] [ALPHA] [)] [▽] [1] [△] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả $256 \to VT = VP$.

Câu 40: Đáp án C.

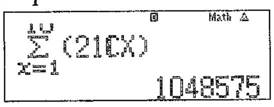
– *Phương án A:* Với $n=8$ thì $VT=C_{17}^1+C_{17}^2+...+C_{17}^8$ $=\sum_{x=1}^{8}C_{17}^x$. Nhập vào máy $\sum_{x=1}^{8}(17CX)$, ấn SHIFT log□□ 1 7 SHIFT ÷ ALPHA) ▼ 1 ▲ 8. Ấn =, máy hiện kết quả $65535\neq 2^{20}-1\rightarrow VT\neq VP$. Loại A.

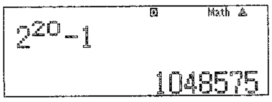


– *Phương án B:* Với $n=9$ thì $VT=C_{19}^1+C_{19}^2+...+C_{19}^9$ $=\sum_{x=1}^{9}C_{19}^x$. Nhập vào máy $\sum_{x=1}^{9}(19CX)$. Ấn =, máy hiện kết quả $262143\neq 2^{20}-1\rightarrow VT\neq VP$. Loại B.



– *Phương án C:* Với $n=10$ thì $VT=C_{21}^1+C_{21}^2+...+C_{21}^{10}$ $=\sum_{x=1}^{10}C_{21}^x$. Nhập vào máy $\sum_{x=1}^{10}(21CX)$. Ấn =, máy hiện kết quả $1048575=2^{20}-1\rightarrow VT=VP$. Chọn C.



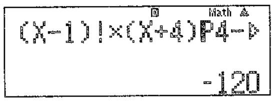


Câu 41: Đáp án A.

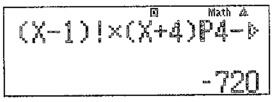
Cách 1: Ta có $P_{n-1}.A_{n+4}^4<15P_{n+2}\Leftrightarrow P_{n-1}.A_{n+4}^4-15P_{n+2}<0$

Nhập vào máy $(X-1)!\times(X+4)P4-15\times(n+2)!$, ấn (ALPHA) − 1) SHIFT x⁻¹ × (ALPHA) + 4) SHIFT × 4 − 1 5 × (ALPHA) + 2) SHIFT x⁻¹.

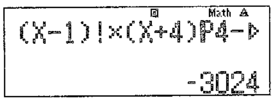
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 3 $(X=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-120<0$.



Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 4 $(X=4)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-720<0$.



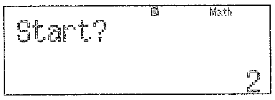
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 5 $(X=5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-3024<0$.

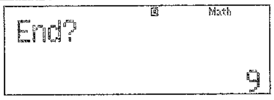


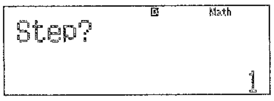
Cách 2: Sử dụng TABLE: MODE 7

Ấn SHIFT MODE ▼ 5 1 và nhập vào hàm số $f(X)=(X-1)!\times(X+4)P4-15\times(X+2)!$.

Nhập Start $=2$, End $=9$, Step $=1$.

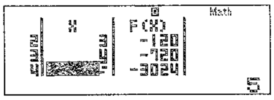






Ấn =, bảng giá trị hiện ra.

Quan sát bảng giá trị, ta thấy với $X\in\{3;4;5\}$ thì $F(X)<0$. Chọn A.



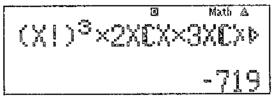
Ta thấy, việc sử dụng bảng giá trị (TABLE) giúp xác định nghiệm (tập nghiệm) của bất phương trình một cách dễ dàng hơn. Các giá trị Start, End tương ứng là các nghiệm (nguyên) nhỏ nhất và lớn nhất từ đáp án, Step $=1$ do nghiệm của bất phương trình phải nguyên.

Câu 42: Đáp án B.

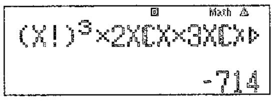
Cách 1: $(x!)^3C_x^xC_{2x}^xC_{3x}^x\leq 720\Leftrightarrow(x!)^3C_{2x}^xC_{3x}^x-720\leq 0$

Nhập vào máy $(X!)^3\times 2XCX\times 3XCX-720$, ấn (ALPHA) SHIFT x⁻¹) SHIFT x² × 2 ALPHA) SHIFT ÷ ALPHA) × 3 ALPHA) SHIFT ÷ ALPHA) − 7 2 0

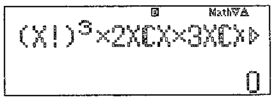
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 0 $(X=0)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-719<0$.



Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 $(X=1)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-714<0$.



Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 $(X=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0.

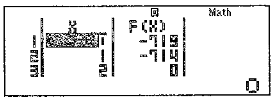


Cách 2: Ấn MODE 7 (TABLE) và SHIFT MODE ▼ 5 1.

Nhập $f(X)=(X!)^3\times 2XCX\times 3XCX-720$.

Cho Start $=0$, End $=4$ và Step $=1$.

Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát, ta thấy với $X\in\{0;1;2\}$ thì $F(X)\leq 0$. Chọn B.

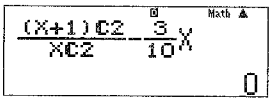


Câu 43: Đáp án D.

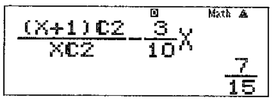
Cách 1: Điều kiện $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$ nên ta loại ngay B và C. Vì B chứa nghiệm $n=0, n=1$ và C chứa nghiệm $n=1$ đều không thỏa điều kiện.

Nhập vào máy $\dfrac{(X+1)C2}{XC2}-\dfrac{3}{10}X$, ấn [▭/▭] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [2] [▽] [ALPHA] [)] [SHIFT] [÷] [2] [▷] [−] [▭/▭] [3] [▽] [1] [0] [▷] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{7}{15}>0$.



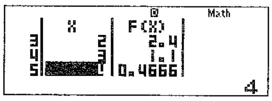
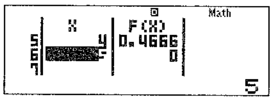
Dễ thấy $[2;4)\subset[2;5]$ nên ta chỉ cần CALC biểu thức $\dfrac{(X+1)C2}{XC2}-\dfrac{3}{10}X$ với $X=4, X=5$ không thuộc $[2;4)$. Nếu hai giá trị này đều thỏa mãn bất phương trình thì tập nghiệm sẽ là $[2;5]$, còn nếu không thỏa mãn thì tập nghiệm là $[2;4)$.

Cách 2: Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1].

Nhập hàm số $f(X)=\dfrac{(X+1)C2}{XC2}-\dfrac{3}{10}X$.

Cho Start $=0$, End $=5$, Step $=1$.

Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát, ta thấy với $X\in[2;5]$ thì $F(X)\ge 0$. Chọn D.

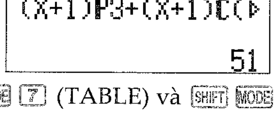



Câu 44: Đáp án A.

Cách 1: Điều kiện $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$ nên ta loại ngay B, C.

Nhập vào máy $(X+1)P3+(X+1)C(X-1)-14(X+1)$, ấn [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [×] [3] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [SHIFT] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [−] [1] [4] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $51>0$. Loại D.

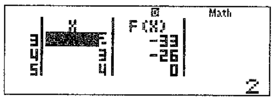


Cách 2: Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1].

Nhập $f(X)=(X+1)P3+(X+1)C(X-1)-14(X+1)$

Cho Start $=0$, End $=5$, Step $=1$.

Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát, ta thấy với $X\in\{2;3\}$ thì $F(X)<0$. Vậy tập nghiệm là $[2;4)$.



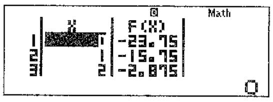
Câu 45: Đáp án B.

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1].

Nhập $f(X)=\dfrac{(X+4)P4}{(X+2)!}-\dfrac{143}{4\times X!}$.

Cho Start $=0$, End $=5$, Step $=1$

Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát, ta thấy với $X\in\{0;1;2\}$ thì $F(X)<0$. Vậy tập nghiệm là $[0;2]$.



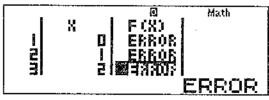
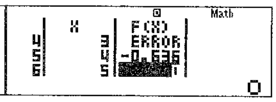
Câu 46: Đáp án C.

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1].

Nhập hàm số $\dfrac{XP4}{(X+1)P3-XC(X-4)}-\dfrac{24}{23}$.

Cho Start $=0$, End $=5$, Step $=1$.

Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát, ta thấy với $X\in\{4;5\}$ thì $F(X)\le 0$. Vậy tập nghiệm là $(3;5]$.

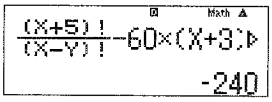



Câu 47: Đáp án D.

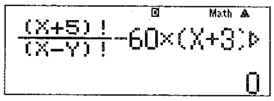
Cho $x=X$ và $k=Y$.

Nhập vào máy $\dfrac{(X+5)!}{(X-Y)!}-60\times(X+3)P(Y+2)$, ấn [▭/▭] [(] [ALPHA] [)] [+] [5] [)] [SHIFT] [x⁻¹] [▽] [(] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [S⇔D] [)] [SHIFT] [x⁻¹] [▷] [−] [6] [0] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [SHIFT] [×] [(] [ALPHA] [S⇔D] [+] [2] [)]

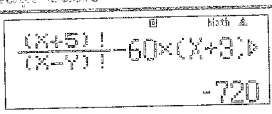
Ấn [CALC], nhập $X=0, Y=0$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-240<0\to(0;0)$ thỏa mãn.



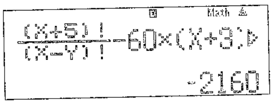
Ấn [CALC], nhập $X=1, Y=0$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0\to(1;0)$ thỏa mãn.



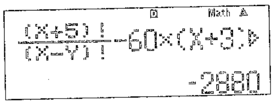
Ấn [CALC], nhập $X=1, Y=1$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-720<0\to(1;1)$ thỏa mãn.



Ấn [CALC], nhập $X=2, Y=2$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2160<0 \rightarrow (2;2)$ thỏa mãn.



Ấn [CALC], nhập $X=3, Y=3$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2880<0 \rightarrow (3;3)$ thỏa mãn.

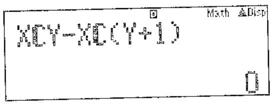


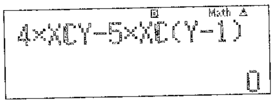
Câu 48: Đáp án A.

Điều kiện $1 \le y \le x$ nên loại ngay hai đáp án B, D.

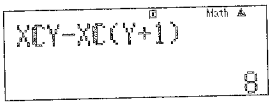
Nhập $XCY-XC(Y+1):4\times XCY-5\times XC(Y-1)$ vào máy, ấn

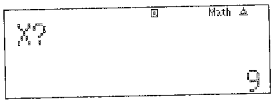
– *Phương án A:* Ấn [CALC], nhập $X=17, Y=8$. Ấn [=], máy hiện $XCY-XC(Y+1)=0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $4\times XCY-5\times XC(Y-1)=0$.





– *Phương án C:* Ấn [CALC], nhập $X=9, Y=8$. Ấn [=], máy hiện $XCY-XC(Y+1)=8$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $4\times XCY-5\times XC(Y-1)=9$.



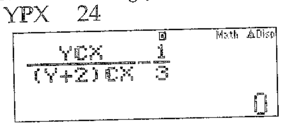


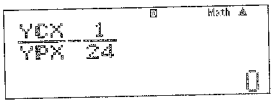
Câu 49: Đáp án B.

Điều kiện $0 \le x \le y; x,y \in \mathbb{N}$ nên loại A, C.

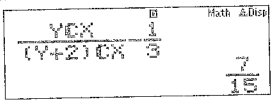
Nhập vào máy $\frac{YCX}{(Y+2)CX}-\frac{1}{3}:\frac{YCX}{YPX}-\frac{1}{24}$, ấn

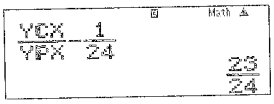
– *Phương án B:* Ấn [CALC], nhập $X=4, Y=8$. Ấn [=], máy hiện $\frac{YCX}{(Y+2)CX}-\frac{1}{3}=0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $\frac{YCX}{YPX}-\frac{1}{24}=0$.





– *Phương án D:* Ấn [CALC], nhập $X=1, Y=8$. Ấn [=], máy hiện $\frac{YCX}{(Y+2)CX}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $\frac{YCX}{YPX}-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$.



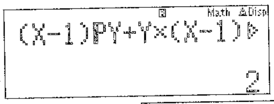


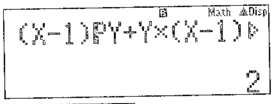
Câu 50: Đáp án D.

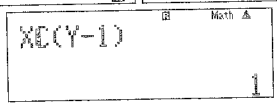
Nhập vào màn hình:

$(X-1)PY+Y\times(X-1)P(Y-1):XP(Y-1):XC(Y-1)$

– *Phương án A:* Ấn [CALC], nhập $X=2, Y=1$. Ấn [=] máy hiện $(X-1)PY+Y\times(X-1)P(Y-1)=2$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XP(Y-1)=1$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y-1)=1$

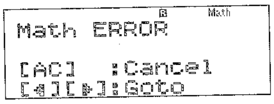




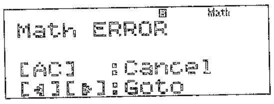


Suy ra $\left(A_{x-1}^{y}+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_{x}^{y-1}:C_{x}^{y-1}=2:2:1$. Loại A.

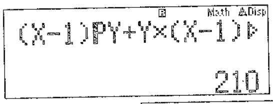
– *Phương án B:* Ấn [CALC], nhập $X=2, Y=2$. Ấn [=] máy hiện Math ERROR. Loại B.

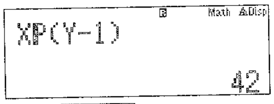


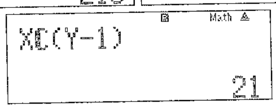
– *Phương án C:* Ấn [CALC], nhập $X=3, Y=7$. Ấn [=] máy hiện Math ERROR. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], nhập $X=7, Y=3$. Ấn [=] máy hiện $(X-1)PY+Y\times(X-1)P(Y-1)=210$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XP(Y-1)=42$. Ấn [=] tiếp máy hiện $XC(Y-1)=21$.







Suy ra $\left(A_{x-1}^{y}+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_{x}^{y-1}:C_{x}^{y-1}=10:2:1$. Chọn D.

Dạng 4: Giải các bài toán đếm và tính xác suất

Câu 51: Đáp án C.

Một tam giác gồm có 3 đỉnh (không sắp thứ tự) chọn trong 7 điểm. Như vậy số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử, tức số tam giác là C_7^3 hay 7C3 tam giác.

Ấn [7] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 35.

```
7C3
                35
```

Câu 52: Đáp án C.

Nếu tổ trưởng là nam thì tổ phó phải là nữ, còn nếu tổ trưởng là nữ thì tổ phó phải là nam.

– Số cách chọn tổ trưởng trong 5 người là C_5^1 (cách).

– Số cách chọn tổ phó trong 5 người là C_5^1 (cách).

– Số cách chọn thư ký trong 8 người còn lại là C_8^1 (cách).

Như vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2\left(C_5^1\right)^2.C_8^1$ (cách),

Nhập vào máy $2\times(5C1)^2\times 8C1$, ấn [2] [×] [(] [5] [SHIFT] [÷] [1] [)] [x²] [×] [8] [SHIFT] [÷] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 400.

```
2×(5C1)²×8C1
                400
```

Câu 53: Đáp án B.

Xếp theo thứ tự màu (3 màu) có 3! cách.

Số cách sắp xếp các tập theo màu đỏ có 3! cách.

Số cách sắp xếp các tập theo màu xanh có 4! cách.

Số cách sắp xếp các tập theo màu vàng có 6! cách.

Vậy số cách xếp tập lên kệ là $3!.3!.4!.6!=(3!)^2.4!.6!$ (cách).

Nhập vào máy $(3!)^2\times 4!\times 6!$, ấn [(] [3] [SHIFT] [x⁻¹] [)] [x²] [×] [4] [SHIFT] [x⁻¹] [×] [6] [SHIFT] [x⁻¹]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 622080.

```
(3!)²×4!×6!
                622080
```

Câu 54: Đáp án D.

Trong hai anh em ruột, nếu người anh được chọn thì người em không được chọn, như vậy có nghĩa là: hoặc không người nào được chọn, hoặc chỉ một người (người anh) được chọn.

– Nếu chỉ một người được chọn thì ta có 2 cách chọn một trong hai anh em và C_8^3 cách chọn 3 trong 8 người còn lại. Vậy có $2.C_8^3$ (cách).

– Nếu cả hai người không được chọn thì có C_8^4 cách chọn 4 người trong ban đại diện.

Vậy, theo quy tắc cộng ta có $2C_8^3+C_8^4$ cách chọn 4 người trong ban đại diện thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhập vào máy $2\times 8C3+8C4$, ấn [2] [×] [8] [SHIFT] [÷] [3] [+] [8] [SHIFT] [÷] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả 182.

```
2×8C3+8C4
                182
```

Câu 55: Đáp án A.

Số cách chọn 11 cầu thủ để thi đấu là C_{18}^{11} (cách).

Trong số 11 cầu thủ đã chọn, ta lại chọn ra một thủ môn và một đội trưởng (chỉnh hợp tập 2 của 11 phần tử), số cách chọn là A_{11}^2 (cách).

Theo quy tắc nhân, ta có số cách chọn ra 11 cầu thủ để thi đấu là $C_{18}^{11}.A_{11}^2$ (cách).

Nhập vào máy $18C11\times 11P2$, ấn [1] [8] [SHIFT] [÷] [1] [1] [×] [1] [1] [SHIFT] [×] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 3500640.

```
18C11×11P2
                3500640
```

Câu 56: Đáp án C.

Trường hợp 1: Bầu 4 người tùy ý, không phân biệt nam nữ

– Bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 (cách).

– Bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 (cách). Trường hợp 1 có $A_{12}^2.C_{10}^2$ (cách bầu).

Trường hợp 2: Bầu 4 người toàn nam

– Bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 (cách).

– Bầu 2 ủy viên có C_5^2 (cách). Trường hợp 2 có $A_7^2.C_5^2$ (cách).

Vậy số cách bầu thỏa mãn bài toán là $A_{12}^2.C_{10}^2-A_7^2.C_5^2$ (cách).

Nhập vào máy $12P2\times 10C2-7P2\times 5C2$, ấn [1] [2] [SHIFT] [×] [2] [×] [1] [0] [SHIFT] [÷] [2] [−] [7] [SHIFT] [×] [2] [×] [5] [SHIFT] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 5520.

```
12P2×10C2-7P2×5▸
                5520
```

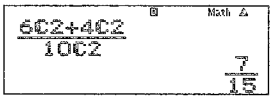
Câu 57: Đáp án A.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{10}^2$.

Gọi A là biến cố "lấy được hai viên bi cùng màu". Nếu hai viên bi lấy được màu trắng thì có C_6^2 cách; nếu hai biên bi lấy được màu đỏ thì có C_4^2 cách.

Suy ra $|\Omega_A| = C_6^2 + C_4^2$. Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2}$.

Nhập vào máy $\dfrac{6C2+4C2}{10C2}$, ấn [▭/▭] [6] [SHIFT] [÷] [2] [+] [4] [SHIFT] [÷] [2] [▼] [1] [0] [SHIFT] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{7}{15}$.



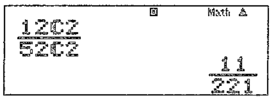
Câu 58: Đáp án B.

Rút 2 lá từ bộ bài 52 lá, số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{52}^2$.

Gọi A là biến cố "2 lá rút được là 2 lá hình". Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{12}^2$.

Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{12}^2}{C_{52}^2}$.

Nhập vào máy $\dfrac{12C2}{52C2}$, ấn [▭/▭] [1] [2] [SHIFT] [÷] [2] [▼] [5] [2] [SHIFT] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{11}{221}$.



Câu 59: Đáp án C.

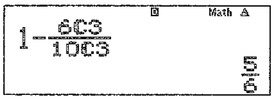
Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{10}^3$.

Gọi A là biến cố "có ít nhất một bóng đèn hỏng" thì $\overline{A}$ là biến cố "không có bóng đèn nào hỏng".

Ta có $|\Omega_{\overline{A}}| = C_6^3$. Suy ra $P(\overline{A}) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$.

Nhập vào máy $1 - \dfrac{6C3}{10C3}$, ấn [1] [−] [▭/▭] [6] [SHIFT] [÷] [3] [▼] [1] [0] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả $\dfrac{5}{6}$.



Câu 60: Đáp án C.

Số cách chọn 3 số từ 80 số là C_{80}^3 (cách). Suy ra $|\Omega| = C_{80}^3$.

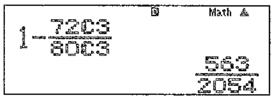
Gọi A là biến cố "trong 3 số được chọn có ít nhất 1 số chính phương" thì $\overline{A}$ là biến cố "trong 3 số đó không có số chính phương nào".

Từ 1 đến 80 có 8 số chính phương là $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$ và có $80 - 8 = 72$ số không phải số chính phương.

Suy ra $|\Omega_{\overline{A}}| = C_{72}^3 \Rightarrow P(\overline{A}) = \dfrac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{72}^3}{C_{80}^3}$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_{72}^3}{C_{80}^3}$.

Nhập vào máy $1 - \dfrac{72C3}{80C3}$, ấn [1] [−] [▭/▭] [7] [2] [SHIFT] [÷] [3] [▼] [8] [0] [SHIFT] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{563}{2054}$.



Dạng 5: Tìm số hạng chứa x^α trong khai triển Nhị thức Newton

Câu 61: Đáp án A.

Cách 1: $\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum\limits_{k=0}^{6} C_6^k 2^k x^{6-\frac{3}{2}k}$ với $0 \le k \le 6, k \in \mathbb{N}$.

$$\to \begin{cases} f(x;k) = x^{6-\frac{3}{2}k} \\ g(k) = 2^k C_6^k \end{cases} \xrightarrow[k=X]{x=2} \begin{cases} f(X) = 2^{6-\frac{3}{2}X} \\ g(X) = 2^X \times 6CX \end{cases}$$

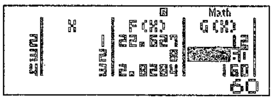
$(0 \le X \le 6, X \in \mathbb{N})$.

Ấn [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [2]. Sau đó ấn [MODE] [7](TABLE).

Nhập vào máy $f(X) = 2^{6-\frac{3}{2}X}$ và $g(X) = 6CX \times 2^X$, với $0 \le X \le 6$ và $X \in \mathbb{N}$.

Cho Start $= 0$, End $= 6$, Step $= 1$.

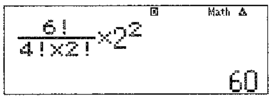
Ấn [=], bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị ta thấy tại $F(X) = 8 = 2^3 = x^3$ (do $x = 2$) thì $X = 2 \to k = 2$ và $G(X) = 60$ là hệ số của x^3 trong khai triển đã cho.



Cách 2: $\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x + 2x^{-1/2}\right)^6$

Có hệ $\begin{cases} k_1 + k_{-1/2} = 6 \\ k_1 - \dfrac{1}{2}k_{-1/2} = 3 \end{cases} \to \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_{-1/2} = 2 \end{cases}$

$\to \left[x^3\right] = \dfrac{6!}{4!.2!}.2^2 = 60$.



Câu 62: Đáp án B.

Cách 1: $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^k x^{40-3k}$ với $0\le k\le 40, k\in\mathbb{N}$.

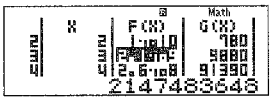
$\rightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{40-3k}\\ g(k)=C_{40}^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{40-3X}\\ g(X)=C_{40}^X=40CX\end{cases}$

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 và MODE 7 (TABLE).

Nhập vào máy $f(X)=2^{40-3X}$ và $g(X)=40CX$, với $0\le X\le 40$ và $X\in\mathbb{N}$.

Lần 1: Cho Start = 0, End = 15 và Step = 1.

Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị ta thấy khi $F(X)=2147483648=2^{31}=x^{31}$ (do $x=2$) thì $X=3\rightarrow k=3$ và $G(X)=9880$ là hệ số của x^{31}.



Lần 2: Nhập Start = 16, End = 30, Step = 1 nhưng không tìm được giá trị nào khác.

Lần 3: Nhập Start = 31, End = 40, Step = 1 và cũng không tìm được giá trị nào.

Do ở chế độ SHIFT MODE ▽ 5 2 máy chỉ hiển thị được tối đa 20 giá trị nên:

+ Nếu Start = 0, End = 20 và Start = 21, End = 40 thì vượt quá 20 giá trị và bảng không được hiển thị.

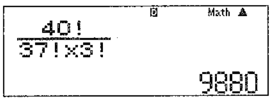
+ Nếu Start = 0, End = 19 (đủ 19 giá trị) và Start = 20, End = 40 (21 giá trị) thì bảng giá trị cũng không thể hiển thị được.

+ Vậy nên ta phải chia ra xét trên 3 khoảng $[0;15]$, $[16;30]$ và $[31;40]$ là hợp lý (cũng có thể chia thành 3 khoảng khác sao cho số giá trị trong bảng không vượt quá 20).

Cách 2: Ta có $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\left(x+x^{-2}\right)^{40}$

Ta có hệ $\begin{cases}k_1+k_{-2}=40\\ k_1-2k_{-2}=31\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k_1=37\\ k_{-2}=3\end{cases}$

Vậy $\left[x^{31}\right]=\frac{40!}{37!.3!}.1^{37}.1^3=9880$.



Câu 63: Đáp án B.

Cách 1: $\left(x+\frac{8}{x^2}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k 8^k x^{6-3k}$ với $0\le k\le 6$ và $k\in\mathbb{N}$

$\rightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{6-3k}\\ g(x)=8^kC_6^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{6-3X}\\ g(X)=8^XC_6^X=8^X\times 6CX\end{cases}$

với $0\le X\le 6, X\in\mathbb{N}$

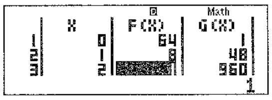
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 và MODE 7 (TABLE).

Nhập vào máy $f(X)=2^{6-3X}$ và $g(X)=6CX\times 8^X$, với $0\le X\le 6$ và $X\in\mathbb{N}$.

Cho Start = 0, End = 6, Step = 1

Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Ấn ▽ để kéo xuống xem toàn bộ bảng giá trị.

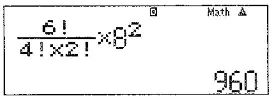
Quan sát bảng giá trị ta thấy khi $F(X)=1=2^0=x^0$ (do $x=2$) thì $x=2\rightarrow k=2$ và $G(X)=960$ là hệ số không chứa x trong khai triển.



Cách 2: Ta có $\left(x+\frac{8}{x^2}\right)^6=\left(x+8x^{-2}\right)^6$

Có hệ phương trình $\begin{cases}k_1+k_{-2}=6\\ k_1-2k_{-2}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k_1=4\\ k_{-2}=2\end{cases}$

$\rightarrow\left[x^0\right]=\frac{6!}{4!.2!}.1^4.8^2=960$.



Câu 64: Đáp án B.

Cách 1: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$ với $0\le k\le 7, k\in\mathbb{N}$

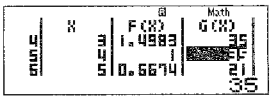
$\rightarrow\begin{cases}f(x;k)=x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}\\ g(x)=C_7^k\end{cases}\xrightarrow[k=X]{x=2}\begin{cases}f(X)=2^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}X}\\ g(X)=C_7^X=7CX\end{cases}$

với $0\le X\le 7, X\in\mathbb{N}$

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 và MODE 7 (TABLE).

Nhập vào máy $f(X)=2^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}X}$ và $g(X)=7CX$, với $0\le X\le 7$ và $X\in\mathbb{N}$.

Cho Start = 0, End = 7, Step = 1. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị ta thấy tại $F(X)=1=2^0=x^0$ (do gán $x=2$) thì $X=4\rightarrow k=4$ và $G(X)=35$ là số hạng không chứa x trong khai triển.



Cách 2: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\left(x^{1/3}+x^{-1/4}\right)^7$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} k_{1/3}+k_{-1/4}=7 \\ \frac{1}{3}k_{1/3}-\frac{1}{4}k_{-1/4}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_{1/3}=3 \\ k_{-1/4}=4 \end{cases}$

$\rightarrow [x_0]=\frac{7!}{3!.4!}.1^3.1^4=35$.

Câu 65: Đáp án C.

$C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79 \Leftrightarrow 1+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}=79$

$\Leftrightarrow 1+n+\frac{1}{2}n(n-1)=79 \Leftrightarrow n=12$

Cách 1: Ta có $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{16-\frac{16}{5}k}$

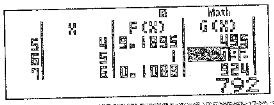
$(0\le k\le 12, k\in\mathbb{N})$.

$\rightarrow \begin{cases} f(x;k)=x^{16-\frac{16}{5}k} \\ g(k)=C_{12}^k \end{cases} \xrightarrow[k=X]{x=2} \begin{cases} f(X)=2^{16-\frac{16}{5}X} \\ g(X)=12CX \end{cases}$

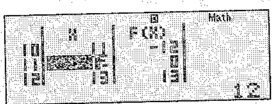
Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 và MODE 7 (TABLE).

Nhập vào máy $f(X)=2^{16-\frac{16}{5}X}$ và $g(X)=12CX$, với $0\le X\le 12$ và $X\in\mathbb{N}$.

Cho Start = 0, End = 12, Step = 1. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị ta thấy tại $F(X)=1=2^0=x^0$ (do gán $x=2$) thì $X=5\rightarrow k=2$ và $G(X)=792$ là số hạng không chứa x trong khai triển.



Ta cũng có thể sử dụng bảng giá trị (TABLE) để tìm n của $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$ $(n\ge 2, n\in\mathbb{N})$. Ấn MODE 7 (TABLE) và SHIFT MODE ▽ 5 1 để nhập vào hàm $f(X)=XC(X-1)+XC(X-2)-78$ với $X\ge 2, X\in\mathbb{N}$. Cho Start = 2, End = 31, Step = 1. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát ta thấy tại $X=12$ thì $F(X)=0$. Vậy $n=2$.



Tổng quát, để tìm nghiệm của một phương trình tổ hợp ta đưa về dạng $f(x)=0$. Sau đó ấn MODE 7 (TABLE) và SHIFT MODE ▽ 5 1 và nhập hàm $f(X)$.

+ Nếu điều kiện phương trình là $a\le x\le b, x\in\mathbb{N}$ thì chọn Start = a, End = b, Step = 1.

+ Nếu điều kiện phương trình là $x\ge a, x\in\mathbb{N}$ thì chọn Start = a, End = $a+29$, Step = 1 (do tại chế độ này, bảng hiện thị được tối đa 30 giá trị). Nếu trên khoảng $[a;a+29]$ mà ta vẫn chưa tìm được nghiệm thì tiếp tục chọn Start = a, End = $a+29$, Step = 1 ... Quy trình chọn Start, End, Step vẫn tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được nghiệm.

Cách 2: $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}=\left(x^{4/3}+x^{-28/15}\right)^{12}$

Ta có hệ $\begin{cases} k_{4/3}+k_{-28/15}=12 \\ \frac{4}{3}k_{4/3}-\frac{28}{15}k_{-28/15}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_{4/3}=7 \\ k_{-28/15}=5 \end{cases}$

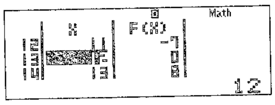
Vậy $[x^0]=\frac{12!}{7!.5!}.1^7.1^5=792$.

Câu 66: Đáp án C.

Cách 1: Ấn MODE 7 (TABLE) và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập $f(X)=(X+4)C(X+1)-(X+3)CX-7(X+3)$, với $X\ge 0, X\in\mathbb{N}$.

Cho Start = 0, End = 29, Step = 1. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát ta thấy tại $X=12$ thì $F(X)=0$. Vậy $n=12$.



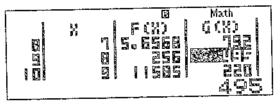
Ta có $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\frac{11}{2}k-36}$ với $0\le k\le 12, k\in\mathbb{N}$

$\rightarrow \begin{cases} f(x;k)=x^{\frac{11}{2}k-36} \\ g(k)=C_{12}^k \end{cases} \xrightarrow[k=X]{x=2} \begin{cases} f(X)=2^{\frac{11}{2}X-36} \\ g(X)=12CX \end{cases}$

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2 và MODE 7 (TABLE).

Nhập vào máy $f(X)=2^{\frac{11}{2}X-36}$ và $g(X)=C_{12}^X=12CX$, với $0\le X\le 12$ và $X\in\mathbb{N}$.

Cho Start = 0, End = 12, Step = 1. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị ta thấy tại $F(X)=256=2^8=x^8$ (do $x=2$) thì $X=8\rightarrow k=8$ và $G(X)=495$ là hệ số của x^8 trong khai triển.



Cách 2: Ta có $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x^{-3}+x^{5/2}\right)^{12}$.

Ta có hệ $\begin{cases} k_{-3}+k_{5/2}=12 \\ -3k_{-3}+\frac{5}{2}k_{5/2}=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_{-3}=4 \\ k_{5/2}=8 \end{cases}$

Vậy $[x^8]=\frac{12!}{4!.8!}.1^4.1^8=495$.

Câu 67: Đáp án A.

$x^2+x+1=\dfrac{(1+2x)^2+3}{4}\to f(x)=(1+2x)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2$

$=\dfrac{1}{16}(1+2x)^{14}+\dfrac{3}{8}(1+2x)^{12}+\dfrac{9}{16}(1+2x)^{10}$

Xét $(1+2x)^{14}\to\begin{cases}k_0+k_1=14\\k_1=6\end{cases}\to\begin{cases}k_0=8\\k_1=6\end{cases}$

$\to\left[x^6\right]=\dfrac{14!}{6!8!}.2^6$

Xét $(1+2x)^{12}\to\begin{cases}k_0+k_1=12\\k_1=6\end{cases}\to\begin{cases}k_0=6\\k_1=6\end{cases}$

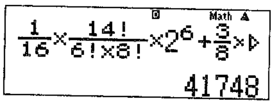
$\to\left[x^6\right]=\dfrac{12!}{6!6!}.2^6$

Xét $(1+2x)^{10}\to\begin{cases}k_0+k_1=10\\k_1=6\end{cases}\to\begin{cases}k_0=4\\k_1=6\end{cases}$

$\to\left[x^6\right]=\dfrac{10!}{6!4!}.2^6$

Vậy $\left[x^3\right]=\dfrac{1}{16}.\dfrac{14!}{6!8!}.2^6+\dfrac{3}{8}.\dfrac{12!}{6!6!}.2^6+\dfrac{9}{16}.\dfrac{10!}{6!4!}.2^6$

$=41748$



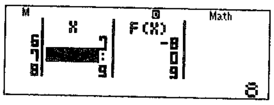
Câu 68: Đáp án C.

Điều kiện: $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$.

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 1, rồi ấn MODE 7 (TABLE). Nhập hàm $f(X)=C_X^{X-1}+C_X^{X-2}-36$.

Ấn =, nhập Start = 2, End = 31, Step = 1.

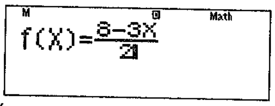
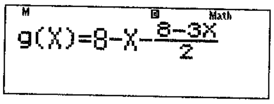
Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị, ta thấy khi X = 8 thì F(X) = 0. Vậy $n=8$.



Khi đó $f(x)=\left(1+2x^2-x^3\right)^8$. Với $k_3,k_2,k_0\in\mathbb{N}$, ta có

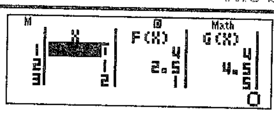
hệ $\begin{cases}k_0+k_2+k_3=8\\2k_2+3k_3=8\end{cases}\to\begin{cases}k_3=X\\k_2=\dfrac{8-3X}{2}\\k_0=8-X-\dfrac{8-3X}{2}\end{cases}\quad(0\le X<8)$

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2, rồi ấn MODE 7 (TABLE). Nhập $f(X)=\dfrac{8-3X}{2}$ và $g(X)=8-X-\dfrac{8-3X}{2}$.

Ấn =, nhập Start = 0, End = 7, Step = 1.

Ấn =, bảng giá trị hiện ra.



Ta tìm được $(k_3,k_2,k_0)=(0;4;4),(2;1;5)$.

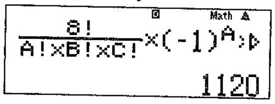
Ta có $\left[x^8\right]=\sum\dfrac{8!}{k_3!k_2!k_0!}(-1)^{k_3}2^{k_2}$

$=\sum\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^A\times 2^B$.

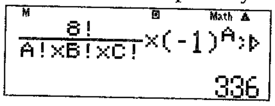
Nhập vào màn hình $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^A\times 2^B$.

Ấn CALC với A = 0, B = 4, C = 4 ta được kết quả 1120.

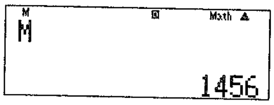
Ấn M+ để thêm kết quả này vào M.



Ấn ▲ để quay lại biểu thức $\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^A\times 2^B$ vừa nhập. Ấn CALC với A = 2, B = 1, C = 5 ta được kết quả 336. Ấn M+ để thêm kết quả này vào M.



Vậy $\left[x^8\right]=\sum\dfrac{8!}{A!\times B!\times C!}\times(-1)^A\times 2^B=M=1456$.

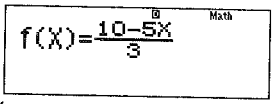
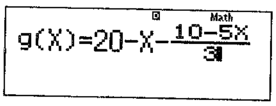


Câu 69: Đáp án A.

Với $k_5,k_3,k_0\in\mathbb{N}$ ta có:

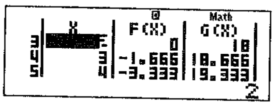
$\begin{cases}k_5+k_3+k_0=20\\5k_5+3k_3=10\end{cases}\to\begin{cases}k_5=X\\k_3=\dfrac{10-5X}{3}\\k_0=20-X-\dfrac{10-5X}{3}\end{cases}\quad(0\le X<20)$.

Ấn SHIFT MODE ▽ 5 2, rồi ấn MODE 7 (TABLE). Nhập $f(X)=\dfrac{10-5X}{3}$ và $g(X)=20-X-\dfrac{10-5X}{3}$.

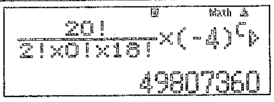
Ấn =, nhập Start = 0, End = 19, Step = 1.

Ấn =, bảng giá trị hiện ra.



Ta tìm được $(k_5,k_3,k_0)=(2;0;18)$.

Vậy $\left[x^{10}\right]=\dfrac{20!}{2!.0!.18!}.1^2.(-4)^0.(-2)^{18}=49807360$.



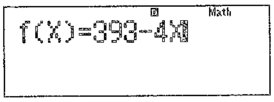
Câu 70: Đáp án D.

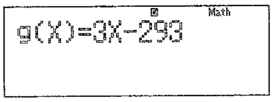
Ta có $\left(x^2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{100}=\left(x^2-x^{-1}-2x^{-2}\right)^{100}$

Với $k_2,k_{-1},k_{-2}\in\mathbb{N}$ ta có: $\begin{cases}k_2+k_{-1}+k_{-2}=100\\2k_2-k_{-1}-2k_{-2}=193\end{cases}$

$\rightarrow\begin{cases}k_2=X\\k_{-1}=393-4X\quad(0\le X<100)\\k_{-2}=3X-293\end{cases}$

Ấn SHIFT MODE ⊽ 5 2, rồi ấn MODE 7 (TABLE). Nhập $f(X)=393-4X$ và $g(X)=3X-293$.





Do $0\le X<100$, mà khi nhập hai hàm $f(X),g(X)$ máy hiển thị được tối đa 20 giá trị trong bảng. Nên ta xét trên từng đoạn $[0;19]$, $[20;39]$, $[40;59]$, $[60;79]$, $[80;99]$.

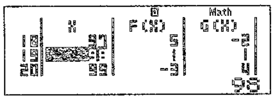
Cho Start = 0, End = 19, Step = 1 ta không tìm được giá trị nào thỏa mãn hệ.

Cho Start = 20, End = 39, Step = 1 không tìm được giá trị nào thỏa mãn hệ.

Cho Start = 40, End = 59, Step = 1 không tìm được giá trị nào thỏa mãn hệ.

Cho Start = 60, End = 79, Step = 1 không tìm được giá trị nào thỏa mãn hệ.

Cho Start = 80, End = 99, Step = 1 ta xác định được $X=98, F(X)=1, G(X)=1$.



Như vậy $k_2=98, k_{-1}=1$ và $k_{-2}=1$.

Vậy

$$\left[x^{193}\right]=\frac{100!}{98!.1!.1!}.1^{98}(-1)^1(-2)^1=100.99.2=19800$$

CHỦ ĐỀ 4: GIỚI HẠN

Các dạng toán liên quan:

> **CHÚ Ý**
> Khi đề yêu cầu tính giới hạn mà không chỉ rõ n tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số khi $n \to +\infty$. Vậy nên, sử dụng CALC, ta thường chọn nhập giá trị tương đối lớn (ở đây tác giả chọn CALC với 10^9).
> Trong trường hợp CALC với 10^9 mà máy báo lỗi (vì số quá lớn), thay vào đó ta có thể CALC các giá trị $10^6, 10^5, ..., 10^2, 10, ...$

Dạng 1: Tính giới hạn dãy số $\lim u_n$

– **Bước 1:** Nhập dãy số u_n vào máy tính (nhập theo biến X).

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [$x^■$] [9] $\left(X = 10^9\right)$.

– **Bước 3:** Ấn [=], quan sát kết quả và đối chiếu với 4 phương án A, B, C, D đã cho để tìm đáp án đúng.

⚠ **Lưu ý:** Tính giới hạn bằng máy tính thường chỉ cho kết quả gần đúng, và kết quả này sẽ gần bằng với 1 trong 4 kết quả đúng ở các đáp án A, B, C, D.

Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{3\sqrt{n} + 2n - 1}$. Chọn kết quả **đúng:**

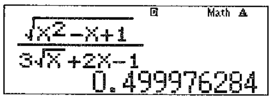
A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. 0 D. $+\infty$

Lời giải

Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{X^2 - X + 1}}{3\sqrt{X} + 2X - 1}$, ấn [▭/▭] [√■] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [ALPHA] [)] [+] [1] [▽] [3] [√■] [ALPHA] [)] [▷] [+] [2] [ALPHA] [)] [−] [1].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [$x^■$] [9] $\left(X = 10^9\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,499976284 \approx \dfrac{1}{2}$.



Đáp án B.

> **STUDY TIPS**
> Do bài này liên quan đến lũy thừa (số mũ) nên nếu chọn CALC giá trị $X = 10^9$ thì máy sẽ báo lỗi (kết quả quá lớn). Như vậy ta phải chọn một giá trị khác thấp hơn như $X = 100, X = 10, ...$

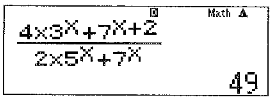
Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim \dfrac{4.3^n + 7^{n+2}}{2.5^n + 7^n}$. Chọn kết quả **đúng:**

A. 49 B. 7 C. 2 D. 1

Lời giải

Nhập vào máy $\dfrac{4 \times 3^X + 7^{X+2}}{2 \times 5^X + 7^X}$, ấn [▭/▭] [4] [×] [3] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▷] [+] [7] [$x^■$] [ALPHA] [)] [+] [2] [▽] [2] [×] [5] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▷] [+] [7] [$x^■$] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [0] $(X = 100)$. Ấn [=], máy hiện 49.



Đáp án A.

Ví dụ 3: Tính giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$. Chọn đáp án **đúng**:

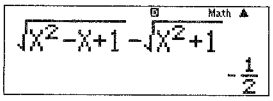
A. $+\infty$ B. 0 C. $\dfrac{1}{2}$ D. $-\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Nhập vào máy $\sqrt{X^2 - X + 1} - \sqrt{X^2 + 1}$, ấn [√■] [ALPHA] [)] [$x^2$] [−] [ALPHA] [)] [+] [1] [▷] [−] [√■] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [$x^■$] [9] $\left(X = 10^9\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{1}{2}$.



Đáp án D.

Ví dụ 4: Tính giới hạn $\lim\left(\sqrt{4n^2+n-2}-3n\right)$. Chọn kết quả **đúng**:

A. $+\infty$ B. 1 C. $-\infty$ D. -1

Lời giải

Nhập vào máy $\sqrt{4X^2+X-2}-3X$, ấn [√] [4] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [9] $\left(X=10^9\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-999999999{,}8\to-\infty$.

```
√(4X²+X-2)-3X
    -999999999.8
```

Đáp án C.

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim(2n+\cos n)$ bằng

A. $-\infty$ B. 2 C. 3 D. $+\infty$

Lời giải

STUDY TIPS
Với các bài toán chứa hàm lượng giác, trước tiên ta cần đưa về chế độ góc Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Nhập vào máy $2X+\cos(X)$, ấn [2] [ALPHA] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [9] $\left(X=10^9\right)$. Ấn [=], máy hiện Math ERROR.

```
Math ERROR
[AC]  :Cancel
[◀][▶]:Goto
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [5] $\left(X=10^5\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $199999{,}0006\to+\infty$.

```
2X+cos(X)
      199999.0006
```

Đáp án D.

Ví dụ 6: Tính giới hạn $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2}$. Chọn kết quả **đúng**:

A. 0 B. $\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $+\infty$

Lời giải

STUDY TIPS
Ta không thể nhập vào máy tính casio cả biểu thức n số hạng $\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2}$ được.
Vì vậy, ta phải tiến hành rút gọn biểu thức như cách làm bên.
Nhận thấy $1+2+3+...+n$ là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng với công sai $d=1$. Nên ta áp dụng công thức tính tổng của cấp số cộng:
$S_n=u_1+...+u_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$

Cách 1: Ta có $1+2+3+...+n$ là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng với công sai $d=1$. Nên $1+2+3+...+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$.

Như vậy $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2}=\lim\dfrac{n(n+1)}{4n^2}=\lim\dfrac{n+1}{4n}$.

Nhập vào máy $\dfrac{X+1}{4X}$, ấn [■/■] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [4] [ALPHA] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [9] $\left(X=10^9\right)$.

Ấn [=], máy hiện $0{,}2500000003\approx\dfrac{1}{4}$.

```
X+1
4X
      0.2500000003
```

Cách 2: Chọn $n=1000$ thì $1+2+3+...+n=1+2+3+...+1000=\sum_{n=1}^{1000}n$

Nhập vào máy $\dfrac{\sum_{x=1}^{1000}(X)}{2X^2}$: [■/■] [SHIFT] [log■□] [ALPHA] [)] [▼] [1] [▲] [1] [0] [0] [0] [▼] [▼] [2] [ALPHA] [)] [x²]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [0] [0] $(X=1000)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{1001}{4000}=0{,}25025\approx\dfrac{1}{4}$.

```
 1000
  Σ (X)
 X=1
 2X²       0.25025
```

Đáp án B.

Dạng 2: Giới hạn hàm số đến một số x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

– **Bước 1:** Nhập vào máy biểu thức $f(X)$.

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Cho $X = x_0 - 10^{-5}$ hoặc $X = x_0 + 10^{-5}$.

– **Bước 3:** Ấn [=], quan sát kết quả và đối chiếu với 4 phương án A, B, C, D đã cho để tìm đáp án đúng.

CHÚ Ý

* Các giá trị $x_0 \pm 10^{-5}$, hoặc $x_0 \pm 10^{-6}$ sẽ giúp ta xác định được kết quả chính xác nhất khi tính giới hạn. Tuy nhiên, **tuyệt đối không** được sử dụng các giá trị quá nhỏ như $x_0 \pm 10^{-11}$ bởi trong nhiều bài toán sẽ dẫn đến việc xác định kết quả sai.

* Sử dụng CALC để tìm giới hạn $\frac{0}{0}$, kết quả bài toán sẽ ra giá trị gần đúng chứ không phải kết quả chính như khi sử dụng công thức Lopital ở bên.

Đặc biệt: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Trong đó $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (giới hạn $\dfrac{0}{0}$)

Ta có $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(f(X)\right)\Big|_{x=x_0}}{\dfrac{d}{dx}\left(g(X)\right)\Big|_{x=x_0}}}$$ (Đây được gọi là công thức Lopital).

Như vậy, để tính giới hạn $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ của hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $x \to x_0$ ta sẽ đưa về công thức tính đạo hàm tại một điểm. Sử dụng lệnh [SHIFT] [∫] ($\frac{d}{dx}$▪).

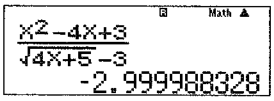
Ví dụ 1: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{4x+5}-3}$ bằng

A. –2 B. –3 C. –4 D. –5

Lời giải

Cách 1: Nhập vào máy $\dfrac{X^2-4X+3}{\sqrt{4X+5}-3}$, ấn [▭/▭] [ALPHA] [)] [x²] [–] [4] [ALPHA] [)] [+] [3] [▼] [√] [4] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [–] [3]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [+] [1] [0] [x■] [(–)] [5] $\left(X = 1 + 10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2,999988328 \approx -3$.



STUDY TIPS

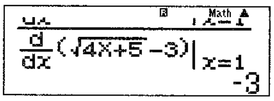
* Do $x \to 1$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X = 1 + 10^{-5}$.

* Chú ý, với mỗi loại máy tính khác nhau, kết quả nhận được không giống nhau. Chẳng hạn, khi dùng máy tính VINACAL 570ES PLUS II để tính giới hạn, ta nhận được kết quả bằng $-2,999988333$. Tuy nhiên, kết quả này vẫn xấp xỉ bằng -3.

Cách 2: Ta có $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{4x+5}-3} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^2-4x+3\right)\Big|_{x=1}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{4x+5}-3\right)\Big|_{x=1}}.$$

Nhập vào máy $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(X^2-4X+3\right)\Big|_{x=1}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{4X+5}-3\right)\Big|_{x=1}}$. Ấn [▭/▭] [SHIFT] [∫] [ALPHA] [)] [x²] [–] [4] [ALPHA] [)] [+] [3] [▶] [1] [▼] [SHIFT] [∫] [√] [4] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [–] [3] [▶] [1]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –3.



Đáp án B.

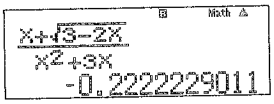
Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$

A. $-\dfrac{5}{9}$ B. $-\dfrac{3}{9}$ C. $-\dfrac{2}{9}$ D. 0

Lời giải

STUDY TIPS

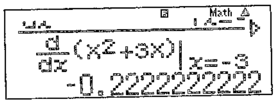
Do $x\to -3$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=-3+10^{-5}$.



Cách 1: Nhập vào máy $\dfrac{X+\sqrt{3-2X}}{X^2+3X}$, ấn [a/b] [ALPHA] [)] [+] [√■] [3] [−] [2] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [3] [+] [1] [0] [x^■] [(−)] [5] $\left(X=-3+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,2222229011\approx -\dfrac{2}{9}$. Chọn C.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}=\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(x+\sqrt{3-2x}\right)\Big|_{x=-3}}{\dfrac{d}{dx}\left(x^2+3x\right)\Big|_{x=-3}}$



Nhập vào máy $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(X+\sqrt{3-2X}\right)\Big|_{x=-3}}{\dfrac{d}{dx}\left(X^2+3X\right)\Big|_{x=-3}}$, ấn [a/b] [SHIFT] [∫] [ALPHA] [)] [+] [√■] [3] [−] [2] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [(−)] [3] [▼] [SHIFT] [∫] [ALPHA] [)] [x²] [+] [3] [ALPHA] [)] [▶] [(−)] [3]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,2222222222=-\dfrac{2}{9}$.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}$. Chọn kết quả **đúng**:

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$ B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=-\dfrac{1}{2\pi}$

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=\dfrac{1}{2\pi}$ D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\pi x}{\pi(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

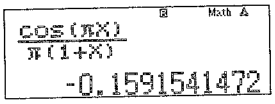
STUDY TIPS

Do $x\to 1$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=1+10^{-5}$.

Mặt khác, khi $x\to 1$ thì $f(x)$ không có dạng $\dfrac{0}{0}$ nên ta công thể sử dụng được công thức Lopital ở ví dụ này.

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Nhập vào máy $\dfrac{\cos(\pi X)}{\pi(1+X)}$, ấn [a/b] [cos] [SHIFT] [×10^x] [ALPHA] [)] [)] [▼] [SHIFT] [×10^x] [(] [1] [+] [ALPHA] [)] [)]



Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [+] [1] [0] [x^■] [(−)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,1591541472=-\dfrac{1}{2\pi}$.

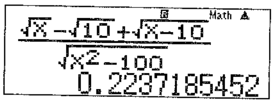
Đáp án B.

Ví dụ 4: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ với $a>0$

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ B. $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ D. $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

STUDY TIPS

Với những bài toán tính giới hạn của một hàm chứa tham số, ta chọn tham số là một số bất kì rồi sử dụng CALC như các ví dụ trên.



Lời giải

Chọn $a=10$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{10}+\sqrt{x-10}}{\sqrt{x^2-100}}$.

Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{X}-\sqrt{10}+\sqrt{X-10}}{\sqrt{X^2-100}}$, ấn [▭/▭] [√▭] [ALPHA] [)] [▶] [−] [√▭] [1] [0] [▶] [+] [√▭] [ALPHA] [)] [−] [1] [0] [▼] [√▭] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [0] [0]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [+] [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,2237185452$.

Với $a=10$ thì ta có $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}=\dfrac{1}{\sqrt{20}}=0,2236067977$.

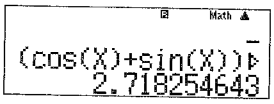
Đáp án A.

Ví dụ 5: Kết quả $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\sin x\right)^{\cot x}$ bằng:

A. $L=+\infty$ B. $L=1$ C. $L=e$ D. $L=e^2$

STUDY TIPS

Do $x\to 0$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=0+10^{-5}=10^{-5}$



Lời giải

Đưa máy về chế độ rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào máy $\left(\cos(X)+\sin(X)\right)^{\frac{1}{\tan(X)}}$, ấn [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x■] [▭/▭] [1] [▼] [tan] [ALPHA] [)] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,718254643=e$.

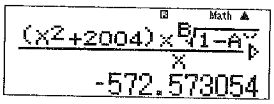
Đáp án C.

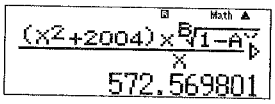
Ví dụ 6: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+2004\right)\sqrt[b]{1-ax}-2004}{x}=-\dfrac{4008}{7}$. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{7}$ B. $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{2}{7}$ C. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{2}$ D. $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{7}{2}$

STUDY TIPS

Do $x\to 0$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=0+10^{-5}=10^{-5}$ và A,B là các giá trị tùy ý thỏa mãn mỗi đáp án.





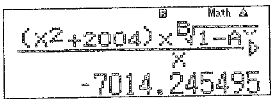
Lời giải

Nhập vào máy $\dfrac{\left(X^2+2004\right)\times\sqrt[B]{1-AX}-2004}{X}$, ấn [▭/▭] [(] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [0] [0] [4] [)] [×] [SHIFT] [x■] [ALPHA] [°'''] [▶] [1] [−] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [)] [▶] [−] [2] [0] [0] [4] [▼] [ALPHA] [)]

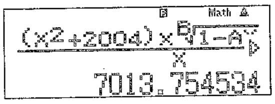
– *Phương án A:* Chọn $b=3\to a=\dfrac{2}{7}.3=\dfrac{6}{7}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hỏi B? Nhập [3] $\left(B=3\right)$. Ấn [=], máy hỏi A? Nhập [6] [▭/▭] [7] $\left(A=\dfrac{6}{7}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-572,573054$.

– *Phương án B:* Chọn $b=3\to a=-\dfrac{2}{7}.3=-\dfrac{6}{7}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hỏi B? Nhập [3] $\left(B=3\right)$. Ấn [=], máy hỏi A? Nhập [(−)] [6] [▭/▭] [7] $\left(A=-\dfrac{6}{7}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $572,569801$.

– *Phương án C:* Chọn $b=3 \to a=\frac{7}{2}.3=\frac{21}{2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hỏi B? Nhập [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hỏi A? Nhập [2] [1] [▭/▭] [2] $\left(A=\frac{21}{2}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –7014,245495.



– *Phương án D:* Chọn $b=3 \to a=-\frac{7}{2}.3=-\frac{21}{2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [0] [x■] [(−)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hỏi B? Nhập [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hỏi A? Nhập [(−)] [2] [1] [▭/▭] [2] $\left(A=-\frac{21}{2}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 7013,754534.



Ta thấy kết quả –572,573054 gần với kết quả của giả thiết đưa ra $\left(=-\frac{4008}{7}\right)$ nhất nên ta chọn đáp án A.

Đáp án A.

CHÚ Ý

* Các giá trị $x_0 \pm 10^{-5}$, hoặc $x_0 \pm 10^{-6}$ sẽ giúp ta xác định được kết quả chính xác nhất khi tính giới hạn. Tuy nhiên, **tuyệt đối không** được sử dụng các giá trị quá nhỏ như $x_0 \pm 10^{-11}$ bởi trong nhiều bài toán sẽ dẫn đến việc xác định kết quả sai.

Dạng 3: Giới hạn một bên $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ hay $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

– **Bước 1:** Nhập vào máy biểu thức $f(X)$.

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Cho $X=x_0-10^{-5}$ (nếu $x\to x_0^-$) hoặc $X=x_0+10^{-5}$ (nếu $x\to x_0^+$).

– **Bước 3:** Ấn [=], quan sát kết quả và đối chiếu với 4 phương án A, B, C, D đã cho để tìm đáp án đúng.

Ví dụ 1: Kết quả $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1-x^8}{3x^2+x}}$ bằng:

A. $+\infty$ B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ C. 0 D. 1

Lời giải

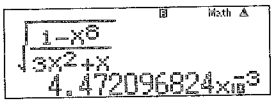
STUDY TIPS

Do $x\to 1^-$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=1-10^{-5}$.

Nhập vào máy $\sqrt{\frac{1-X^8}{3X^2+X}}$, ấn [√■] [▭/▭] [1] [−] [ALPHA] [)] [x■] [8] [▽] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [−] [1] [0] [x■] [(−)] [5] [▷] $\left(X=1-10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,472096824\times10^{-3}\approx 0$.



Đáp án C.

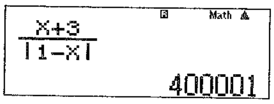
Ví dụ 2: Kết quả $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{|1-x|}$ bằng:

A. $+\infty$ B. 1 C. $-\infty$ D. 3

Lời giải

Do $x\to 1^+$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=1+10^{-5}$.

Nhập vào máy $\frac{X+3}{|1-X|}$, ấn [▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [3] [▽] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [ALPHA] [)].



Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [+] [1] [0] [$x^{■}$] [(−)] [5] [)] $\left(X=1+10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $400001 \to +\infty$.

Đáp án A.

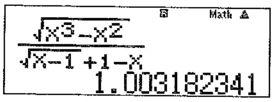
Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng

A. −1   B. 1   C. $\dfrac{1}{2}$ D. 0

STUDY TIPS

Do $x \to 1^+$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=1+10^{-5}$.

Lời giải



Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{X^3-X^2}}{\sqrt{X-1}+1-X}$, ấn [▭/▭] [√▭] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [3] [▶] [−] [ALPHA] [)] [x^2] [▼] [√▭] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [+] [1] [−] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [1] [+] [1] [0] [$x^{■}$] [(−)] [5] [)] $\left(X=1+10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1{,}003182341 \approx 1$.

Đáp án B.

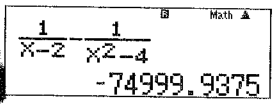
Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ bằng

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 3   D. 5

STUDY TIPS

Do $x \to 2^-$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=2-10^{-5}$.

Lời giải



Nhập vào máy $\dfrac{1}{X-2}-\dfrac{1}{X^2-4}$, ấn [▭/▭] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [−] [▭/▭] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [4]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [2] [−] [1] [0] [$x^{■}$] [(−)] [5] [)] $\left(X=2-10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-74999{,}9375 \to -\infty$.

Đáp án B.

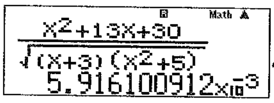
Ví dụ 5: Tình giới hạn $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$

A. $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$ B. −2   C. 0   D. 2

STUDY TIPS

Do $x \to (-3)^+$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=-3+10^{-5}$.

Lời giải



Nhập vào máy $\dfrac{X^2+13X+30}{\sqrt{(X+3)(X^2+5)}}$, ấn [▭/▭] [ALPHA] [)] [$x^2$] [+] [1] [3] [ALPHA] [)] [+] [3] [0] [▼] [√▭] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [(] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [5] [)]

Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [3] [+] [1] [0] [$x^{■}$] [(−)] [5] [)] $\left(X=-3+10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5{,}916100912\times 10^{-3} \to 0$.

Đáp án C.

Dạng 4: Giới hạn đến vô cùng $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ hay $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

CHÚ Ý

* Các giá trị $\pm 10^5$, hoặc $\pm 10^6$ sẽ giúp ta xác định được kết quả chính xác nhất khi tính giới hạn. Tuy nhiên, **tuyệt đối không** được sử dụng các giá trị quá nhỏ như -10^{11}, hay quá lớn như 10^{11} bởi trong nhiều bài toán sẽ dẫn đến việc xác định kết quả sai.

– **Bước 1:** Nhập vào máy biểu thức $f(X)$.

– **Bước 2:** Ấn CALC, máy hỏi X? Cho $X=-10^5$ (nếu $x\to-\infty$) hoặc $X=10^5$ (nếu $x\to+\infty$).

– **Bước 3:** Ấn =, quan sát kết quả và đối chiếu với 4 phương án A, B, C, D đã cho để tìm đáp án đúng.

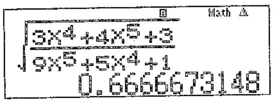
Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+3}{9x^5+5x^4+1}}$. Kết quả **đúng** là:

A. 0 B. $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ C. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ D. $\dfrac{2}{3}$

Lời giải

STUDY TIPS

Do $x\to+\infty$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=10^5$.



Nhập vào máy $\sqrt{\dfrac{3X^4+4X^5+3}{9X^5+5X^4+1}}$, ấn √ ⊟ 3 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 4 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 5 ▶ + 3 ▼ 9 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 5 ▶ + 5 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1

Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 1 0 $x^{\blacksquare}$ 5 $(X=10^5)$.

Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,6666673148\approx\dfrac{2}{3}$.

Đáp án D.

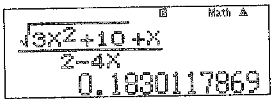
Ví dụ 2: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+10}+x}{2-4x}$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ B. $\dfrac{1}{10}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ D. $\dfrac{9}{10}$

Lời giải

STUDY TIPS

Do $x\to-\infty$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=-10^5$.



Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{3X^2+10}+X}{2-4X}$, ấn ⊟ √ 3 ALPHA) x^2 + 1 0 ▶ + ALPHA)

▼ 2 − 4 ALPHA).

Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập (−) 1 0 $x^{\blacksquare}$ 5 $(X=-10^5)$.

Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,1830117869\approx\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Đáp án C.

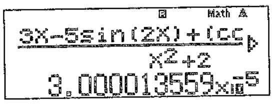
Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ bằng

A. 0 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. 3

Lời giải

STUDY TIPS

Do $x\to+\infty$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=10^5$.



Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4

Nhập vào máy $\dfrac{3X-5\sin(2X)+(\cos(X))^2}{X^2+2}$:

⊟ 3 ALPHA) − 5 sin 2 ALPHA))) + (cos ALPHA)))) x^2 ▼ ALPHA) x^2 + 2

Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập 1 0 $x^{\blacksquare}$ 5 $(X=10^5)$.

Ấn =, máy hiện kết quả bằng $3,000013559\times10^{-5}\approx 0$.

Đáp án A.

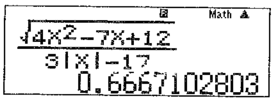
Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{3|x|-17}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{17}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{4}{3}$ D. $\dfrac{2}{3}$

Lời giải

STUDY TIPS
Do $x\to-\infty$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=-10^5$.

Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{4X^2-7X+12}}{3|X|-17}$, ấn [▭/▭] [√▭] [4] [ALPHA] [)] [x²] [−] [7] [ALPHA] [)] [+] [1] [2] [▽] [3] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▷] [−] [1] [7].



Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [1] [0] [x■] [5] $\left(X=-10^5\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,6667102803=\dfrac{2}{3}$.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Giả sử $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^2-4x+5}{2x^2+x+1}=-4$. Giá trị của a bằng

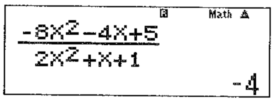
A. -6 B. -4
C. -8 D. Không tồn tại

Lời giải

STUDY TIPS
Do $x\to-\infty$ nên ta CALC biểu thức với giá trị $X=-10^5$.

Với $a=-8$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^2-4x+5}{2x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^2-4x+5}{2x^2+x+1}$.

Nhập vào máy $\dfrac{-8X^2-4X+5}{2X^2+X+1}$, ấn [▭/▭] [(−)] [8] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [ALPHA] [)] [+] [5] [▽] [2] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [+] [1]



Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập [(−)] [1] [0] [x■] [5] $\left(X=-10^5\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng -4.

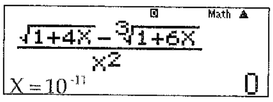
Đáp án C.

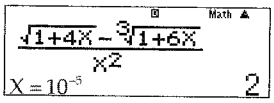
ĐỌC THÊM:

Vấn đề thường gặp khi tìm giới hạn bằng máy tính cầm tay

Khi tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$, ta nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt{1+4X}-\sqrt[3]{1+6X}}{X^2}$

[▭/▭] [√▭] [1] [+] [4] [ALPHA] [)] [▷] [−] [SHIFT] [√▭] [1] [+] [6] [ALPHA] [)] [▽] [ALPHA] [)] [x²]





Ấn [CALC], máy hỏi X? Nếu chọn $X=10^{-11}$, máy sẽ cho kết quả bằng 0 và đây là một kết quả **sai**.

Tuy nhiên, nếu [CALC] với $X=10^{-5}$ thì máy cho kết quả bằng 2. Đây mới là giá trị chính xác của giới hạn trên.

Vì vậy, khi tìm giới hạn bằng máy tính cầm tay, để kết quả xác định được chính xác hơn, ta thường sử dụng CALC với các giá trị $x=x_0\pm10^{-5}$ $\left(\text{hay } x=x_0\pm10^{-6}\right)$ (nếu là giới hạn tại điểm x_0, hay giới hạn một bên tại điểm x_0), $x=\pm10^5$ $\left(\text{hay } x=\pm10^6\right)$ (nếu là giới hạn đến vô cùng).

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giới hạn dãy số

Câu 1: Giới hạn dãy số $\lim\frac{n^5+n^4-3n-2}{4n^3+6n^2+9}$ bằng:

A. $-\infty$ B. 1 C. -4 D. $+\infty$

Câu 2: Giới hạn dãy số $\lim\frac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}$ bằng:

A. $-\infty$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $+\infty$

Câu 3: Giới hạn dãy số $\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$ bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 4: Giới hạn dãy số $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. $-\infty$ B. -2 C. 0 D. $+\infty$

Câu 5: Kết quả của $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+5}\right)$ bằng

A. 0 B. -1 C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 6: Giới hạn dãy số $\lim\frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$ bằng

A. $-\infty$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $+\infty$

Câu 7: Kết quả của $\lim\frac{6.5^{n-1}+4^n+5}{9.4^{n-2}-4.5^{n+2}}$ là

A. $\frac{6}{5}$ B. $-\frac{3}{250}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $+\infty$

Câu 8: Giới hạn dãy số $\lim\left(\frac{1}{2}n^2-3\sin 2n+5\right)$ bằng

A. $-\infty$ B. -3 C. 5 D. $+\infty$

Câu 9: Giới hạn dãy số $\lim\left(\frac{n^2-n}{1-2n^2}+\frac{2\sin n^2}{\sqrt{n}}\right)$ bằng

A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Câu 10: Cho $u_n=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, khi đó $\lim u_n$ bằng

A. 2 B. 2π C. $2e$ D. $+\infty$

Câu 11: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây

A. $\lim\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{12}$

B. $\lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n+\sin\frac{1}{n}\right]=+\infty$

C. $\lim\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n+3^n\right]=0$

D. Cả ba kết quả trên đều sai

Câu 12: Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây

A. $\lim\left(n^2\cos\frac{2\pi}{n}\right)=+\infty$

B. $\lim\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^2}=+\infty$

C. $\lim\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+2}=\frac{1}{2}$

D. Cả ba đều sai

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$ trong đó a là một hằng số. Để $\lim u_n=-1$ thì giá trị của a bằng

A. 3 B. 2 C. -3 D. -2

Câu 14: Cho dãy (u_n) với $u_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

A. $\lim u_n=0$

B. $\lim u_n=\frac{1}{2}$

C. $\lim u_n=1$

D. $\lim u_n$ không tồn tại

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. $\lim u_n=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ B. $\lim u_n=-\infty$

C. $\lim u_n=+\infty$ D. $\lim u_n$ không tồn tại

Câu 16: Biết $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2+n-1}=\frac{a}{b}$ với a,b là phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 17: Tính giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right)$

A. $\frac{11}{18}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

Câu 18: Cho $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $\frac{4}{5}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{5}{4}$

Câu 19: Cho $u_n=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Khi đó kết quả của $\lim u_n$ bằng

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{6}{35}$

Câu 20: Giới hạn dãy số $\lim\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n\left(n^3+1\right)}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{34}$

Câu 21: Giới hạn dãy số

$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+...+\frac{2n-1}{n^2}\right)$ bằng

A. $+\infty$ B. 0 C. 1 D. 2

Câu 22: Tính giới hạn của dãy số

$u_n=\frac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{9}$ D. 1

Câu 23: Tính giới hạn của dãy số

$u_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}...\frac{n^3-1}{n^3+1}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

Câu 24: Tính $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 25: Tính giới hạn của dãy số

$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{6}$ D. 1

Dạng 2: Giới hạn hàm số đến một số

Câu 26: Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$ bằng

A. 7 B. 5 C. 3 D. 9

Câu 27: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$ bằng

A. 4 B. 3 C. 1 D. 0

Câu 28: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{x^2}$ bằng

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 3 D. 7

Câu 29: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{9}{2}$ D. 1

Câu 30: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ bằng

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

Câu 31: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{6}$ D. 0

Câu 32: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos3x}$ bằng

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. $\frac{4}{9}$ D. 0

Câu 33: Giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$ bằng

A. $a-1$ B. a

C. $a+1$ D. $\frac{a-1}{2a}$

Câu 34: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+a)^3-a^3}{x}$ bằng

A. $3a^2$ B. $2a^2$

C. a^2 D. 0

Câu 35: Giá trị $a\in\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{2x-a}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}=\frac{7}{10}\text{ bằng}$$

A. $a=2$ B. $a=1$

C. $a=-2$ D. $a=-1$

Dạng 3: Giới hạn một bên

Câu 36: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$ bằng

A. $+\infty$ B. $\frac{2}{5}$

C. $-\infty$ D. -1

Câu 37: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ bằng

A. $-\infty$ B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$ D. $+\infty$

Câu 38: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$ bằng

A. $+\infty$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. 0 D. 1

Câu 39: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\left|x^2-4x+3\right|}{x-2}$ bằng

A. 3 B. $-\infty$

C. -1 D. -2

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{1-x} & \text{khi } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{khi } x\ge1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ bằng

A. $+\infty$ B. -1

C. 0 D. 1

Dạng 4: Giới hạn đến vô cùng

Câu 41: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^8-2x^5}}{2x^3+1}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$ B. $-\infty$

C. $\dfrac{1}{3}$ D. $+\infty$

Câu 42: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ bằng

A. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ B. $+\infty$

C. $\sqrt{5}$ D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 43: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}\left(\sin 5x-2x^2\right)$ bằng

A. -1 B. -2 C. 1 D. 2

Câu 44: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ bằng

A. $+\infty$ B. $+\infty$

C. $\dfrac{5}{2}$ D. 0

Câu 45: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$ bằng

A. 2 B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{3}{2}$ D. 1

Câu 46: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$ bằng

A. 100 B. $-\infty$

C. $+\infty$ D. 0

Câu 47: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{2x+3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ B. -1

C. 1 D. $-\dfrac{1}{2}$

Câu 48: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$ bằng

A. $+\infty$ B. $-\infty$

C. $-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ D. 0

Câu 49: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng

A. 1 B. -1

C. m D. $-m$

Câu 50: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Giá trị của a là

A. 6 B. 10

C. -10 D. -6

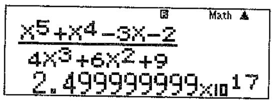
Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tính giới hạn dãy số

Câu 1: Đáp án D.

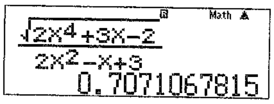
Nhập vào máy $\frac{X^5+X^4-3X-2}{4X^3+6X^2+9}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,499999999\times10^{17}\to+\infty$.

Vậy $\lim\frac{n^5+n^4-3n-2}{4n^3+6n^2+9}=+\infty$.



Câu 2: Đáp án C.

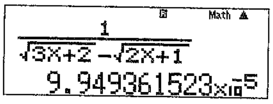
Nhập vào máy $\frac{\sqrt{2X^4+3X-2}}{2X^2-X+3}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $0,7071067815\approx\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\lim\frac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Câu 3: Đáp án A.

Nhập vào máy $\frac{1}{\sqrt{3X+2}-\sqrt{2X+1}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $9,949361523\times10^{-5}\approx0$.

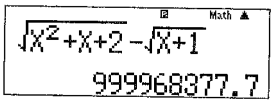
Vậy $\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}=0$.



Câu 4: Đáp án D.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2+X+2}-\sqrt{X+1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $999968377,7\to+\infty$.

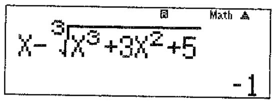
Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right)=+\infty$.



Câu 5: Đáp án B.

Nhập vào máy $X-\sqrt[3]{X^3+3X^2+5}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –1.

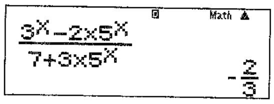
Vậy $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+5}\right)=-1$.



Câu 6: Đáp án B.

Nhập vào máy $\frac{3^X-2\times5^X}{7+3\times5^X}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{2}{3}$.

Vậy $\lim\frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}=-\frac{2}{3}$.

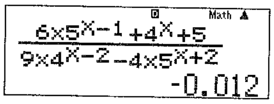


Câu 7: Đáp án B.

Nhập vào máy $\frac{6\times5^{X-1}+4^X+5}{9\times4^{X-2}-4\times5^{X+2}}$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-0,012=-\frac{3}{250}$.

Vậy $\lim\frac{6.5^{n-1}+4^n+5}{9.4^{n-2}-4.5^{n+2}}=-\frac{3}{250}$.

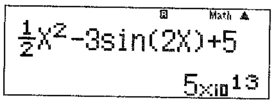


Câu 8: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Nhập vào máy $\frac{1}{2}X^2-3\sin(2X)+5$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [7] $(X=10^7)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5\times10^{13}\to+\infty$.

Vậy $\lim\left(\frac{1}{2}n^2-3\sin2n+5\right)=+\infty$.



Câu 9: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào máy $\frac{X^2-X}{1-2X^2}+\frac{2\sin(X^2)}{\sqrt{X}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [4] $(X=10^4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-0,4813172204\approx-\frac{1}{2}$.

Vậy $\lim\left(\frac{n^2-n}{1-2n^2}+\frac{2\sin n^2}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{1}{2}$.

$$\frac{X^2-X}{1-2X^2}+\frac{2\sin(X^2)}{\sqrt{X}} \quad -0.4813172204$$

Câu 10: Đáp án C.

Nhập vào máy $\frac{2\sqrt{X}}{\sqrt{X}+1}\left(\frac{X+1}{X}\right)^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X?

Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5,43639174\approx 2e$. Vậy $\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=2e$.

$$\frac{2\sqrt{X}}{\sqrt{X}+1}\left(\frac{X+1}{X}\right)^X \quad 5.43639174$$

Câu 11: Đáp án B.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{1}{3^X}-\frac{1}{4^X}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $1,940325217\times10^{-48}\approx 0 \to \lim\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=0$. A sai.

$$\frac{1}{3^X}-\frac{1}{4^X} \quad 1.940325217\times10^{-48}$$

– *Phương án B:* Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Nhập vào máy $\left(\frac{7}{3}\right)^X+\sin\left(\frac{1}{X}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X?

Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $6,275936337\times10^{36}\to+\infty$.

Vậy $\lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n+\sin\frac{1}{n}\right]=+\infty$. B đúng.

$$\left(\frac{7}{3}\right)^X+\sin\left(\frac{1}{X}\right) \quad 6.275936337\times10^{36}$$

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\left(\frac{3}{7}\right)^X+3^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $5,153775207\times10^{47}\to+\infty$.

Vậy $\lim\left[\left(\frac{3}{7}\right)^n+3^n\right]=+\infty$. C sai.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^X+3^X \quad 5.153775207\times10^{47}$$

– *Phương án D:* Sai vì B đúng.

Câu 12: Đáp án A.

– *Phương án A:* Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Nhập vào máy $X^2\cos\left(\frac{2\pi}{X}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $10^{18}\to+\infty$. Vậy $\lim\left(n^2\cos\frac{2\pi}{n}\right)=+\infty$. A đúng.

$$X^2\cos\left(\frac{2\pi}{X}\right) \quad 1\times10^{18}$$

– *Phương án B:* Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Nhập vào máy $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{X}\right)}{X^2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $10^{-18}\approx 0$. Vậy $\lim\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^2}=0$. B sai.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{X}\right)}{X^2} \quad 1\times10^{-18}$$

– *Phương án C:* Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Nhập vào máy $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{X}\right)}{X^2+2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $10^{-18}\approx 0$. Vậy $\lim\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+2}=0$. C sai.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{X}\right)}{X^2+2} \quad 1\times10^{-18}$$

– *Phương án D:* Sai vì A đúng.

Câu 13: Đáp án D.

– *Phương án A:* $a=3\to u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-\sqrt{n^2+1}$.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2+3X+5}-\sqrt{X^2+1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{3}{2}$.

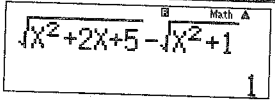
Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\frac{3}{2}$. Loại A.

$$\sqrt{X^2+3X+5}-\sqrt{X^2+1} \quad \frac{3}{2}$$

– *Phương án B:* $a=2\to u_n=\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+1}$.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2+2X+5}-\sqrt{X^2+1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [9] $(X=10^9)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1.

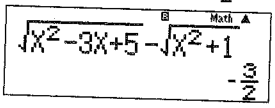
Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=1$. Loại B.



– *Phương án C:* $a=-3\to u_n=\sqrt{n^2-3n+5}-\sqrt{n^2+1}$.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2-3X+5}-\sqrt{X^2+1}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^\blacksquare$ 9 $\left(X=10^9\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả $-\frac{3}{2}$.

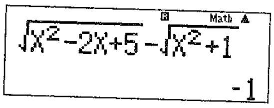
Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=-\frac{3}{2}$. Loại C.



– *Phương án D:* $a=-2\to u_n=\sqrt{n^2-2n+5}-\sqrt{n^2+1}$.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2-2X+5}-\sqrt{X^2+1}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^\blacksquare$ 9 $\left(X=10^9\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả –1.

Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=-1$.

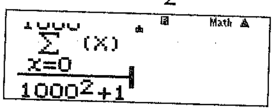


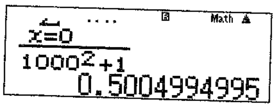
Câu 14: Đáp án B.

Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=1000$.

Khi đó $u_n=\dfrac{1+2+3+...+1000}{1000^2+1}=\dfrac{\sum\limits_{x=1}^{1000}x}{1000^2+1}$

Nhập vào máy $\dfrac{\sum\limits_{x=1}^{1000}(X)}{1000^2+1}$. Ấn =, máy hiện kết quả $0,5004994995\approx\frac{1}{2}$. Như vậy $\lim u_n=\frac{1}{2}$.





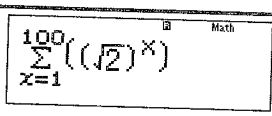
> Nếu chọn n quá lớn (chẳng hạn $n=10^5$,...) thì thời gian để máy tính hiển thị kết quả khá lâu. Vậy nên, nếu bài toán chứa tổng (hay tích) n số hạng, ta nên chọn $n=1000$ là hợp lý nhất.

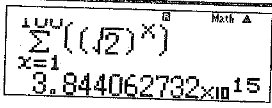
Câu 15: Đáp án C.

Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=100$.

Khi đó $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^{100}=\sum\limits_{x=1}^{100}\left(\sqrt{2}\right)^x$

Nhập vào máy $\sum\limits_{x=1}^{100}\left(\left(\sqrt{2}\right)^X\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả $3,844062732\times10^{15}\to+\infty$. Suy ra $\lim u_n=+\infty$.





Câu 16: Đáp án C.

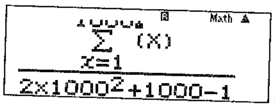
Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=1000$.

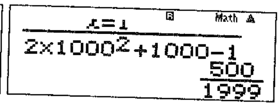
Khi đó $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2+n-1}=\lim\dfrac{1+2+3+...+1000}{2.1000^2+1000-1}$

$=\dfrac{\sum\limits_{x=1}^{1000}x}{2.1000^2+1000-1}$.

Nhập vào máy $\dfrac{\sum\limits_{x=1}^{1000}(X)}{2\times1000^2+1000-1}$. Ấn =, máy hiện kết quả $\frac{500}{1999}\approx\frac{1}{4}$.

Vậy $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2n^2+n-1}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{a}{b}\to\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}\to a+b=5$.





Câu 17: Đáp án A.

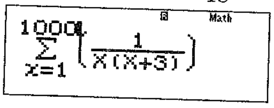
Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=1000$.

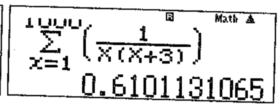
Khi đó

$\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{2.5}+...+\dfrac{1}{n(n+3)}=\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{2.5}+...+\dfrac{1}{1000.1003}$

$=\sum\limits_{x=1}^{1000}\dfrac{1}{x(x+3)}$.

Nhập vào máy $\sum\limits_{x=1}^{1000}\left(\dfrac{1}{X(X+3)}\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả $0,6101131065\approx\dfrac{11}{18}$.



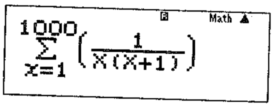


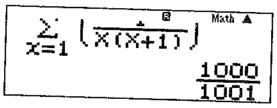
Câu 18: Đáp án B.

Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=1000$.

Khi đó $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{1000.1001}=\sum\limits_{x=1}^{1000}\dfrac{1}{x(x+1)}$

Nhập vào máy $\sum\limits_{x=1}^{1000}\left(\dfrac{1}{X(X+1)}\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả $\dfrac{1000}{1001}\approx1$. Vậy $\lim u_n=1$.





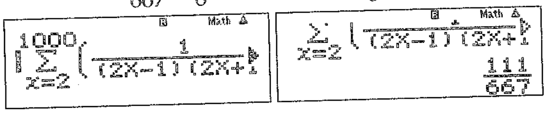
Câu 19: Đáp án B.

Do $n\to+\infty$ nên chọn $n=1000$.

Khi đó $u_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{1999.2001}$

$= \sum_{x=2}^{1000} \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$.

Nhập vào máy $\sum_{x=2}^{1000}\left(\frac{1}{(2X-1)(2X+1)}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $\frac{111}{667} \approx \frac{1}{6}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{6}$.



Câu 20: Đáp án A.

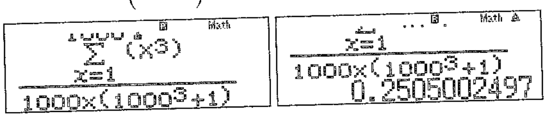
Do $n \to +\infty$ nên chọn $n = 1000$.

Khi đó $\frac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{n(n^3+1)} = \frac{1^3 + 2^3 + ... + 1000^3}{1000(1000^3+1)}$

$= \frac{\sum_{x=1}^{1000} x^3}{1000(1000^3+1)}$.

Nhập vào máy $\frac{\sum_{x=1}^{1000}(X^3)}{1000 \times (1000^3+1)}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0,2505002497 \approx \frac{1}{4}$.

Vậy $\lim \frac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{n(n^3+1)} = \frac{1}{4}$.



Câu 21: Đáp án C.

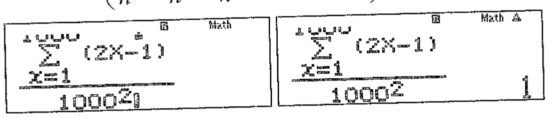
Do $n \to +\infty$ nên chọn $n = 1000$.

Khi đó

$\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + ... + \frac{2n-1}{n^2} = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n^2}$

$= \frac{\sum_{x=1}^{1000}(2x-1)}{1000^2}$. Nhập vào máy $\frac{\sum_{x=1}^{1000}(2X-1)}{1000^2}$, ấn ⊟, máy hiện kết quả 1.

Suy ra $\lim\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + ... + \frac{2n-1}{n^2}\right) = 1$.

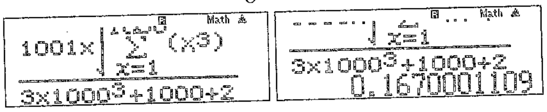


Câu 22: Đáp án C.

Do $n \to +\infty$ nên chọn $n = 1000$.

$\to u_n = \frac{1001.\sqrt{1^3 + 2^3 + ... + 1000^3}}{3.1000^3 + 1000 + 2} = \frac{1001\sqrt{\sum_{x=1}^{1000} x^3}}{3.1000^3 + 1000 + 2}$

Nhập vào máy $\frac{1001 \times \sqrt{\sum_{x=1}^{1000}(X^3)}}{3 \times 1000^3 + 1000 + 2}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0,1670001109 \approx \frac{1}{6}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{6}$.

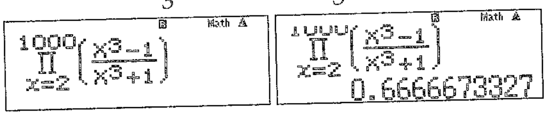


Câu 23: Đáp án C.

Do $n \to +\infty$ nên chọn $n = 100$.

Khi đó $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{1000^3-1}{1000^3+1} = \prod_{x=2}^{1000} \frac{x^3-1}{x^3+1}$.

Nhập vào máy $\prod_{x=2}^{1000}\left(\frac{X^3-1}{X^3+1}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0,6666673327 \approx \frac{2}{3}$. Vậy $\lim u_n = \frac{2}{3}$.



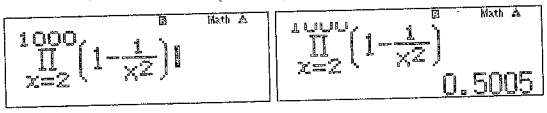
Câu 24: Đáp án B.

Do $n \to +\infty$ nên chọn $n = 100$.

Khi đó $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

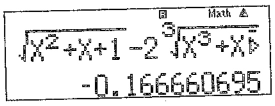
$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1000^2}\right) = \prod_{x=2}^{1000}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Nhập vào máy $\prod_{x=2}^{1000}\left(1 - \frac{1}{X^2}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0,5005 \approx \frac{1}{2}$. Vậy $\lim\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.



Câu 25: Đáp án C.

Nhập vào máy $\sqrt{X^2 + X + 1} - 2\sqrt[3]{X^3 + X^2 - 1} + X$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 x■ 5 $(X = 10^5)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-0,166660695 \approx -\frac{1}{6}$.



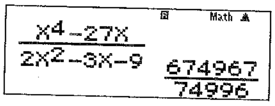
Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - 2\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} + n\right) = -\frac{1}{6}$.

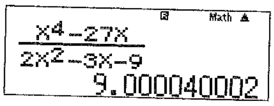
Dạng 2: Giới hạn hàm số đến một số

Câu 26: Đáp án D.

Cách 1: Nhập vào máy $\frac{X^4 - 27X}{2X^2 - 3X - 9}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 3 + 1 0 x■ − 5 $(X = 3 + 10^{-5})$. Ấn ⊟,

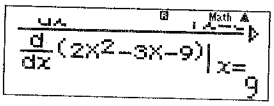
máy hiện kết quả bằng $9,000040002 \approx 9$. Vậy $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = 9$.





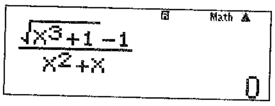
Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = \dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^4 - 27x\right)\Big|_{x=3}}{\frac{d}{dx}\left(2x^2 - 3x - 9\right)\Big|_{x=3}}$

Nhập vào máy $\dfrac{\frac{d}{dx}\left(X^4 - 27X\right)\Big|_{x=3}}{\frac{d}{dx}\left(2X^2 - 3X - 9\right)\Big|_{x=3}}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả 9. Vậy $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = 9$.



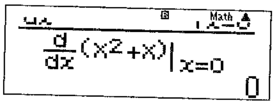
Câu 27: Đáp án D.

Cách 1: Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{X^3 + 1} - 1}{X^2 + X}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^■$ (−) 5 $\left(X = 10^{-5}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x} = 0$.



Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x} = \dfrac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3 + 1} - 1\right)\Big|_{x=0}}{\frac{d}{dx}\left(x^2 + x\right)\Big|_{x=0}}$.

Nhập vào máy $\dfrac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X^3 + 1} - 1\right)\Big|_{x=0}}{\frac{d}{dx}\left(X^2 + X\right)\Big|_{x=0}}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x} = 0$.

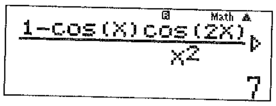


Câu 28: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4.

Nhập vào máy $\dfrac{1 - \cos(X)\cos(2X)\cos(3X)}{X^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^■$ (−) 5 $\left(X = 10^{-5}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 7.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} = 7$.



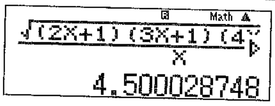
Câu 29: Đáp án C.

Cách 1: Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{(2X+1)(3X+1)(4X+1)} - 1}{X}$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^■$ (−) 5 $\left(X = 10^{-5}\right)$.

Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $4,500028748 \approx 4,5$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x} = \dfrac{9}{2}$.

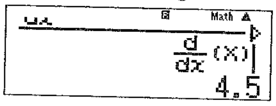


Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$

$= \dfrac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1\right)\Big|_{x=0}}{\frac{d}{dx}(x)\Big|_{x=0}}$.

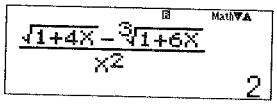
Nhập $\dfrac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(2X+1)(3X+1)(4X+1)} - 1\right)\Big|_{x=0}}{\frac{d}{dx}(X)\Big|_{x=0}}$.

Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $4,5$.



Câu 30: Đáp án D.

Nhập vào máy $\dfrac{\sqrt{1 + 4X} - \sqrt[3]{1 + 6X}}{X^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^■$ (−) 5 $\left(X = 10^{-5}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 4x} - \sqrt[3]{1 + 6x}}{x^2} = 2$.



Câu 31: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4.

Nhập vào máy $\dfrac{\tan(X) - \sin(X)}{X^3}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 0 $x^■$ (−) 5 $\left(X = 10^{-5}\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0,50001 \approx \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\tan(X)-\sin(X)}{X^3} \quad 0.50001$$

Câu 32: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{1+4X}-\sqrt[3]{1+6X}}{1-\cos(3X)}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{4}{9}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}=\frac{4}{9}$.

$$\frac{\sqrt{1+4X}-\sqrt[3]{1+6X}}{1-\cos(3X)} \quad \frac{4}{9}$$

Câu 33: Đáp án D.

Chọn $a=1,3\to$. Khi đó

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to 1,3}\frac{x^2-2,3x+1,3}{x^2-1,3^2}$$

Nhập vào màn hình $\frac{X^2-2,3X+1,3}{X^2-1,3^2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [3] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1,3+10^{-5}\right)$.

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,1153880177=\frac{a-1}{2a}$ (với $a=1,3$).

Vậy $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}=\frac{a-1}{2a}$.

$$\frac{X^2-2.3X+1.3}{X^2-1.3^2} \quad 0.1153880177 \qquad \frac{1.3-1}{2\times 1.3} \quad 0.1153846154$$

Câu 34: Đáp án A.

Chọn $a=1,3$. Khi đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+a)^3-a^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1,3)^3-1,3^3}{x}.$$

Nhập vào màn hình $\frac{(X+1,3)^3-1,3^3}{X}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5,070039=3a^2$ (với $a=1,3$).

$$\frac{(X+1.3)^3-1.3^3}{X} \quad 5.070039 \qquad 3\times 1.3^2 \quad 5.07$$

Câu 35: Đáp án B.

– *Phương án A*: Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[4]{2X-2}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1}$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-93312,39695\to+\infty$. Loại A.

$$\frac{\sqrt[4]{2X-2}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1} \quad -93312.39695$$

– *Phương án B*: Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[4]{2X-1}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1}$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,69999705\approx\frac{7}{10}$. Chọn B.

$$\frac{\sqrt[4]{2X-1}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1} \quad 0.69999705$$

– *Phương án C*: Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[4]{2X+2}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1}$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $41421,73301\to+\infty$. Loại C.

$$\frac{\sqrt[4]{2X+2}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1} \quad 41421.73301$$

– *Phương án D*: Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[4]{2X+1}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1}$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $31607,82064\to+\infty$. Loại D.

$$\frac{\sqrt[4]{2X+1}+\sqrt[5]{X-2}}{X-1} \quad 31607.82064$$

Dạng 3: Giới hạn một bên

Câu 36: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $\frac{2X+\sqrt{X}}{5X-\sqrt{X}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,022491567\approx-1$.

$$\frac{2X+\sqrt{X}}{5X-\sqrt{X}} \quad -1.022491567$$

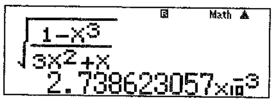
Câu 37: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $\frac{1}{X^3-1}-\frac{1}{X-1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [+] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $\left(X=1+10^{-5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-66667\to-\infty$.

$$\frac{1}{X^3-1}-\frac{1}{X-1} \quad -66667$$

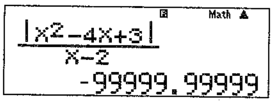
Câu 38: Đáp án C.

Nhập vào màn hình $\sqrt{\dfrac{1-X^3}{3X^2+X}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [-] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $(X=1-10^{-5})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2{,}738623057\times10^{-3}\approx 0$.



Câu 39: Đáp án B.

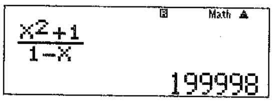
Nhập vào màn hình $\dfrac{|X^2-4X+3|}{X-2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [-] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $(X=2-10^{-5})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-99999{,}99999\to-\infty$.



Câu 40: Đáp án A.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

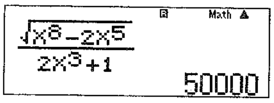
Nhập vào màn hình $\dfrac{X^2+1}{1-X}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [-] [1] [0] [x■] [(-)] [5] $(X=1-10^{-5})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $199998\to+\infty$.



Dạng 4: Giới hạn đến vô cùng

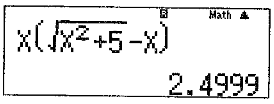
Câu 41: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt{X^8-2X^5}}{2X^3+1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [5] $(X=10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $50000\to+\infty$.



Câu 42: Đáp án D.

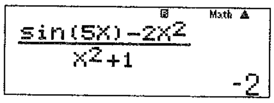
Nhập vào màn hình $X\left(\sqrt{X^2+5}-X\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [5] $(X=10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2{,}4999\approx\dfrac{5}{2}$.



Câu 43: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

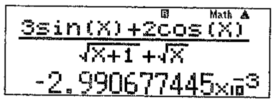
Nhập vào màn hình $\dfrac{\sin(5X)-2X^2}{X^2+1}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [5] $(X=10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –2.



Câu 44: Đáp án D.

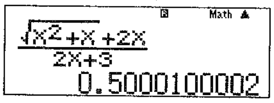
Đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Nhập vào màn hình $\dfrac{3\sin(X)+2\cos(X)}{\sqrt{X+1}+\sqrt{X}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [x■] [5] $(X=10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2{,}990677445\times10^{-3}\approx0$.



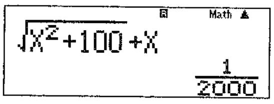
Câu 45: Đáp án B.

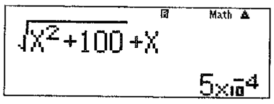
Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt{X^2+X}+2X}{2X+3}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0{,}5000100002\approx\dfrac{1}{2}$.



Câu 46: Đáp án D.

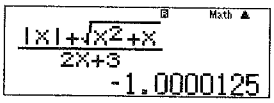
Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2+100}+X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{1}{2000}=5\times10^{-4}\approx0$.





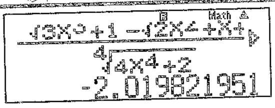
Câu 47: Đáp án B.

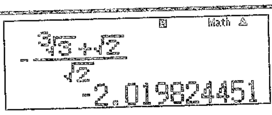
Nhập vào màn hình $\dfrac{|X|+\sqrt{X^2+X}}{2X+3}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1{,}0000125\approx-1$.



Câu 48: Đáp án C.

Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt[3]{3X^3+1}-\sqrt{2X^2+X+1}}{\sqrt[4]{4X^4+2}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2{,}019821951\approx-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

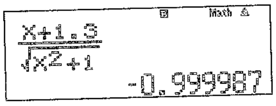




Câu 49: Đáp án B.

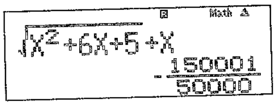
Chọn $m=1,3$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1,3}{\sqrt{x^2+1}}$.

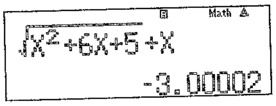
Nhập vào màn hình $\frac{X+1,3}{\sqrt{X^2+1}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,999987\approx-1$.



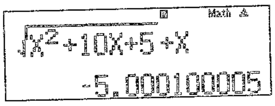
Câu 50: Đáp án C.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2+6X+5}+X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\frac{150001}{50000}\approx-3$. Loại A.

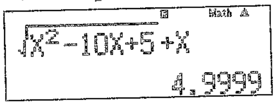




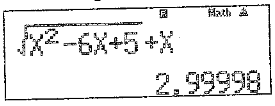
– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2+10X+5}+X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-5,000100005\approx-5$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2-10X+5}+X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,9999\approx5$. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2-6X+5}+X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [0] [x■] [5] $(X=-10^5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,99998\approx3$. Loại D.

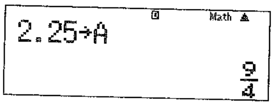


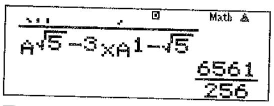
CHỦ ĐỀ 5:
HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

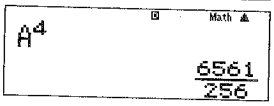
Các dạng toán liên quan:

Dạng 1: Rút gọn và tính giá trị biểu thức lũy thừa, mũ và logarit

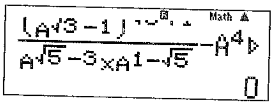
> **STUDY TIPS**
> Khi sử dụng STO (cách 1), ta thường chọn những giá trị a rất lẻ thì kết quả nhận được sẽ càng chính xác hơn. Ở đây chọn $a=2,25$.

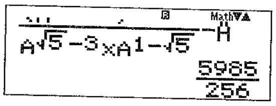


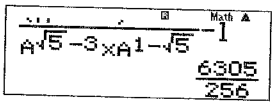


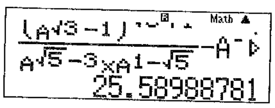


> **STUDY TIPS**
> Khi sử dụng CALC (cách 2), để xác định kết quả chính xác hơn, ta nên CALC biểu thức với nhiều giá trị. Nếu tất cả kết quả đều bằng 0 thì chọn đáp án tương ứng.









Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{1-\sqrt{5}}},(a>0)$. Chọn kết quả **đúng**:

A. a^4. B. a. C. 1. D. a^{-4}.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng STO

Chọn $a=2,25$ và gán $2,25\to A$: [2] [.] [2] [5] [SHIFT] [RCL] [(−)].

Ta có $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{1-\sqrt{5}}}=\dfrac{\left(A^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{A^{\sqrt{5}-3}\times A^{1-\sqrt{5}}}$, ấn [▭/▭] [(] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [3] [▶] [−] [1] [▶] [)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [3] [▶] [+] [1] [▼] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [5] [▶] [−] [3] [▶] [×] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [1] [−] [√▭] [5]

Ấn [=], máy hiện $\dfrac{6561}{256}$.

Phương án A: Ấn [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [4], ấn [=], máy hiện $\dfrac{6561}{256}$.

Cách 2: Sử dụng CALC

* *Phương án A:* Nhập vào máy $\dfrac{\left(A^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{A^{\sqrt{5}-3}\times A^{1-\sqrt{5}}}-A^4$, ấn [▭/▭] [(] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [3] [▶] [−] [1] [▶] [)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [3] [▶] [+] [1] [▼] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [√▭] [5] [▶] [−] [3] [▶] [×] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [1] [−] [√▭] [5] [▶] [▶] [▶] [−] [ALPHA] [(−)] [$x^{\blacksquare}$] [4]

Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [2] [5] $(A=2,25)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 0. Ấn [CALC] biểu thức trên với một vài giá trị A khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Vậy chọn A.

* *Phương án B:* Nhập vào máy $\dfrac{\left(A^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{A^{\sqrt{5}-3}\times A^{1-\sqrt{5}}}-A$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [2] [5] $(A=2,25)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\dfrac{5985}{256}\neq 0$. Loại B.

* *Phương án C:* Nhập vào máy $\dfrac{\left(A^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{A^{\sqrt{5}-3}\times A^{1-\sqrt{5}}}-1$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [2] [5] $(A=2,25)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\dfrac{6305}{256}\neq 0$. Loại C.

* *Phương án D:* Nhập vào máy $\dfrac{\left(A^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{A^{\sqrt{5}-3}\times A^{1-\sqrt{5}}}-A^{-4}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [2] [5] $(A=2,25)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $25,58988781\neq 0$. Loại D.

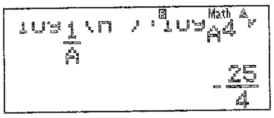
Đáp án A.

> Ví dụ 2: Giá trị của biểu thức $\log_{\frac{1}{a}} a^7 + \log_{a^4} a^3, (0 < a \neq 1)$ là:
>
> A. $\frac{31}{4}$ B. $-\frac{25}{4}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $-\frac{31}{4}$

Lời giải

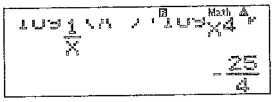
Cách 1: Chọn $a = 0,5$ và gán $0,5 \to A$: [0] [.] [5] [SHIFT] [RCL] [(-)]

Nhập vào máy $\log_{\frac{1}{A}}(A^7) + \log_{A^4}(A^3)$, ấn [log■□] [▭/▭] [1] [▽] [ALPHA] [(-)] [▷] [▷] [ALPHA] [(-)] [x■] [7] [▷] [▷] [+] [log■□] [ALPHA] [(-)] [x■] [4] [▷] [▷] [ALPHA] [(-)] [x■] [3]



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\frac{25}{4}$. Chọn B.

Cách 2: Xét $\log_{\frac{1}{X}}(X^7) + \log_{X^4}(X^3)$, ấn [log■□] [▭/▭] [1] [▽] [ALPHA] [)] [▷] [▷] [ALPHA] [)] [x■] [7] [▷] [▷] [+] [log■□] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▷] [▷] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x■]



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] [.] [5] $(X = 0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{25}{4}$.

Tiếp tục [CALC] một vài giá trị X khác thì kết quả đều hiện bằng $-\frac{25}{4}$. Chọn B.

Đáp án B.

> Ví dụ 3: Cho $a, b > 0$. Rút gọn biểu thức $M = \frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1$. Chọn đáp án đúng:
>
> A. $M = \frac{2b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$ B. $M = \frac{-2b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$ C. $M = \frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$ D. $M = \frac{-2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$

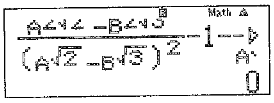
STUDY TIPS

Với bài toán rút gọn biểu thức chứa hai biến a, b (hay x, y), ta cũng thực hiện tương tự như các ví dụ trên để tìm đáp án. Bằng cách chọn tùy ý các cặp (a, b), hay (x, y) (thỏa mãn yêu cầu bài toán) rồi sử dụng CALC hoặc STO.

Lời giải

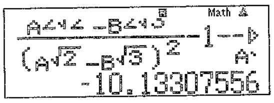
Cách 1: Chọn $a = 0,3$ và $b = 0,5$. Gán $0,3 \to A$: [0] [.] [3] [SHIFT] [RCL] [(-)] và gán $0,5 \to B$: [0] [.] [5] [SHIFT] [RCL] [°'"]

* *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{A^{2\sqrt{2}} - B^{2\sqrt{3}}}{\left(A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 - \frac{2B^{\sqrt{3}}}{A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}}$, ấn [▭/▭] [ALPHA] [(-)] [x■] [2] [√■] [2] [▷] [▷] [−] [ALPHA] [°'"] [x■] [2] [√■] [3] [▽] [(] [ALPHA] [(-)] [x■] [√■] [2] [▷] [▷] [−] [ALPHA] [°'"] [x■] [√■] [3] [▷] [▷] [)] [x²] [▷] [−] [1] [−] [▭/▭] [2] [ALPHA] [°'"] [x■] [√■] [3] [▽] [ALPHA] [(-)] [x■] [√■] [2] [▷] [▷] [−] [ALPHA] [°'"] [x■] [√■] [3]

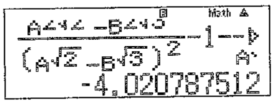


Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

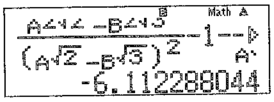
* *Phương án B:* Nhập $\frac{A^{2\sqrt{2}} - B^{2\sqrt{3}}}{\left(A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 - \frac{-2B^{\sqrt{3}}}{A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-10,13307556 \neq 0$. Loại B.



* *Phương án C:* Nhập $\frac{A^{2\sqrt{2}} - B^{2\sqrt{3}}}{\left(A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 - \frac{2A^{\sqrt{3}}}{A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-4,020787512 \neq 0$. Loại C.



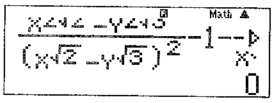
* *Phương án D:* Nhập $\frac{A^{2\sqrt{2}} - B^{2\sqrt{3}}}{\left(A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}\right)^2} - 1 - \frac{2A^{\sqrt{3}}}{A^{\sqrt{2}} - B^{\sqrt{3}}}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-6,112288044 \neq 0$. Loại D.



Cách 2: Sử dụng CALC

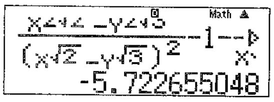
* *Phương án A:* Xét $\frac{X^{2\sqrt{2}}-Y^{2\sqrt{3}}}{\left(X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}\right)^2}-1-\frac{2Y^{\sqrt{3}}}{X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}}$, ấn [■/■] [ALPHA] [)] [x^■] [2] [√■] [2] [▶]

[▶] [−] [ALPHA] [S⇔D] [x^■] [2] [√■] [3] [▼] [(] [ALPHA] [)] [x^■] [√■] [2] [▶] [▶] [−] [ALPHA] [S⇔D] [x^■] [√■] [3] [▶] [▶] [)] [x²] [▶] [−] [1] [−] [■/■] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [√■] [3] [▼] [ALPHA] [)] [x^■] [√■] [2] [▶] [▶] [−] [ALPHA] [S⇔D] [x^■] [√■] [3]

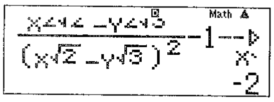


Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0 .

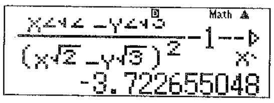
Tiếp tục [CALC] một vài giá trị khác bất kì của cặp $(X;Y)$ thì kết quả đều bằng 0. Chọn A.



* *Phương án B:* Xét $\frac{X^{2\sqrt{2}}-Y^{2\sqrt{3}}}{\left(X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}\right)^2}-1-\frac{-2Y^{\sqrt{3}}}{X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-5,722655048\neq 0$. Loại B.



* *Phương án C:* Xét $\frac{X^{2\sqrt{2}}-Y^{2\sqrt{3}}}{\left(X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}\right)^2}-1-\frac{2X^{\sqrt{3}}}{X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện $-2\neq 0$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $\frac{X^{2\sqrt{2}}-Y^{2\sqrt{3}}}{\left(X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}\right)^2}-1-\frac{-2X^{\sqrt{3}}}{X^{\sqrt{2}}-Y^{\sqrt{3}}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-3,722655048\neq 0$. Loại D.

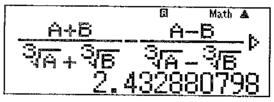
Đáp án A.

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ với $a\neq b$

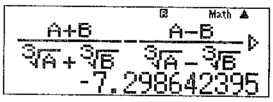
A. $-4\sqrt[3]{ab}$ B. $4\sqrt[3]{ab}$ C. $-2\sqrt[3]{ab}$ D. $2\sqrt[3]{ab}$

Lời giải

* *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{A+B}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}-\frac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}+4\sqrt[3]{AB}$, ấn [■/■] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'''] [▼] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [(−)] [▶] [+] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [°'''] [▶] [▶] [−] [■/■] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'''] [▼] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [(−)] [▶] [−] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [°'''] [▶] [▶] [+] [4] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°''']

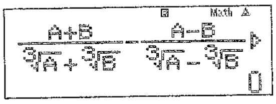


Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [2] $(B=1,2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,432880798\neq 0$. Loại A.

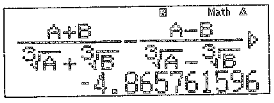


* *Phương án B:* Nhập $\frac{A+B}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}-\frac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}-4\sqrt[3]{AB}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [2] $(B=1,2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-7,298642395\neq 0$. Loại B.

* *Phương án C:* Nhập $\dfrac{A+B}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}-\dfrac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}+2\sqrt[3]{AB}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [2] $(B=1,2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. CALC biểu thức với một vài cặp giá trị (A,B) khác $(A\neq B)$ ta đều được kết quả bằng 0. Chọn C.



* *Phương án D:* Nhập $\dfrac{A+B}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}-\dfrac{A-B}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}-2\sqrt[3]{AB}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [2] $(B=1,2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-4,865761596\neq 0$. Loại D.



Đáp án C.

STUDY TIPS
Để tìm x, ta cũng có thể dùng SOLVE để tìm nghiệm của phương trình $\log_2 x=\sqrt{2}$. Sau đó, gán nghiệm đó vào biến nhớ X $(Ans\to X)$. Tuy nhiên, ta nên dùng SOLVE đối với các bài toán mà phương trình giả thiết cho phức tạp.

Ví dụ 5: Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $K=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2+\log_4 x$

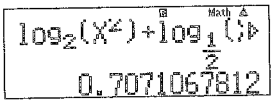
A. $K=-\sqrt{2}$ B. $K=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. $K=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. $K=-\sqrt{3}$

Lời giải

Từ $\log_2 x=\sqrt{2}\Rightarrow x=2^{\sqrt{2}}$. Gán $2^{\sqrt{2}}\to X$: [2] [x■] [√■] [2] [SHIFT] [RCL] [)]

Nhập vào máy $\log_2\left(X^2\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(X^2\right)+\log_4(X)$, ấn [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [+] [log■□] [■/□] [1] [▼] [2] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [+] [log■□] [4] [▶] [ALPHA] [)]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,7071067812=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



Đáp án B.

Ví dụ 6: Cho $9^x+9^{-x}=23$. Khi đó biểu thức $P=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ có giá trị bằng:

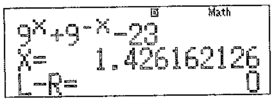
A. 2 B. $\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $-\dfrac{5}{2}$

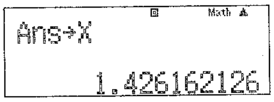
Lời giải

STUDY TIPS
Ta dùng tính năng SOLVE tìm nghiệm của phương trình $9^x+9^{-x}=23$ rồi gán nghiệm đó vào biến nhớ X và tính được giá trị của P. Tính năng này được cập đến tại "PHẦN 1" của cuốn sách.

Nhập $9^X+9^{-X}-23$: [9] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [9] [x■] [(−)] [ALPHA] [)] [▶] [−] [2] [3], ấn [SHIFT] [CALC], máy hỏi "Solve for X", ấn [1], ấn [=], máy hiện $X=1,426162126$.

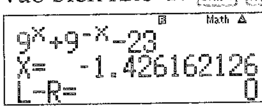
Lưu nghiệm này vào biến nhớ X bằng cách ấn $Ans\to X$: [SHIFT] [RCL] [)].

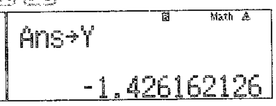




Nhập $9^X+9^{-X}-23$, ấn [SHIFT] [CALC] [(−)] [1] [=], máy hiện $X=-1,426162126$.

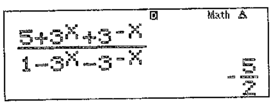
Lưu nghiệm này vào biến nhớ Y: [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

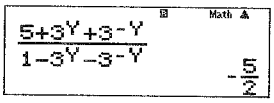




Nhập vào màn hình $\dfrac{5+3^X+3^{-X}}{1-3^X-3^{-X}}$, ấn [■/□] [5] [+] [3] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [3] [x■] [(−)] [ALPHA] [)] [▼] [1] [−] [3] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [3] [x■] [(−)] [ALPHA] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{5}{2}$.





Nhập vào màn hình $\dfrac{5+3^{Y}+3^{-Y}}{1-3^{Y}-3^{-Y}}$: [■/□] [5] [+] [3] [x^■] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [+] [3] [x^■] [(−)] [ALPHA] [S⇔D] [▼] [1] [−] [3] [x^■] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [−] [3] [x^■] [(−)] [ALPHA] [S⇔D]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{5}{2}$.

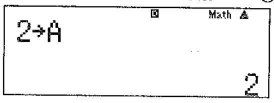
Đáp án D.

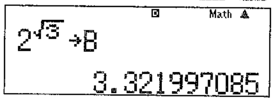
> **Ví dụ 7:** Cho $\log_a b=\sqrt{3}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là:
>
> A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $\sqrt{3}+1$ D. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$

Lời giải

Từ $\log_a b=\sqrt{3}\Rightarrow b=a^{\sqrt{3}}$. Chọn a bất kì, giả sử chọn $a=2$ thì $b=2^{\sqrt{3}}$.

Cách 1: Gán $2\to$ A: [2] [SHIFT] [RCL] [(−)] và gán $2^{\sqrt{3}}\to$ B: [2] [x^■] [√■] [3] [SHIFT] [RCL] [°'''].



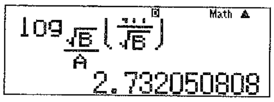


Khi đó $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\log_{\frac{\sqrt{B}}{A}}\left(\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\right)$, ấn [log■□] [■/□] [√■] [ALPHA] [°'''] [▼] [ALPHA] [(−)] [▶] [▶] [■/□] [√■] [ALPHA] [(−)] [▼] [√■] [ALPHA] [°''']. Ấn [=], máy hiện kết quả $2{,}732050808=\sqrt{3}+1$. Chọn đáp án C.

Cách 2: Nhập vào máy $\log_{\frac{\sqrt{B}}{A}}\left(\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [2] [x^■] [√■] [3] $\left(B=2^{\sqrt{3}}\right)$. Ấn [=], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2{,}732050808=\sqrt{3}+1$. Chọn C.

STUDY TIPS

Từ giả thiết, ta tìm được mối quan hệ giữa a,b là $b=a^{\sqrt{3}}$. Như vậy, chọn a bất kì rồi ta biểu diễn b theo a. Gán $a\to$ A và $b\to$ B rồi thay vào ta tính được giá trị biểu thức đã cho. Hoặc ta cũng có thể sử dụng CALC biểu thức với 2 giá trị a,b đó.



Đáp án C.

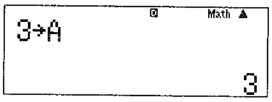
> **Ví dụ 8:** Cho $\log_a b=3,\log_a c=-2$ thì $\log_a\dfrac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^5}$ bằng:
>
> A. 13 B. −2 C. −7 D. 9

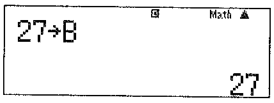
Lời giải

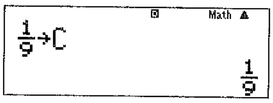
Từ $\log_a b=3\Rightarrow b=a^3,\log_a c=-2\Rightarrow c=a^{-2}$. Chọn $a=3$ bất kì, khi đó:

$$b=a^3=3^3=27 \text{ và } c=a^{-2}=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

Cách 1: Gán $3\to$ A: [3] [SHIFT] [RCL] [(−)], gán $27\to$ B: [2] [7] [SHIFT] [RCL] [°'''] và gán $\dfrac{1}{9}\to$ C: [■/□] [1] [▼] [9] [SHIFT] [RCL] [hyp].

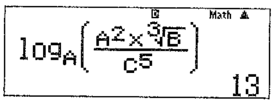




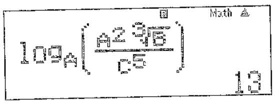


STUDY TIPS

Giả thiết bài toán cho hai dữ kiện đều cùng xuất hiện chung một biến trung gian là a. Như vậy, ta sẽ chọn a bất kì rồi từ đó tính được b,c (theo a). Gán a,b,c đó lần lượt cho các biến nhớ A,B,C rồi thay vào biểu thức cần tính để được kết quả. Hoặc cũng có thể sử dụng CALC như các ví dụ trên.



Ta có $\log_a\dfrac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^5}=\log_A\dfrac{A^2\sqrt[3]{B}}{C^5}$, ấn [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [■/□] [ALPHA] [(−)] [x²] [×] [SHIFT] [√■] ($\sqrt[3]{■}$) [ALPHA] [°'''] [▼] [ALPHA] [hyp] [x^■] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 13. Chọn A.



Cách 2. Nhập vào máy $\log_A \frac{A^2\sqrt[3]{B}}{C^5}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [3]. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [2] [7]. Ấn [=], máy hỏi C? Ấn [1] [x²] [9].
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 13. Chọn A.

Đáp án A.

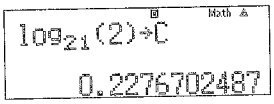
Ví dụ 9: Cho $0 < x \neq 1$ thỏa mãn đồng thời $\log_3 x = a$ và $\log_7 x = b$. Khi đó $\log_{21} x$ được biểu diễn theo a,b là:

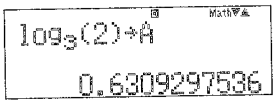
A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ B. $\frac{a}{1+b}$ C. $\frac{a}{a+b}$ D. $\frac{ab}{a+b}$

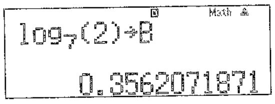
STUDY TIPS
Do x là biến trung gian của hai dữ kiện đã cho, nên ta chọn x bất kì và biểu diễn được a,b theo x. Bằng cách gán $a \to A, b \to B$ và $x \to X$ rồi thay vào biểu thức cần tính.

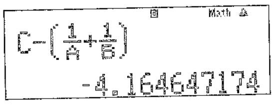
Lời giải

Chọn $x = 2$ thì $a = \log_3 x = \log_3 2$ và $b = \log_7 x = \log_7 2$. Khi đó $\log_{21} x = \log_{21} 2$.
Gán $\log_{21} 2 \to C$: [log□] [2] [1] [▶] [2] [SHIFT] [RCL] [hyp], $\log_3 2 \to A$: [log□] [3] [▶] [2] [SHIFT] [RCL] [(-)] và $\log_7 2 \to B$: [log□] [7] [▶] [2] [SHIFT] [RCL] [°'''].

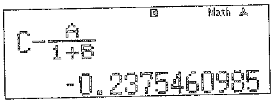




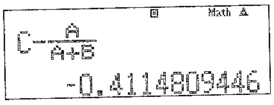




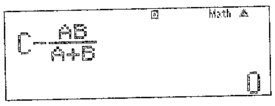
* *Phương án A:* Nhập $C-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$, ấn [ALPHA] [hyp] [–] [(] [□/□] [1] [▼] [ALPHA] [(-)] [▶] [+] [□/□] [1] [▼] [ALPHA] [°'''] [▶] [)], ấn [=], máy hiện $-4{,}164647174 \neq 0$, hay $C \neq \frac{1}{A}+\frac{1}{B}$, hay $\log_{21} x \neq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Loại A.



* *Phương án B:* Nhập $C-\frac{A}{1+B}$, ấn [ALPHA] [hyp] [–] [□/□] [ALPHA] [(-)] [▼] [1] [+] [ALPHA] [°'''], ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0{,}2375460985 \neq 0$, hay $C \neq \frac{A}{1+B}$, hay $\log_{21} x \neq \frac{a}{1+b}$.
Loại B.



* *Phương án C:* Nhập $C-\frac{A}{A+B}$, ấn [ALPHA] [hyp] [–] [□/□] [ALPHA] [(-)] [▼] [ALPHA] [(-)] [+] [ALPHA] [°'''], ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0{,}4114809446 \neq 0$, hay $C \neq \frac{A}{A+B}$, hay $\log_{21} x \neq \frac{a}{a+b}$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $C-\frac{AB}{A+B}$, ấn [ALPHA] [hyp] [–] [□/□] [ALPHA] [(-)] [ALPHA] [°'''] [▼] [ALPHA] [(-)] [+] [ALPHA] [°'''], ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0, hay $C = \frac{AB}{A+B}$, hay $\log_{21} x = \frac{ab}{a+b}$.
Chọn D.

Đáp án D.

Ví dụ 10: Cho a,b là các số thực dương. Tìm $x > 0$ thỏa mãn $\log x = 2\log a + 3\log b$.

A. a^2b^3. B. $2a+3b$. C. a^3b^2. D. $3a+2b$.

Lời giải

Chọn $a=2, b=3$. Gán $2 \to A$: [2] [SHIFT] [RCL] [(−)], $3 \to B$: [3] [SHIFT] [RCL] [°'"].

```
2→A          2
3→B          3
```

> STUDY TIPS
> Nếu chọn $a=b$ thì giá trị của x ở mỗi phương án A, B, C, D lần lượt là $a^5, 5a, a^5, 5a$ nên không thể chọn được đáp án đúng (vì kết quả ở A, C bằng nhau và kết quả ở B, D bằng nhau). Vậy nên, ở bài toán này bắt buộc phải chọn $a \neq b$.

```
log(X)-2log(A)-▷
               0
log(X)-2log(A)-▷
   -0.9194804032
log(X)-2log(A)-▷
   -0.1760912591
log(X)-2log(A)-▷
   -0.9194804032
```

– *Phương án A:* $X = A^2B^3$, gán $A^2B^3 \to X$:
[ALPHA] [(−)] [x^2] [ALPHA] [°'"] [SHIFT] [x^2] [SHIFT] [RCL] [)].

Nhập $\log(X) - 2\log(A) - 3\log(B)$, ấn [log] [ALPHA] [)] [)] [−] [2] [log] [ALPHA] [(−)] [)] [−] [3] [log] [ALPHA] [°'"] [)]. Ấn [=], máy hiện 0. Chọn A.

– *Phương án B:* $X = 2A + 3B$, gán $2A + 3B \to X$: [2] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [ALPHA] [°'"] [SHIFT] [RCL] [)].

Nhập $\log(X) - 2\log(A) - 3\log(B)$, ấn [=], máy hiện $-0{,}9194804032 \neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* $X = A^3B^2$, gán $A^3B^2 \to X$: [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x^2] [ALPHA] [°'"] [x^2] [SHIFT] [RCL] [)]

Nhập $\log(X) - 2\log(A) - 3\log(B)$, ấn [=], máy hiện $-0{,}1760912591 \neq 0$. Loại C.

– Với *Phương án D:* $X = 3A + 2B$, gán $3A + 2B \to X$: [3] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [°'"] [SHIFT] [RCL] [)].

Nhập $\log(X) - 2\log(A) - 3\log(B)$, ấn [=], máy hiện $-0{,}9542425094 \neq 0$. Loại D.

Đáp án A.

Dạng 2: Biểu diễn của một giá trị logarit

Ví dụ 1: Cho $\log_{15} 3 = a$ thì $\log_{25} 15$ tính theo a là:

A. $\dfrac{3}{5(1-a)}$. B. $\dfrac{5}{3(1-a)}$. C. $\dfrac{1}{2(1-a)}$. D. $\dfrac{1}{5(1-a)}$.

Lời giải

```
log15(3)→A
    0.4056838711
log25(15)-3/(5(1-A))▷
   -0.1682606194
log25(15)-5/(3(1-A))▷
     -1.96304056
log25(15)-1/(2(1-A))▷
               0
log25(15)-1/(5(1-A))▷
    0.5047818583
```

Gán $\log_{15} 3 \to A$: [$\log_\square\square$] [1] [5] [▶] [3] [SHIFT] [RCL] [(−)].

* *Phương án A:* Nhập $\log_{25}(15) - \dfrac{3}{5(1-A)}$, ấn [$\log_\square\square$] [2] [5] [▶] [1] [5] [▶] [−] [$\frac{\square}{\square}$] [3] [▼] [5] [(] [1] [−] [ALPHA] [(−)] [)]. Ấn [=], máy hiện $-0{,}1682606194 \neq 0$.

* *Phương án B:* Nhập $\log_{25}(15) - \dfrac{5}{3(1-A)}$, ấn [◀] (7 lần) [DEL] [3] [▲] [DEL] [5].

Ấn [=], máy hiện $-1{,}96304056 \neq 0$.

* *Phương án C:* Nhập $\log_{25}(15) - \dfrac{1}{2(1-A)}$, ấn [◀] (7 lần) [DEL] [2] [▲] [DEL] [1].

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0.

* *Phương án D:* Nhập $\log_{25}(15) - \dfrac{1}{5(1-A)}$, ấn [◀] (7 lần) [DEL] [5].

Ấn [=], máy hiện $0{,}5047818583 \neq 0$.

Đáp án C.

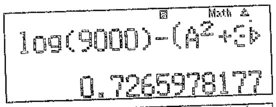
Ví dụ 2: Cho $\log 3 = a$ thì $\log 9000$ được tính theo a bằng

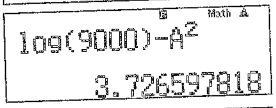
A. $a^2 + 3$ B. a^2 C. $3a^2$ D. $3 + 2a$

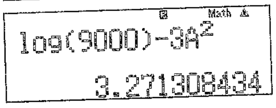
Lời giải

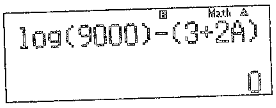
```
log(3)→A
    0.4771212547
```

Gán $\log 3 \to A$, ấn [log] [3] [)] [SHIFT] [RCL] [(−)]









* *Phương án A:* Nhập vào máy $\log(9000)-\left(A^2+3\right)$, ấn [log] [9] [0] [0] [0] [)] [−] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [3] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả $0,7265978177 \neq 0$. Loại A.

* *Phương án B:* Nhập vào máy $\log(9000)-A^2$. Ấn [=], máy hiện kết quả $3,726597818 \neq 0$. Loại B.

* *Phương án C:* Nhập vào máy $\log(9000)-3A^2$. Ấn [=], máy hiện kết quả $3,271308434 \neq 0$. Loại C.

* *Phương án D:* Nhập vào máy $\log(9000)-(3+2A)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

Đáp án D.

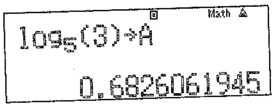
Ví dụ 3: Đặt $a=\log_5 3, b=\log_7 5$. Biểu diễn $\log_{15}105$ theo a và b:

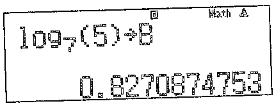
A. $\log_{15}105=\dfrac{a+b+ab}{(1+a)ab}$.   B. $\log_{15}105=\dfrac{a+b+ab}{1+a}$.

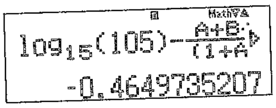
C. $\log_{15}105=\dfrac{a+b+ab}{ab}$.   D. $\log_{15}105=\dfrac{ab+b+1}{b(1+a)}$.

Lời giải

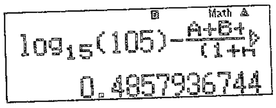
Gán $\log_5 3 \to A$: [log▫□] [5] [▶] [3] [SHIFT] [RCL] [(−)]; gán $\log_7 5 \to B$: [log▫□] [7] [▶] [5] [SHIFT] [RCL] [°'"].





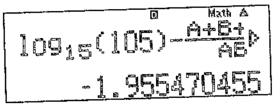


* *Phương án A:* Xét $\log_{15}(105)-\dfrac{A+B+AB}{(1+A)AB}$, ấn [log▫□] [1] [5] [▶] [1] [0] [5] [▶] [−] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [▼] [(] [1] [+] [ALPHA] [(−)] [)] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"]. Ấn [=], máy hiện $-0,4649735207 \neq 0$. Loại A.



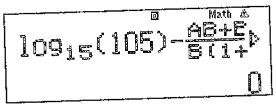
* *Phương án B:* Xét $\log_{15}(105)-\dfrac{A+B+AB}{(1+A)}$, ấn [◀] [DEL] (3 lần).

Ấn [=], máy hiện $0,4857936744 \neq 0$. Loại B.



* *Phương án C:* Xét $\log_{15}(105)-\dfrac{A+B+AB}{AB}$, ấn [◀] [DEL] (6 lần) [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"].

Ấn [=], máy hiện $-1,955470455 \neq 0$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $\log_{15}(105)-\dfrac{AB+B+1}{B(1+A)}$, ấn [◀] [DEL] (10 lần) [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [°'"] [+] [1] [ALPHA] [°'"] [(] [1] [+] [ALPHA] [(−)] [)].

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

Đáp án D.

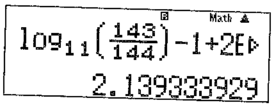
Ví dụ 4: Đặt $a=\log_{11}13, b=\log_{11}12$. Chọn biểu diễn đúng của $\log_{11}\left(\dfrac{143}{144}\right)$ theo a và b

A. $\log_{11}\left(\dfrac{143}{144}\right)=1-2b-a$ B. $\log_{11}\left(\dfrac{143}{144}\right)=1-b+a$

C. $\log_{11}\left(\dfrac{143}{144}\right)=1-2b+a$ D. $\log_{11}\left(\dfrac{143}{144}\right)=1-b-a$

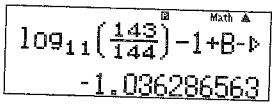
Lời giải

Gán $\log_{11} 13 \to A$: [log□□] [1] [1] [▶] [1] [3] [SHIFT] [RCL] [(−)] và $\log_{11} 12 \to B$: [log□□] [1] [1] [▶] [1] [2] [SHIFT] [RCL] [°'''].

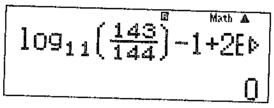


* *Phương án A:* Nhập $\log_{11}\left(\frac{143}{144}\right)-1+2B+A$, ấn [log□□] [1] [1] [▶] [□/□] [1] [4] [3] [▼] [1] [4] [4] [▶] [▶] [−] [1] [+] [2] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [(−)]

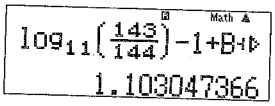
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,139333929 \neq 0$. Loại A.



* *Phương án B:* Nhập $\log_{11}\left(\frac{143}{144}\right)-1+B-A$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,036286563 \neq 0$. Loại B.



* *Phương án C:* Nhập $\log_{11}\left(\frac{143}{144}\right)-1+2B-A$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



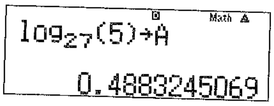
* *Phương án D:* Nhập $\log_{11}\left(\frac{143}{144}\right)-1+B+A$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,103047366 \neq 0$. Loại D.

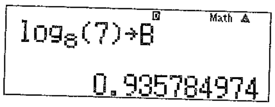
Đáp án C.

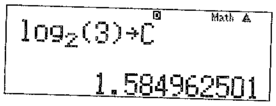
> **Ví dụ 5:** Nếu $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ bằng:
>
> A. $\frac{3b+2ac}{c+2}$.	B. $\frac{3b+3ac}{c+2}$.	C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$.	D. $\frac{3b+3ac}{c+1}$.

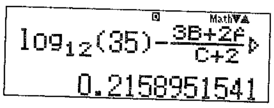
Lời giải

Gán $\log_{27} 5 \to A$: [log□□] [2] [7] [▶] [5] [SHIFT] [RCL] [(−)]; gán $\log_8 7 \to B$: [log□□] [8] [▶] [7] [SHIFT] [RCL] [°'''] và gán $\log_2 3 \to C$: [log□□] [2] [▶] [3] [SHIFT] [RCL] [hyp].



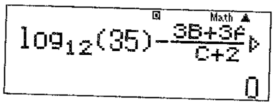






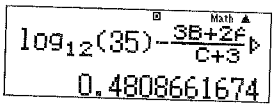
* *Phương án A:* Xét $\log_{12}(35)-\frac{3B+2AC}{C+2}$, ấn [log□□] [1] [2] [▶] [3] [5] [▶] [−] [□/□] [3] [ALPHA] [°'''] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [hyp] [▼] [ALPHA] [hyp] [+] [2].

Ấn [=], máy hiện kết quả $0,2158951541 \neq 0$. Loại A.



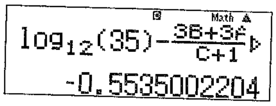
* *Phương án B:* Xét $\log_{12}(35)-\frac{3B+3AC}{C+2}$, ấn [◀](8 lần) [DEL] [3].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



* *Phương án C:* Xét $\log_{12}(35)-\frac{3B+2AC}{C+3}$, ấn [◀] [◀] [DEL] [3] [▲] [◀] [◀] [DEL] [2].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,4808661674$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $\log_{12}(35)-\frac{3B+3AC}{C+1}$, ấn [◀] [◀] [DEL] [1] [▲] [◀] [◀] [DEL] [3].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,5535002206 \neq 0$. Loại D.

Đáp án B.

Dạng 3: Xét tính đúng – sai của mệnh đề chứa mũ và logarit

Ví dụ 1: Giả sử ta có hệ thức $a^2+b^2=7ab,(a,b>0)$. Hệ thức nào sau đây là **đúng**?

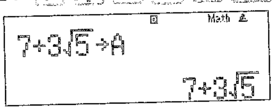
A. $2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$ B. $2\log_2\dfrac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$

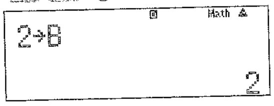
C. $\log_2\dfrac{a+b}{3}=2(\log_2 a+\log_2 b)$ D. $4\log_2\dfrac{a+b}{6}=\log_2 a+\log_2 b$

Lời giải

Chọn $b=2$, khi đó $a^2-14a+4=0$. Ấn MODE 5 (EQN) 3 để giải phương trình bậc hai này. Ta tìm được hai nghiệm là $a=7\pm3\sqrt{5}$. Chọn $a=7+3\sqrt{5}$.

Gán $7+3\sqrt{5}\to A$: 7 + 3 √ 5 SHIFT RCL (-); gán $2\to B$: 2 SHIFT RCL °'''.

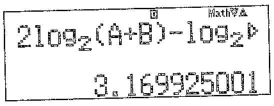




STUDY TIPS
Ngoài ra, ta cũng có thể chọn $a=7-3\sqrt{5}>0$ để kiểm tra tính đúng – sai của các phương án A, B, C, D vì $a=7-3\sqrt{5}$ và $b=2$ cũng thỏa mãn giả thiết.

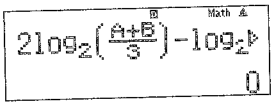
* *Phương án A:* Xét $2\log_2(A+B)-\log_2(A)-\log_2(B)$, ấn 2 log 2 ► ALPHA (-) + ALPHA °''' ► − log 2 ► ALPHA (-) ► − log 2 ► ALPHA °'''.

Ấn =, máy hiện kết quả bằng 3,169925001 ≠ 0. Loại A.



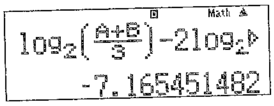
* *Phương án B:* Xét $2\log_2\left(\dfrac{A+B}{3}\right)-\log_2(A)-\log_2(B)$, ấn ► (8 lần) DEL (3 lần) ▭/▭ ALPHA (-) + ALPHA °''' ▼ 3.

Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



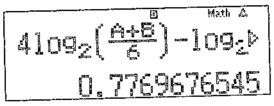
* *Phương án C:* Xét $\log_2\left(\dfrac{A+B}{3}\right)-2\log_2(A)-2\log_2(B)$, ấn ◄ ◄ DEL ► (12 lần) 2 ► (6 lần) 2.

Ấn =, máy hiện kết quả $-7,165451482\neq0$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $4\log_2\left(\dfrac{A+B}{6}\right)-\log_2(A)-\log_2(B)$, ấn ◄ 4 ► (4 lần) ▼ ► DEL 6 ► (4 lần) DEL ► (7 lần) DEL.

Ấn =, máy hiện kết quả $0,7769676545\neq0$. Loại D.



Đáp án B.

Ví dụ 2: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Khẳng định nào sai?

A. $2\log_2(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$ B. $\ln\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$

C. $2\log\dfrac{a+b}{4}=\log a+\log b$ D. $2\log_4(a+b)=4+\log_4 a+\log_4 b$

Lời giải

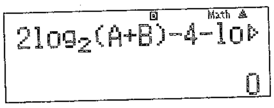
STUDY TIPS
Ngoài ta, ta cũng có thể chọn $a=14-8\sqrt{3}$ để kiểm tra tính đúng – sai của các phương án A, B, C, D vì $a=14-8\sqrt{3}$ và $b=2$ cũng thỏa mãn giả thiết.

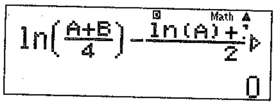
Chọn $b=2$, khi đó $a^2-28a+4=0$. Ấn MODE 5 (EQN) 3 để giải phương trình bậc hai này. Ta tìm được hai nghiệm là $a=14\pm8\sqrt{3}$. Chọn $a=14+8\sqrt{3}$.

Gán $14+8\sqrt{3}\to A$: 1 4 + 8 √ 3 SHIFT RCL (-) và gán $2\to B$: 2 SHIFT RCL °'''.

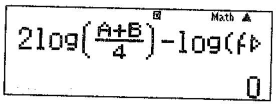
* *Phương án A:* Nhập $2\log_2(A+B)-4-\log_2(A)-\log_2(B)$, ấn 2 log 2 ► ALPHA (-) + ALPHA °''' ► − 4 − log 2 ► ALPHA (-) ► − log 2 ► ALPHA °'''

Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy A đúng. Loại A.

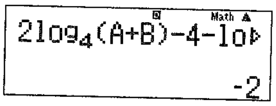




* *Phương án B:* Nhập $\ln\left(\dfrac{A+B}{4}\right)-\dfrac{\ln(A)+\ln(B)}{2}$, ấn [ln] [▭/▭] [ALPHA] [(–)] [+] [ALPHA] [°'''] [▼] [4] [▶] [)] [–] [▭/▭] [ln] [ALPHA] [(–)] [)] [+] [ln] [ALPHA] [°'''] [)] [▼] [2]
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Vậy B đúng. Loại B.



* *Phương án C:* Nhập $2\log\left(\dfrac{A+B}{4}\right)-\log(A)-\log(B)$, ấn [2] [log] [▭/▭] [ALPHA] [(–)] [+] [ALPHA] [°'''] [▼] [4] [▶] [)] [–] [log] [ALPHA] [(–)] [)] [–] [log] [ALPHA] [°'''] [)]
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Vậy C đúng. Loại C.



* *Phương án D:* Nhập $2\log_4(A+B)-4-\log_4(A)-\log_4(B)$, ấn [2] [log▭▭] [4] [▶] [ALPHA] [(–)] [+] [ALPHA] [°'''] [▶] [–] [4] [–] [log▭▭] [4] [▶] [ALPHA] [(–)] [▶] [–] [log▭▭] [4] [▶] [ALPHA] [°''']
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng –2. Vậy D sai. Chọn D.

Đáp án D.

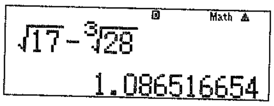
Ví dụ 3: Cho các mệnh đề sau

(I). $\sqrt{17}>\sqrt[3]{28}$ (II). $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ (III). $4^{\sqrt{5}}<4^{\sqrt{7}}$ (IV) $\sqrt[4]{13}<\sqrt[5]{23}$

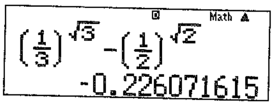
Mệnh đề **sai** là

A. (III) B. (II) và (IV) C. (I) D. (II) và (III)

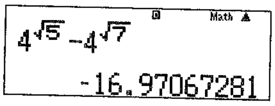
Lời giải



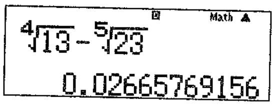
* Mệnh đề (I): Nhập vào máy $\sqrt{17}-\sqrt[3]{28}$, ấn [√▭] [1] [7] [▶] [–] [SHIFT] [√▭] [2] [8]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1{,}086516654>0\to\sqrt{17}>\sqrt[3]{28}$. Vậy (I) đúng.



* Mệnh đề (II): Nhập vào máy $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$, ấn [(] [▭/▭] [1] [▼] [3] [▶] [)] [x^▭] [√▭] [3] [▶] [▶] [–] [(] [▭/▭] [1] [▼] [2] [▶] [)] [x^▭] [√▭] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0{,}226071615\to\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$. Vậy (II) sai.



* Mệnh đề (III): Nhập vào máy $4^{\sqrt{5}}-4^{\sqrt{7}}$, ấn [4] [x^▭] [√▭] [5] [▶] [▶] [–] [4] [x^▭] [√▭] [7]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-16{,}97067281<0\to4^{\sqrt{5}}<4^{\sqrt{7}}$. Vậy (III) đúng.



* Mệnh đề (IV): Nhập vào máy $\sqrt[4]{13}-\sqrt[5]{23}$, ấn [SHIFT] [x^▭] [4] [▶] [1] [3] [▶] [–] [SHIFT] [x^▭] [5] [▶] [2] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả $0{,}02665769156>0\to\sqrt[4]{13}>\sqrt[5]{23}$. Vậy (IV) sai.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a,b với $a\neq1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}\log_a b$ B. $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$

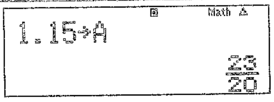
C. $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{4}\log_a b$ D. $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$

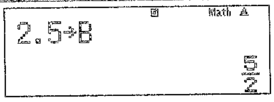
Lời giải

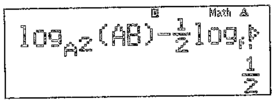
Chọn $a=1{,}15$ và $b=2{,}5$. Gán $1{,}15\to A$: [1] [.] [1] [5] [SHIFT] [RCL] [(–)], gán $2{,}5\to B$: [2] [.] [5] [SHIFT] [RCL] [°'''].

STUDY TIPS

Với ví dụ này, ta chọn các giá trị a,b tùy ý sao cho thỏa mãn điều kiện giả thiết đưa ra. Từ đó thay các giá trị này vào đáp án để kiểm tra tính đúng – sai.

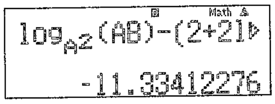






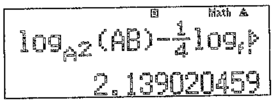
* *Phương án A:* Xét $\log_{A^2}(AB)-\frac{1}{2}\log_A(B)$: [log■□] [ALPHA] [(−)] [x²] [▶] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'"] [▶] [−] [■/□] [1] [▼] [2] [▶] [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'"].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{1}{2}\neq 0$. Loại A.



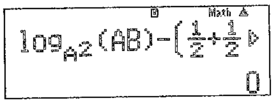
* *Phương án B:* Xét $\log_{A^2}(AB)-\left(2+2\log_A(B)\right)$: [◀] [DEL] (10 lần) [(] [2] [+] [2] [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'"] [▶] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-11,33412276\neq 0$. Loại B.



* *Phương án C:* Xét $\log_{A^2}(AB)-\frac{1}{4}\log_A(B)$: [◀] [DEL] (10 lần) [■/□] [1] [▼] [4] [▶] [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'"].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,139020459\neq 0$. Loại C.



* *Phương án D:* Xét $\log_{A^2}(AB)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_A(B)\right)$: [◀] [DEL] (10 lần) [(] [■/□] [1] [▼] [2] [▶] [+] [■/□] [1] [▼] [2] [▶] [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'"] [▶] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

Đáp án D.

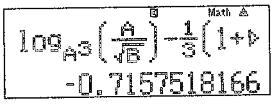
Ví dụ 5: Cho hai số thực dương a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\log_a b\right)$ B. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-2\log_a b\right)$

C. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\log_a b\right)$ D. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)=3\left(1-\frac{1}{2}\log_a b\right)$

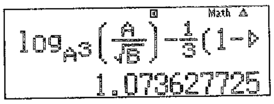
Lời giải

Chọn $a=1,15$ và $b=1,35$. Gán $1,15\to A$: [1] [.] [1] [5] [SHIFT] [RCL] [(−)] và gán $1,35\to B$: [1] [.] [3] [5] [SHIFT] [RCL] [°'"].

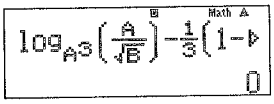


* *Phương án A:* Nhập vào máy $\log_{A^3}\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\log_A(B)\right)$, ấn [log■□] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x³] [▶] [■/□] [ALPHA] [(−)] [▼] [√■] [ALPHA] [°'"] [▶] [▶] [▶] [−] [■/□] [1] [▼] [3] [▶] [(] [1] [+] [■/□] [1] [▼] [2] [▶] [log■□] [ALPHA] [(−)] [▶] [ALPHA] [°'"] [▶] [)]

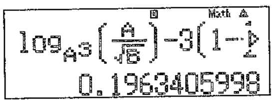
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,71575...\neq 0\to$ Loại A.



* *Phương án B:* Nhập vào máy $\log_{A^3}\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-2\log_A(B)\right)$, ấn tiếp [◀] (7 lần) [DEL] (6 lần) [−] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,0736...\neq 0\to$ Loại B.



* *Phương án C:* Nhập vào máy $\log_{A^3}\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\log_A(B)\right)$, ấn tiếp [◀] (7 lần) [×] [◀] [◀] [1] [■/□]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0\to$ Chọn C.



* *Phương án D:* Nhập vào máy $\log_{A^3}\left(\frac{A}{\sqrt{B}}\right)-3\left(1-\frac{1}{2}\log_A(B)\right)$, ấn tiếp [◀] (16 lần) [DEL] (5 lần) [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,1963...\to$ Loại D.

Đáp án C.

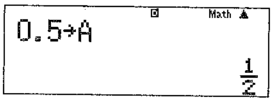
Ví dụ 6: Nếu $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$ thì ta có:

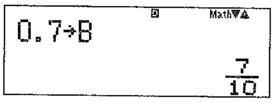
A. $0<a<b<1$ B. $0<b<a<1$ C. $0<a<1<b$ D. $1<a<b$

STUDY TIPS
Nếu như các ví dụ đã thực hiện ở trên, ta đều chọn các biến a,b bất kì dựa vào giả thiết bài toán, thì ở ví dụ này sẽ ngược lại, ta đi chọn các giá trị a,b dựa vào bốn đáp án A, B, C, D cho trước.

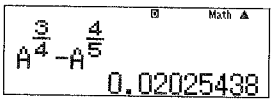
Lời giải

* *Phương án A:* Chọn $a=0,5$ và $b=0,7$ thỏa mãn $0<a<b<1$. Gán $0,5 \to A$: [0] [.] [5] [SHIFT] [RCL] [(-)], gán $0,7 \to B$: [0] [.] [7] [SHIFT] [RCL] [°'''].



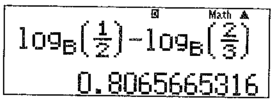


Xét $A^{\frac{3}{4}} - A^{\frac{4}{5}}$, ấn [ALPHA] [(-)] [$x^\blacksquare$] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [3] [▽] [4] [▷] [▷] [−] [ALPHA] [(-)] [$x^\blacksquare$] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [4] [▽] [5].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,02025438 > 0 \to A^{\frac{3}{4}} > A^{\frac{4}{5}}$.

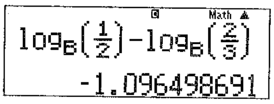
Xét $\log_B\left(\frac{1}{2}\right) - \log_B\left(\frac{2}{3}\right)$, ấn [$\log_\blacksquare\square$] [ALPHA] [°'''] [▷] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [1] [▽] [2] [▷] [▷] [−] [$\log_\blacksquare\square$] [ALPHA] [°'''] [▷] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [2] [▽] [3]. Ấn [=], máy hiện $0,8065665316 > 0 \to \log_B\left(\frac{1}{2}\right) > \log_B\left(\frac{2}{3}\right)$ (mâu thuẫn giả thiết). Loại A.



* *Phương án B* cũng bị loại vì $b=0,7$ thỏa mãn $0<b<1$ nhưng không thỏa mãn $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$.

* *Phương án C:* Từ đáp án A ta có $a=0,5$ thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$. Nên chỉ cần chọn $b=1,3$ thỏa $b>1$, rồi gán $1,3 \to B$: [1] [.] [3] [SHIFT] [RCL] [°'''].

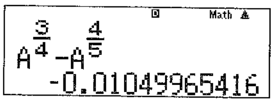
Xét $\log_B\left(\frac{1}{2}\right) - \log_B\left(\frac{2}{3}\right)$, ấn [$\log_\blacksquare\square$] [ALPHA] [°'''] [▷] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [1] [▽] [2] [▷] [▷] [−] [$\log_\blacksquare\square$] [ALPHA] [°'''] [▷] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [2] [▽] [3].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,096498691 < 0 \to \log_B\left(\frac{1}{2}\right) < \log_B\left(\frac{2}{3}\right)$. Chọn C.

* *Phương án D:* Chọn $a=1,2$ và $b=1,3$. Gán $1,2 \to A$ và gán $1,3 \to B$.

Xét $A^{\frac{3}{4}} - A^{\frac{4}{5}}$, ấn [ALPHA] [(-)] [$x^\blacksquare$] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [3] [▽] [4] [▷] [▷] [−] [ALPHA] [(-)] [$x^\blacksquare$] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [4] [▽] [5].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,01049965416 < 0 \to A^{\frac{3}{4}} < A^{\frac{4}{5}}$ (mâu thuẫn giả thiết). Loại D.

Đáp án C.

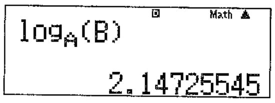
Ví dụ 7: Cho hai số thực a,b với $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$ B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$ D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Lời giải

Chọn $a=1,15$ và $b=1,35$ thỏa mãn $1<a<b$. Gán $1,15 \to A$: [1] [.] [1] [5] [SHIFT] [RCL] [(-)] và gán $1,35 \to B$: [1] [.] [3] [5] [SHIFT] [RCL] [°'''].



Nhập vào máy $\log_A(B)$, ấn [$\log_\blacksquare\square$] [ALPHA] [(-)] [▷] [ALPHA] [°''']. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,147... > 1 \to \log_a b > 1$.

```
logB(A)
0.4657107751
```

Nhập vào máy $\log_B(A)$, ấn [log□] [ALPHA] [(-)] [▶] [ALPHA] [°'"]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,465... < 1 \rightarrow \log_b a < 1$.

Như vậy $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Đáp án D.

Dạng 4: Tìm số chữ số của một lũy thừa

Bài toán: Xét số tự nhiên A được biểu diễn dưới dạng mũ, hay một dạng nào đó mà ta không thể đếm được số các chữ số của nó. Giả sử A có n chữ số, khi đó n được tính theo công thức $n = [\log A] + 1$.

PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ

Xét số thực A, số nguyên lớn nhất mà không vượt quá A được gọi là phần nguyên của A, kí hiệu là $[A]$.

Như vậy:

$$[A] \le A \le [A] + 1$$

Chứng minh: A có n chữ số nên có dạng $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1}$

Ta có $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1} = a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_2.10 + a_1$. Suy ra:

$$\begin{cases} \log A = \log\left(a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_2.10 + a_1\right) \le \log\left(10^n\right) = n \\ \log A = \log\left(a_n.10^{n-1} + a_{n-1}.10^{n-2} + a_{n-2}.10^{n-3} + \dots + a_2.10 + a_1\right) \ge \log\left(a_n.10^{n-1}\right) \ge n - 1 \end{cases}$$

Vậy $n - 1 \le \log A \le n \longrightarrow \log A \le n \le \log A + 1 \longrightarrow \boxed{n = [\log A] + 1}$.

Trong máy tính casio (hay vinacal), để lấy phần nguyên của một số, ta dùng lệnh Int, ấn [ALPHA] [+].

Ví dụ 1: Trong các kết luận sau, kết luận nào **đúng**?

A. $11^{2003} > 9^{2500}$ B. $23^{693} < 25^{600}$ C. $29^{445} < 31^{523}$ D. $29^{445} > 31^{523}$

Lời giải

STUDY TIPS

Để so sánh hai số tự nhiên được biểu diễn dưới dạng mũ, hay một dạng nào đó có giá trị quá lớn mà máy tính casio không tính được thì ta nên sử dụng lệnh Int để tìm số chữ số của hai số đó. Áp dụng nguyên tắc: "Nếu số A có m chữ số, số B có n chữ số $(m > n)$ thì $A > B$"

Nhận xét: Để so sánh hai số A và B, ta thường làm bằng cách xét hiệu $A - B$ rồi nhập vào máy tính tìm kết quả. Nếu kết quả lớn hơn 0 $(A - B > 0)$ thì $A > B$; kết quả nhỏ hơn 0 $(A - B < 0)$ thì $A < B$; kết quả bằng 0 $(A - B = 0)$ thì $A = B$.

* *Phương án A:* Nhập vào máy $11^{2003} - 9^{2500}$, ấn [1] [1] [x■] [2] [0] [0] [3] [▶] [−] [9] [x■] [2] [5] [0] [0]. Ấn [=], máy hiện Math ERROR. Vậy ta không thể so sánh hai số 11^{2003} và 9^{2500} dựa vào việc xét hiệu giữa chúng, bởi đây là các số quá lớn, vượt ra ngoài phạm vi tính toán của máy tính.

Cách khác, số chữ số của 11^{2003} được tính theo công thức $\left[\log\left(11^{2003}\right)\right] + 1$ $= [2003.\log(11)] + 1$. Nhập vào máy $\text{Int}(2003 \times \log(11)) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [2] [0] [0] [3] [×] [log] [1] [1] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2086.

```
Int(2003×log(11▶
2086
```

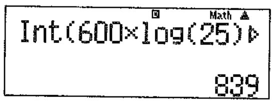
Số chữ số của 9^{2500} là $\left[\log\left(9^{2500}\right)\right] + 1 = [2500.\log 9] + 1$. Nhập vào máy $\text{Int}(2500 \times \log(9)) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [2] [5] [0] [0] [×] [log] [9] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2386.

```
Int(2500×log(9)▶
2386
```

Như vậy $11^{2003} < 9^{2500}$. Đáp án A sai, loại A.

* *Phương án B:* Số chữ số của 23^{693} là $\left[\log\left(23^{693}\right)\right] + 1 = [693.\log 23] + 1$. Nhập vào máy $\text{Int}(693 \times \log(23)) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [6] [9] [3] [×] [log] [2] [3] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 944.

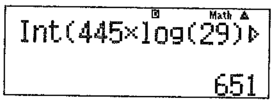
```
Int(693×log(23)▶
944
```

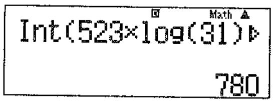


Số chữ số của 25^{600} là $\left[\log\left(25^{600}\right)\right]+1=\left[600.\log(25)\right]+1$. Nhập vào máy $\text{Int}\left(600\times\log(25)\right)+1$, ấn [ALPHA] [+] [6] [0] [0] [×] [log] [2] [5] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 839.

Như vậy $23^{693}>25^{600}$. Đáp án B sai. Loại B.

* *Phương án C:* Số chữ số của 29^{445} là $\left[\log\left(29^{445}\right)\right]+1=\left[445.\log(29)\right]+1$. Nhập vào máy $\text{Int}\left(445\times\log(29)\right)+1$, ấn [ALPHA] [+] [4] [4] [5] [×] [log] [2] [9] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 651.





Số chữ số của 31^{523} là $\left[\log\left(31^{523}\right)\right]+1=\left[523.\log 31\right]+1$. Nhập vào máy $\text{Int}\left(523\times\log(31)\right)+1$, ấn [ALPHA] [+] [5] [2] [3] [×] [log] [3] [1] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 780.

Như vậy $29^{445}<31^{523}$. Đáp án C đúng, chọn C.

* *Phương án D:* Do C đúng, nên D là đáp án sai. Loại D.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Số $p=2^{756839}-1$ là một số nguyên tố. Nếu viết trong hệ thập phân, số đó có

A. 227831 chữ số B. 227834 chữ số

C. 227832 chữ số D. 227835 chữ số

Lời giải

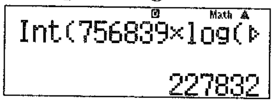
STUDY TIPS

Ta thấy $p+1$ có 227832 chữ số, vậy p có bao nhiêu chữ số? Liệu vẫn là 227832 chữ số hay suy biến còn 227831 chữ số? Ta thấy $p+1$ là lũy thừa bậc của 2 nên số tận cùng chỉ có thể là 2, 4, 6 hoặc 8. Khi trừ đi 1 thì sẽ là 1, 3, 5 hoặc 7. Nên số chữ số không bị suy biến. Hay nói cách khác, p và $p+1$ có số chữ số bằng nhau.

Từ $p=2^{756839}-1\rightarrow p+1=2^{756839}$.

Số chữ số của số $p+1$ là $\left[\log(p+1)\right]+1=\left[\log\left(2^{756839}\right)\right]+1=\left[756839.\log 2\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(756839\times\log(2)\right)+1$, ấn [ALPHA] [+] [7] [5] [6] [8] [3] [9] [×] [log] [2] [)] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 227832.



Vậy số $p+1$ có 227832 chữ số, nên số p cũng có 227832 chữ số.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho tổng $M=C_{1642}^{0}3^{1642}+C_{1642}^{1}3^{1641}2+C_{1642}^{2}3^{1640}2^{2}+...+C_{1642}^{1642}2^{1642}$. Khi viết M dưới dạng một số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số?

A. 608 B. 1148 C. 2610 D. 911

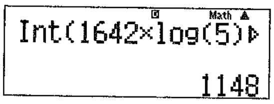
Lời giải

Xét khai triển $(x+y)^{1642}=C_{1642}^{0}x^{1642}+C_{1642}^{1}x^{1641}y+C_{1642}^{2}x^{1640}y^{2}+...+C_{1642}^{1642}y^{1642}$

Với $x=3,y=2$ thì ta có:

$$5^{1642}=(3+2)^{1642}=C_{1642}^{0}3^{1642}+C_{1642}^{1}3^{1641}2+C_{1642}^{2}3^{1640}2^{2}+...+C_{1642}^{1642}2^{1642}=M$$

Vậy số chữ số của $M=5^{1642}$ là $\log\left[M\right]+1=\left[\log\left(5^{1642}\right)\right]+1=\left[1642\times\log 5\right]+1$.



Nhập vào máy $\text{Int}\left(1642\times\log(5)\right)+1$, ấn [ALPHA] [+] [1] [6] [4] [2] [×] [log] [5] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1148.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Nhà toán học Pháp Pierre de Fermat là người đầu tiên đưa ra khái niệm số Fecmat $F_n = 2^{2^n} + 1$ là một số nguyên tố với n là số dương không âm. Số chữ số của F_{13} trong hệ thập phân là

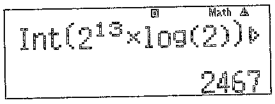
A. 1243 B. 1234 C. 2452 D. 2467

STUDY TIPS
Ta thấy số $2^{2^{13}}$ không thể tận cùng là nên số chữ số của $F_{13} = 2^{2^{13}} + 1$ cũng chính là số chữ số của $2^{2^{13}}$ trong hệ thập phân.

Lời giải

Số F_{13} có dạng $2^{2^{13}} + 1$. Số chữ số của $2^{2^{13}}$ là $\left[\log\left(2^{2^{13}}\right)\right] + 1 = \left[2^{13}.\log 2\right] + 1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(2^{13} \times \log(2)\right) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [2] [$x^{■}$] [1] [3] [▶] [×] [log] [2] [)] [)] [+] [1].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2467.

Như vậy, số chữ số của $2^{2^{13}}$ là 2467 chữ số nên số chữ số của $F_{13} = 2^{2^{13}} + 1$ cũng là 2467 chữ số.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Đầu năm 2016, Curtis Cooper và các cộng sự nhóm nghiên cứu Đại học Central Missouri, Mỹ vừa công bố số nguyên tố lớn nhất tại thời điểm đó. Số nguyên tố này là một số có giá trị bằng $M = 2^{74207281} - 1$. Hỏi số m có bao nhiêu chữ số?

A. 2233862 B. 22338618 C. 22338617 D. 2233863

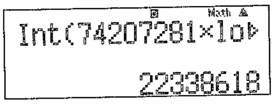
STUDY TIPS
Tổng quát: Cho n là một số nguyên dương. Khi đó, số chữ số của các số $2^n + 1$ và $2^n - 1$ cũng chính bằng số chữ số của 2^n.

Lời giải

Từ $M = 2^{74207281} - 1 \rightarrow M + 1 = 2^{74207281}$.

Số chữ số của $M+1$ là $\left[\log\left(2^{74207281}\right)\right] + 1 = \left[74207281.\log 2\right] + 1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(74207281 \times \log(2)\right) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [7] [4] [2] [0] [7] [2] [8] [1] [×] [log] [2] [)] [)] [+] [1].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 22338618.

Vậy số chữ số của M là 22338618.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, ở đất nước Ấn Độ có một vị quan dâng lên nhà vua một bàn cờ có 64 ô kèm theo cách chơi cờ. Nhà vua thích quá, bảo rằng: "Ta muốn dành cho khanh một phần thưởng thật xứng đáng. Vậy khanh thích gì nào?". Vị quan tâu: "Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ". Cụ thể như sau: "Bàn cờ có 64 ô thì ô thứ nhất thần xin một hạt, ô thứ hai thì gấp đôi ô đầu, ô thứ ba thì gấp đôi ô thứ hai, ô sau nhận số hạt gạo gấp đôi ô liền trước". Thoạt đầu, nhà vua rất ngạc nhiên vì phần thưởng quá khiêm tốn, nhưng đến khi người lính vét sạch hết đến hạt thóc cuối cùng trong kho gạo của triều đình thì nhà vua mới kinh ngạc mà nhận ra rằng: "Số thóc này là một số vô cùng lớn, cho dù có gom hết số thóc của cả nước cũng không thể đủ cho một bàn cờ chỉ có vỏn vẹn 64 ô". Số hạt thóc mà nhà vua cần để ban cho vị quan là một số có bao nhiêu chữ số?

A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

Lời giải

STUDY TIPS

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ thì tổng S_n được tính theo công thức:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$$

Số thóc ở ô thứ nhất là $1 = 2^0$ hạt, ở ô thứ hai là $2 = 2^1$ hạt, ở ô thứ ba là $4 = 2^2$ hạt, ở ô thứ tư là $8 = 2^3$ hạt,.... Như vậy, tổng quát ta có số thóc ở ô thứ n sẽ là 2^{n-1} hạt.

Tổng số thóc của cả 64 ô sẽ là $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{63}$. Đây là tổng của một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Suy ra $S = \frac{2^0(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1 \to S + 1 = 2^{64}$.

Số chữ số của $S+1$ là $[\log(S+1)] + 1 = [\log 2^{64}] + 1 = [64.\log 2] + 1$.

Nhập vào máy $\text{Int}(64 \times \log(2)) + 1$, ấn [ALPHA] [+] [6] [4] [×] [log] [2] [)] [)] [+] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 20.

Int(64×log(2))+1
20

Như vậy, số chữ số của $S + 1 = 2^{64}$ là 20 nên số chữ số của $S = 2^{64} - 1$ cũng là 20 chữ số.

Đáp án B.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Rút gọn và tính giá trị biểu thức lũy thừa, mũ và logarit

Câu 1: Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}\sqrt[5]{a^4}+\left(\sqrt{a}\right)^{2\log_{\sqrt{a}}6}$

A. $P=\frac{182}{5}$ B. $P=\frac{188}{5}$ C. $P=\frac{187}{5}$ D. $P=\frac{186}{5}$

Câu 2: Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}\right)+a^{\log_{\sqrt{a}}4}$

A. $P=\frac{53}{6}$ B. $P=\frac{53}{2}$ C. $P=\frac{53}{16}$ D. $P=\frac{53}{3}$

Câu 3: Cho $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\right)$

A. $P=\frac{15}{8}$ B. $P=\frac{15}{16}$ C. $P=\frac{15}{32}$ D. $P=\frac{15}{4}$

Câu 4: Với $a,b>0$ thì biểu thức $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^{12}}}}{\left(\sqrt[4]{a^3b}\right)^4}$ bằng:

A. $\frac{a}{b}$ B. $\frac{b}{a}$ C. a^5b^{10} C. $\frac{1}{ab}$

Câu 5: Với $a,b>0$ thì biểu thức $\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$

A. $2\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$ B. $2\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$

C. $-\sqrt[4]{b}$ D. $\sqrt[4]{a}$

Câu 6: Biểu thức rút gọn của $\frac{a^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)}{a^{\frac{8}{5}}\left(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[5]{a^{-8}}\right)}$ với $a>0$ là:

A. $a-1$ B. $\frac{1}{a-1}$ C. $a+1$ D. $\frac{1}{a+1}$

Câu 7: Rút gọn $A=\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$ ta được kết quả bằng

A. $2a-b$ B. $a+b$ C. 0 D. 1

Câu 8: Cho $a,b>0; a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}.\log_{\sqrt{b\sqrt{b}}}a^4$

A. $P=\frac{7}{3}$ B. $P=\frac{7}{8}$ C. $P=\frac{7}{4}$ D. $P=\frac{7}{2}$

Câu 9: Cho $a,b>0; a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^{\log_a(\log_b a)}+\log_b\frac{b^{24}}{a}$

A. $P=25$ B. $P=16$ C. $P=24$ D. $P=26$

Câu 10: Cho $a,b>0; a,b\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_b a^{2016}.\frac{1}{\log_b a}+\log a.\log_a 10$

A. $P=2019$ B. $P=2018$

C. $P=2026$ D. $P=2017$

Câu 11: Cho $x>0$ và $\ln x=m$. Khi đó $P=\ln\sqrt{x\sqrt{x}}$ được biểu diễn theo m là:

A. $\frac{m+1}{2}$. B. $\frac{3m}{4}$. C. $\frac{4m}{3}$. D. $\frac{m+1}{4}$.

Câu 12: Cho $\log_3 m=a$ với $0<m\neq 1$. Tính $A=\log_m(27m)$ theo a. Chọn kết quả đúng:

A. $(3-a)a$ B. $(3+a)a$ C. $\frac{3+a}{a}$ D. $\frac{3-a}{a}$

Câu 13: Cho $\log_a x=3, \log_b x=4$ với $a,b>1$. Tính $P=\log_{ab}x$.

A. $P=\frac{7}{12}$ B. $P=\frac{1}{12}$ C. $P=12$ D. $P=\frac{12}{7}$

Câu 14: Cho $\log_a b=\sqrt{13}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\log_{\frac{b}{a}}\sqrt[3]{ab^2}$, chọn kết quả đúng:

A. $\frac{9+\sqrt{13}}{12}$. B. $\frac{9-\sqrt{13}}{12}$. C. $\frac{9+\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{9-\sqrt{13}}{2}$.

Câu 15: Cho $\log_a b=-2$ và $\log_a c=5$. Giá trị của $\log_a\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}$ là:

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{5}{4}$ D. $-\frac{3}{5}$

Câu 16: Cho $\log_a b=5$ và $\log_a c=3$. Giá trị của biểu thức $P=\frac{c^{\log_{\sqrt{c}}\left[\log_{\sqrt{a}}\left(a\sqrt{b}\sqrt[3]{c}\right)\right]}}{9}$ bằng:

A. 9 B. $\frac{1}{9}$ C. 81 D. $\frac{1}{81}$

Câu 17: Tính $\log_{a^2}\sqrt[3]{b^5c^4}$ theo $\log_b a=x$ và $\log_b c=y$:

A. $\frac{5+4y}{6x}$ B. $\frac{20y}{3x}$

C. $\frac{5+3y^4}{3x^2}$ D. $20x+\frac{20y}{3}$

Câu 18: Cho $\log_5 x=\sqrt[3]{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_5 x^3+\log_{\frac{1}{25}}x^4+\log_{25}x^2$

A. $P=\sqrt[3]{5}$ B. $P=2\sqrt[3]{5}$

C. $P=-\sqrt[3]{5}$ D. $P=\sqrt[3]{5}+1$

Câu 19: Cho $\log_{\sqrt{3}}(x+1)=6$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_3(x+1)+\log_3\sqrt{x+1}+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt[3]{x+1}$

A. $P=\frac{13}{4}$ B. $P=\frac{26}{3}$ D. $P=\frac{17}{2}$ D. $P=\frac{11}{3}$

Câu 20: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $4^a=6^b=9^c$. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$

A. $T=1$ B. $T=\frac{3}{2}$ C. $T=2$ D. $T=\frac{5}{2}$

Câu 21: Cho $x,y>1:x^2+9y^2=6xy$. Tính giá trị biểu thức $M=\frac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$

A. $M=\frac{1}{4}$. B. $M=1$. C. $M=\frac{1}{2}$. D. $M=\frac{1}{3}$.

Câu 22: Cho $0<a\neq 1$ và $x>0$. Nếu $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a 9-\log_a 5+\log_a 2$ thì x bằng:

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. 3

Câu 23: Cho $0<a\neq 1$ và $x>0$. Nếu $\log_a x=\frac{1}{2}(\log_a 9-3\log_a 4)$ thì x bằng:

A. $\frac{3}{8}$ B. $\sqrt{2}$ C. 8 D. 16

Câu 24: Cho $a,b,x>0$. Nếu $\log_2 x=5\log_2 a+4\log_2 b$ thì x bằng:

A. a^5b^4 B. a^4b^5 C. $5a+4b$ D. $4a+5b$

Câu 25: Cho $a,b,x>0$. Nếu $\log_7 x=8\log_7(ab^2)-2\log_7(a^3b)$ thì x bằng:

A. a^4b^6 B. a^2b^{14} C. a^6b^{12} D. a^8b^{14}

Dạng 2: Biểu diễn của một giá trị logarit

Câu 26: Cho $\log 5=a$. Tính $\log\frac{1}{64}$ theo a:

A. $2+5a$. B. $1-6a$.
C. $4-3a$. D. $6(a-1)$.

Câu 27: Cho $a=\log_2 3$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2 18+\log_2 21-\log_2 63$ theo a:

A. $2a$. B. $1+a$. C. $1-a$. D. $2-a$.

Câu 28: Cho $a=\log_2 3$; $b=\log_2 5$. Chọn kết quả đúng:

A. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{6}b$.

B. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}b$.

C. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b$.

D. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b$.

Câu 29: Cho $\log_{25}7=a$ và $\log_2 5=b$ thì $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}$ tính theo a,b là:

A. $\frac{12ab-9}{b}$. B. $\frac{12a+9}{a}$.
C. $\frac{12ab+9}{b}$. D. $\frac{12ab+9}{a}$.

Câu 30: Cho $\log_{30}3=a$ và $\log_{30}5=b$ thì $\log_{30}1350$ tính theo a,b là:

A. $2a+b+2$. B. $a+2b+1$.
C. $2a+b+1$. D. $a+2b+2$.

Câu 31: Cho $\log_{49}11=a$ và $\log_2 7=b$ thì $\log_{\sqrt[3]{7}}\frac{121}{8}$ tính theo a,b là:

A. $12a+\frac{9}{b}$. B. $12b+\frac{9}{a}$. C. $12a-\frac{9}{b}$. D. $12b-\frac{9}{a}$.

Câu 32: Đặt $a=\log_{31}7, b=\log_7 13$. Chọn biểu diễn đúng của $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)$ theo a và b

A. $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)=\frac{ab+a+1}{2a}$

B. $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)=\frac{ab+a-1}{2a}$

C. $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)=\frac{a+b+1}{2a}$

D. $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)=\frac{ab-a+1}{2a}$

Câu 33: Cho $\ln 2=a$ và $\ln 3=b$. Giá trị của $B=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{6911}{6912}$ theo a và b bằng:

A. $-8a-3b$. B. $8a+3b$. C. $8a-3b$. D. $-8a+3b$.

Câu 34: Đặt $a=\log_2 3, b=\log_2 5, c=\log_2 7$. Biểu diễn $\log_{60}1050$ theo a,b:

A. $\log_{60}1050=\frac{1+a+2b+c}{1+2a+b}$.

B. $\log_{60}1050=\frac{1+a+2b+c}{2+a+b}$.

C. $\log_{60}1050=\frac{1+a+b+2c}{1+2a+b}$.

D. $\log_{60}1050=\frac{1+2a+b+c}{2+a+b}$.

Câu 35: Đặt $a=\log_2 3, b=\log_3 5, c=\log_7 2$. Biểu diễn $\log_{140}63$ theo a,b,c:

A. $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$. B. $\frac{2ac+1}{abc+2c-1}$.
C. $\frac{2ac-1}{abc+2c+1}$. D. $\frac{2ac+1}{abc-2c+1}$.

Dạng 3: Xét tính đúng – sai của một mệnh đề chứa mũ và logarit

Câu 36: Với mọi số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+9b^2=10ab$ thì đẳng thức **đúng** là:

A. $\log(a+3b)=\log a+\log b$

B. $\log(a+1)+\log b=1$

C. $2\log(a+3b)=\log a+\log b$

D. $\log\frac{a+3b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$

Câu 37: Cho $a>0,b>0$ và $a^2+b^2=1598ab$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\log\frac{a+b}{40}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

B. $\log\frac{a+b}{40}=\log a+\log b$

C. $\log\frac{a+b}{40}=\frac{1}{4}(\log a+\log b)$

D. $\log\frac{a+b}{40}=2(\log a+\log b)$

Câu 38: Cho $a>0,b>0$ và $a^2+b^2=23ab$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\log\left(\frac{a+b}{5}\right)=\log_5 a+\log_5 b$

B. $\log\left(\frac{a+b}{5}\right)=\frac{1}{2}(\log_5 a+\log_5 b)$

C. $\log_5\left(\frac{a+b}{5}\right)=\log_5 a+\log_5 b$

D. $\log_5\left(\frac{a+b}{5}\right)=\frac{1}{2}(\log_5 a+\log_5 b)$

Câu 39: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=34ab$. Mệnh đề **đúng** là

A. $\log_6(a+b)=1+\log_{36}a+\log_{36}b$

B. $\log_6\left(\frac{a+b}{6}\right)=\log_6 a+\log_6 b$

C. $2\log_6(a+b)=\log_6 a+\log_6 b$

D. $\log_6\left(\frac{a+b}{6}\right)=2(\log_6 a+\log_6 b)$

Câu 40: Xét các mệnh đề

$(\text{I}).\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$ $(\text{II}).\ 4^{\sqrt{5}}<4^{2,23}$

Mệnh đề nào **đúng**?

A. Cả (I) và (II) đều sai

B. (I) sai, (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng

D. (I) đúng, (II) sai

Câu 41: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b\frac{3}{4}<\log_b\frac{4}{5}$ thì

A. $0<a<1,b>1$ B. $0<a<1,0<b<1$

C. $1<a,b>1$ C. $1<a,0<b<1$

Câu 42: Nếu $a^{\frac{13}{7}}<a^{\frac{15}{8}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)>\log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$ thì

A. $a>1,b>1$ B. $0<a<1,b>1$

C. $a>1,0<b<1$ D. $0<a<1,0<b<1$

Câu 43: Tìm điều kiện để các số a,b để $a^{\sqrt{7}}<a^{\sqrt{6}}$ và $\log_b 3<\log_b 4$

A. $a>1,0<b<1$ B. $a>1,b>1$

C. $0<a<1,b>1$ D. $0<a<1,0<b<1$

Câu 44: Cho a,b là các số thực dương và $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=2+2\log_a(a+b)$

B. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=4\log_a(a+b)$

C. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=1+4\log_a b$

D. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=4+2\log_a b$

Câu 45: Cho các số dương a,b,c và $a\neq 1$. Khẳng định nào **đúng**?

A. $\log_a b+\log_a c=\log(b+c)$

B. $\log_a b+\log_a c=\log_a|b-c|$

C. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$

D. $\log_a b+\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

Dạng 4: Tìm số chữ số của một lũy thừa

Câu 46: So sánh nào sau đây là **đúng**?

A. $5^{7123}>7^{5864}$ B. $5^{7123}<7^{5864}$

C. $3^{400}<2^{500}$ D. $4^{1700}>9^{1200}$

Câu 47: Người ta quy ước $\lg x$ và $\log x$ là giá trị của $\log_{10}x$. Trong các lĩnh vực kỹ thuật, $\log x$ được sử dụng khá nhiều, kể cả máy tính cầm tay hay quang phổ. Hơn nữa, trong toán học, người ta sử dụng $\log x$ để tìm số chữ số của một số nguyên dương nào đó. Ví dụ số A có n chữ số thì khi đó $n=[\log A]+1$ với $[\log A]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá A. Hỏi số $M=2017^{2017}$ có bao nhiêu chữ số?

A. 9999   B. 6666   C. 9966   D. 6699

Câu 48: Cho tổng $M=C_{2020}^0+C_{2020}^1+C_{2020}^2+...+C_{2020}^{2020}$. Khi viết M dưới dạng một số trong hệ thập phân thì số này có bao nhiêu chữ số?

A. 608   B. 609   C. 610   D. 611

Câu 49: Gọi m là số chữ số cần dùng khi viết số 2^{30} trong hệ thập phân và n là số chữ số cần dùng khi viết số 30^2 trong hệ nhị phân. Ta có tổng $m+n$ là

A. 18   B. 20   C. 19   D. 21

Câu 50: Cho a,b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b=10$ và $a^{12}b^{2016}$ là một số tự nhiên có 973 chữ số. Cặp $(a;b)$ thỏa mãn bài toán là

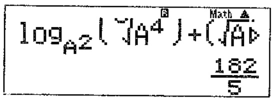
A. $(5;5)$ B. $(6;4)$ D. $(8;2)$ D. $(7;3)$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức lũy thừa, mũ và logarit

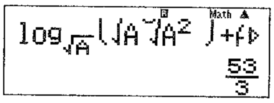
Câu 1: Đáp án A.

Nhập vào máy $\log_{A^2}\left(\sqrt[5]{A^4}\right)+\left(\sqrt{A}\right)^{2\log_{\sqrt{A}}(6)}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả $\frac{182}{5}$.



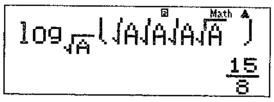
Câu 2: Đáp án D.

Nhập vào máy $P=\log_{\sqrt{A}}\left(\sqrt{A\sqrt[3]{A^2}}\right)+A^{\log_{\sqrt{A}}(4)}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả $\frac{53}{3}$.



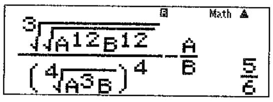
Câu 3: Đáp án A.

Nhập vào máy $\log_{\sqrt{A}}\left(\sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A}}}}\right)$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{15}{8}$.



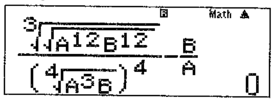
Câu 4: Đáp án B.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{A^{12}B^{12}}}}{\left(\sqrt[4]{A^3B}\right)^4}-\frac{A}{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{5}{6}\neq 0$. Loại A.

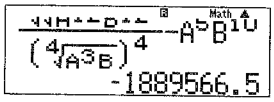


– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{A^{12}B^{12}}}}{\left(\sqrt[4]{A^3B}\right)^4}-\frac{B}{A}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả 0.

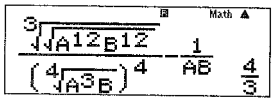
Dùng CALC với một vài giá trị A,B khác ta đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{A^{12}B^{12}}}}{\left(\sqrt[4]{A^3B}\right)^4}-A^5B^{10}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1889566,5\neq 0$. Loại C.



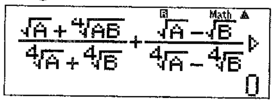
– *Phương án D:* Nhập vào máy $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{A^{12}B^{12}}}}{\left(\sqrt[4]{A^3B}\right)^4}-\frac{1}{AB}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{4}{3}\neq 0$. Loại D.



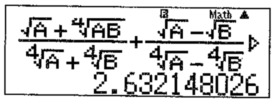
Câu 5: Đáp án A.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{\sqrt{A}+\sqrt[4]{AB}}{\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}}+\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}-2\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0.

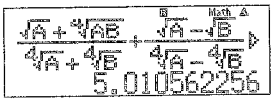
Dùng CALC với một vài giá trị A,B khác ta đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



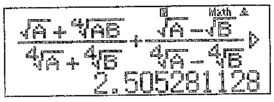
– *Phương án B:* Nhập $\frac{\sqrt{A}+\sqrt[4]{AB}}{\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}}+\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}-2\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 $(B=3)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2,632148026\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt[4]{AB}}{\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}}+\dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}+\sqrt[4]{B}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5,010562256 \neq 0$.

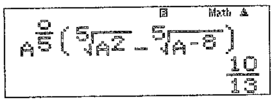


– *Phương án D:* Nhập $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt[4]{AB}}{\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}}+\dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}-\sqrt[4]{A}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,505281128 \neq 0$.



Câu 6: Đáp án B.

Nhập vào máy $\dfrac{A^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A^{-1}}\right)}{A^{\frac{8}{5}}\left(\sqrt[5]{A^2}-\sqrt[5]{A^{-8}}\right)}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [3] $(A=2,3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\dfrac{10}{13}$.



– *Phương án A:* Với $A=2,3 \rightarrow A-1=\dfrac{13}{10}\neq\dfrac{10}{13}$.

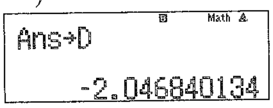
– *Phương án B:* Với $A=2,3 \rightarrow \dfrac{1}{A-1}=\dfrac{1}{1,3}=\dfrac{10}{13}$.

– *Phương án C:* Với $A=2,3 \rightarrow A+1=\dfrac{33}{10}\neq\dfrac{10}{13}$.

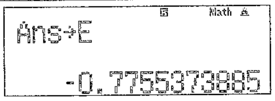
– *Phương án D:* Với $A=3 \rightarrow \dfrac{1}{A+1}=\dfrac{10}{33}\neq\dfrac{10}{13}$.

Câu 7: Đáp án C.

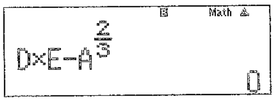
Nhập vào máy $\dfrac{A^{\frac{4}{3}}-8A^{\frac{1}{3}}B}{A^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{AB}+4B^{\frac{2}{3}}}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-2,046840134$ gán vào biến nhớ D $(Ans \rightarrow D)$.



Nhập vào máy $\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{B}{A}}\right)^{-1}$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-0,7755373885$ gán vào biến nhớ E $(Ans \rightarrow E)$.



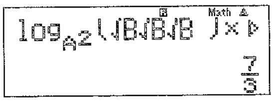
Nhập vào máy $D\times E-A^{\frac{2}{3}}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.



Ta không thể nhập hết vào màn hình máy tính biểu thức $\dfrac{A^{\frac{4}{3}}-8A^{\frac{1}{3}}B}{A^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{AB}+4B^{\frac{2}{3}}}\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{B}{A}}\right)^{-1}-A^{\frac{2}{3}}$ vì vượt quá số kí tự có thể nhập vào máy. Vậy, nên nhập vào từng biểu thức $\dfrac{A^{\frac{4}{3}}-8A^{\frac{1}{3}}B}{A^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{AB}+4B^{\frac{2}{3}}}$ và $\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{B}{A}}\right)^{-1}$. Sau đó CALC với $A=2, B=3$ rồi lần lượt gán các kết quả vào biến nhớ D, E. Khi đó giá trị của biểu thức cần rút gọn (khi $A=2, B=3$) là $D\times E-A^{\frac{2}{3}}$.

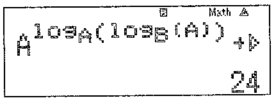
Câu 8: Đáp án A.

Nhập vào máy $\log_{A^2}\left(\sqrt{B\sqrt{B\sqrt{B}}}\right)\times\log_{\sqrt{B\sqrt{B}}}\left(A^4\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\dfrac{7}{3}$.



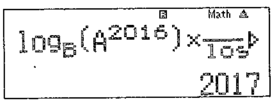
Câu 9: Đáp án C.

Nhập vào máy $A^{\log_A(\log_B(A))}+\log_B\left(\dfrac{B^{24}}{A}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 24.



Câu 10: Đáp án D.

Nhập $\log_B\left(A^{2016}\right)\times\dfrac{1}{\log_B(A)}+\log(A)\times\log_A(10)$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [3] $(B=3)$. Ấn [=], máy hỏi A? Ấn [1] [.] [1] $(A=1,1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả 2017.



Câu 11: Đáp án B.

Chọn $m=2,5\to x=e^{2,5}$. Gán $2,5\to \mathrm{M}$ và $e^{2,5}\to \mathrm{X}$.

```
2.5→M                 5/2
```

```
e^2.5→X       12.18249396
```

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\ln\left(\sqrt{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\right)-\dfrac{\mathrm{M}+1}{2}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $\dfrac{1}{8}\neq 0$. Loại A.

```
ln(√(X√X))-(M+1)/2    1/8
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\ln\left(\sqrt{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\right)-\dfrac{3\mathrm{M}}{4}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

```
ln(√(X√X))-3M/4       0
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\ln\left(\sqrt{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\right)-\dfrac{4\mathrm{M}}{3}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{35}{24}\neq 0$. Loại C.

```
ln(√(X√X))-4M/3       -35/24
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\ln\left(\sqrt{\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\right)-\dfrac{\mathrm{M}+1}{4}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $1\neq 0$. Loại D.

```
ln(√(X√X))-(M+1)/4    1
```

Câu 12: Đáp án C.

Chọn $a=2,5\to m=3^{2,5}$. Gán $2,5\to \mathrm{A}$ và $3^{2,5}\to \mathrm{M}$

```
2.5→A                 5/2
```

```
3^2.5→M       15.58845727
```

– *Phương án A:* Nhập $\log_{\mathrm{M}}(27\mathrm{M})-\mathrm{A}(3-\mathrm{A})$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $\dfrac{19}{20}\neq 0$. Loại A.

```
log_M(27M)-A(3-A)     19/20
```

– *Phương án B:* Nhập $\log_{\mathrm{M}}(27\mathrm{M})-\mathrm{A}(3+\mathrm{A})$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{231}{20}\neq 0$. Loại B.

```
log_M(27M)-A(3+A)     -231/20
```

– *Phương án C:* Nhập $\log_{\mathrm{M}}(27\mathrm{M})-\dfrac{3+\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

```
log_M(27M)-(3+A)/A    0
```

– *Phương án D:* Nhập $\log_{\mathrm{M}}(27\mathrm{M})-\dfrac{3-\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $2\neq 0$. Loại D.

```
log_M(27M)-(3-A)/A    2
```

Câu 13: Đáp án D.

Từ $\log_a x=3,\log_b x=4\to x=a^3=b^4$.

Chọn $x=2,5\to a=\sqrt[3]{2,5}$ và $b=\sqrt[4]{2,5}$. Gán $2,5\to \mathrm{X}$, $\sqrt[3]{2,5}\to \mathrm{A}$ và $\sqrt[4]{2,5}\to \mathrm{B}$.

Nhập vào máy $\log_{\mathrm{AB}}(\mathrm{X})$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $\dfrac{12}{7}$.

```
log_AB(X)             12/7
```

Câu 14: Đáp án A.

Từ $\log_a b=\sqrt{13}\to b=a^{\sqrt{13}}$. Chọn $a=2,5\to b=2,5^{\sqrt{13}}$

Gán $2,5\to \mathrm{A}$ và $2,5^{\sqrt{13}}\to \mathrm{B}$.

```
2.5→A                 5/2
```

```
2.5^√13→B     27.21404545
```

– *Phương án A:* Nhập $\log_{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}\left(\sqrt[3]{\mathrm{AB}^2}\right)-\dfrac{9+\sqrt{13}}{12}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

```
log_(B/A)(∛(AB²))-(9+√13)/12    0
```

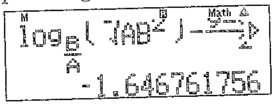
– *Phương án B:* Nhập $\log_{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}\left(\sqrt[3]{\mathrm{AB}^2}\right)-\dfrac{9-\sqrt{13}}{12}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0,6...\neq 0$. Loại B.

```
log_(B/A)(∛(AB²))-(9-√13)/12    0.6009252126
```

– *Phương án C:* Nhập $\log_{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}\left(\sqrt[3]{\mathrm{AB}^2}\right)-\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-5,25...\neq 0$. Loại C.

```
log_(B/A)(∛(AB²))-(9+√13)/2     -5.252313031
```

– *Phương án D:* Nhập $\log_{\frac{B}{A}}\left(\sqrt[3]{AB^2}\right)-\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,64...\neq 0$. Loại D.

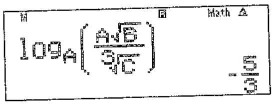


Câu 15: Đáp án B.

Từ $\log_a b=-2$, $\log_a c=5\to b=a^{-2}$ và $c=a^5$.

Chọn $a=2,5\to b=2,5^{-2}$ và $c=2,5^5$. Gán $2,5\to A$, $2,5^{-2}\to B$ và $2,5^5\to C$.

Nhập vào máy $\log_A\left(\dfrac{A\sqrt{B}}{\sqrt[3]{C}}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{5}{3}$.

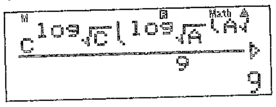


Câu 16: Đáp án A.

Từ $\log_a b=5$, $\log_a c=3\to b=a^5$ và $c=a^3$.

Chọn $a=2,5\to b=2,5^5$ và $c=2,5^3$. Gán $2,5\to A$, $2,5^5\to B$ và $2,5^3\to C$.

Nhập vào máy $\dfrac{C^{\log_{\sqrt{C}}\left(\log_{\sqrt{A}}\left(A\sqrt{B}\sqrt[3]{C}\right)\right)}}{9}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 9.

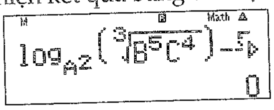


Câu 17: Đáp án A.

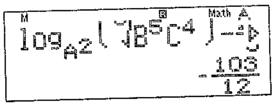
Từ $\log_b a=x$, $\log_b c=y\to a=b^x$ và $c=b^y$.

Chọn $b=2,5; x=2$ và $y=3$. Khi đó $a=2,5^2$ và $c=2,5^3$. Gán $2,5^2\to A$, $2,5\to B$, $2,5^3\to C$ và $2\to X$, $3\to Y$.

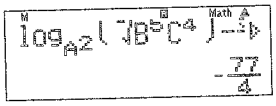
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\log_{A^2}\left(\sqrt[3]{B^5C^4}\right)-\dfrac{5+4Y}{6X}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



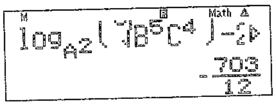
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\log_{A^2}\left(\sqrt[3]{B^5C^4}\right)-\dfrac{20Y}{3X}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{103}{12}\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\log_{A^2}\left(\sqrt[3]{B^5C^4}\right)-\dfrac{5+3Y^4}{3X^2}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{77}{4}\neq 0$. Loại C.

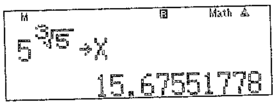


– *Phương án D:* Nhập $\log_{A^2}\left(\sqrt[3]{B^5C^4}\right)-20X-\dfrac{20Y}{3}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\dfrac{703}{12}\neq 0$. Loại D.

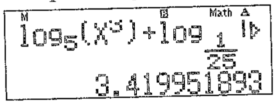


Câu 18: Đáp án B.

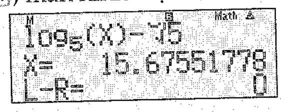
Từ $\log_5 x=\sqrt[3]{5}\to x=5^{\sqrt[3]{5}}$. Gán $5^{\sqrt[3]{5}}\to X$.



Nhập vào máy $\log_5\left(X^3\right)+\log_{\frac{1}{25}}\left(X^4\right)+\log_{25}\left(X^2\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $3,419951893=2\sqrt[3]{5}$.



Để tìm x thỏa mãn $\log_5 x=\sqrt[3]{5}$ ta cũng có thể dùng lệnh SOLVE để giải phương trình. Nhập vào máy $\log_5(X)-\sqrt[3]{5}$. Ấn [SHIFT] [CALC], máy hỏi Solve for X, nhập [1] [0]. Ấn [=], màn hình hiện như sau:

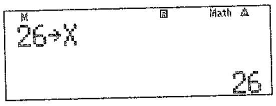


Vậy ta tìm được $x=15,67551778$. Gán giá trị này vào X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] (Ans → X).

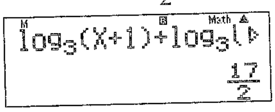
Câu 19: Đáp án C.

Từ $\log_{\sqrt{3}}(x+1)=6\to x+1=\left(\sqrt{3}\right)^6=27\to x=26$.

Gán $26\to X$.



Nhập $\log_3(X+1)+\log_3\left(\sqrt{X+1}\right)+\log_{\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[3]{X+1}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{17}{2}$.

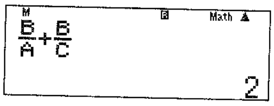


Câu 20: Đáp án C.

Từ $4^a = 6^b = 9^c = t \rightarrow \begin{cases} a = \log_4 t \\ b = \log_6 t \\ c = \log_9 t \end{cases}$.

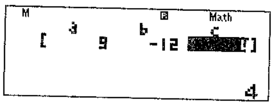
Chọn $t = 2,5$ thì $a = \log_4 2,5$; $b = \log_6 2,5$ và $c = \log_9 2,5$. Gán $\log_4(2,5) \rightarrow A$, $\log_6(2,5) \rightarrow B$ và $\log_9(2,5) \rightarrow C$.

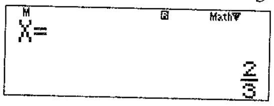
Nhập vào máy $\frac{B}{A} + \frac{B}{C}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2.



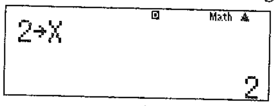
Câu 21: Đáp án B.

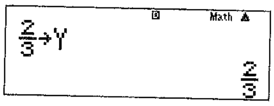
Chọn $x = 2 \rightarrow 9y^2 - 12y + 4 = 0$. Ấn [MODE] [5] (EQN) [3] để giải phương trình bậc hai. Nhập vào các hệ số $(a = 9, b = -12, c = 4)$. Ấn [=], ta được nghiệm $X = \frac{2}{3}$.



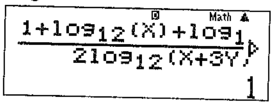


$\rightarrow y = \frac{2}{3}$. Gán $2 \rightarrow X$ và $\frac{2}{3} \rightarrow Y$.





Nhập vào máy $\frac{1 + \log_{12}(X) + \log_{12}(Y)}{2\log_{12}(X + 3Y)}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1.

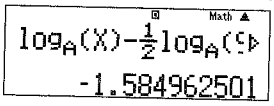


Câu 22: Đáp án C.

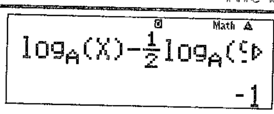
Chọn $a = 2$. Nhập vào máy:

$\log_A(X) - \frac{1}{2}\log_A(9) + \log_A(5) - \log_A(2)$.

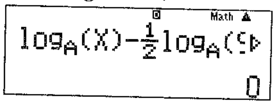
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [2] [▭/▭] [5] $\left(X = \frac{2}{5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,58... \neq 0$. Loại A.



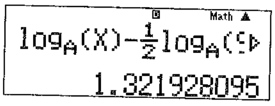
– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [3] [▭/▭] [5] $\left(X = \frac{3}{5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [6] [▭/▭] [5] $\left(X = \frac{6}{5}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



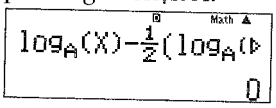
– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [3] $(X = 3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,32... \neq 0$. Loại D.



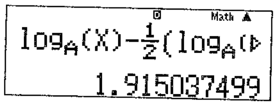
Câu 23: Đáp án A.

Chọn $a = 2$. Nhập $\log_A(X) - \frac{1}{2}(\log_A(9) - 3\log_A(4))$.

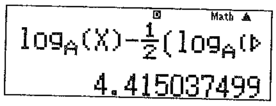
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [3] [▭/▭] [8] $\left(X = \frac{3}{8}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



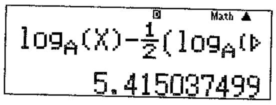
– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [√▭] [2] $(X = \sqrt{2})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,91... \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [8] $(X = 8)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,41... \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] $(A = 2)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [1] [6] $(X = 16)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5,41... \neq 0$. Loại D.



Câu 24: Đáp án A.

Chọn $a=2,5$ và $b=3,5$.

Nhập vào máy $\log_2(X)-5\log_2(A)-4\log_2(B)$.

– *Phương án A:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 5 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 4 ▷ $\left(X=A^5\times B^4\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

```
log2(X)-5log2(A▶
                0
```

– *Phương án B:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 4 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 5 ▷ $\left(X=A^4\times B^5\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,48...\neq 0$. Loại B.

```
log2(X)-5log2(A▶
     0.4854268272
```

– *Phương án C:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 5 ALPHA (−) + 4 ALPHA ∘'" $(X=5A+4B)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-9,11...\neq 0$. Loại C.

```
log2(X)-5log2(A▶
     -9.111139708
```

– *Phương án D:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 4 ALPHA (−) + 5 ALPHA ∘'" $(X=4A+5B)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-9,05...\neq 0$. Loại D.

```
log2(X)-5log2(A▶
     -9.057700449
```

Câu 25: Đáp án B.

Chọn $a=2,5$ và $b=3,5$.

Nhập vào máy $\log_7(X)-8\log_7\left(AB^2\right)+2\log_7\left(A^3B\right)$.

– *Phương án A:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 4 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 6 ▷ $\left(X=A^4\times B^6\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-4,20...\neq 0$. Loại A.

```
log7(X)-8log7(A▶
     -4.208581927
```

– *Phương án B:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 2 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 1 4 ▷ $\left(X=A^2\times B^{14}\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

```
log7(X)-8log7(A▶
                0
```

– *Phương án C:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 6 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 1 2 ▷ $\left(X=A^6\times B^{12}\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,59...\neq 0$. Loại C.

```
log7(X)-8log7(A▶
     0.5959355272
```

– *Phương án D:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn ALPHA (−) $x^{■}$ 8 ▷ × ALPHA ∘'" $x^{■}$ 1 4 ▷ $\left(X=A^8\times B^{14}\right)$. Ấn =, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 3 . 5 $(B=3,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2,82...\neq 0$. Loại D.

```
log7(X)-8log7(A▶
      2.825281729
```

Dạng 2: Biểu diễn của một giá trị logarit

Câu 26: Đáp án D.

Gán $\log 5\to A$.

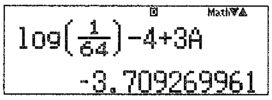
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\log\left(\dfrac{1}{64}\right)-2-5A$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-7,301029996\neq 0$. Loại A.

```
log(1/64)-2-5A
     -7.301029996
```

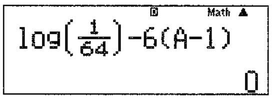
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\log\left(\dfrac{1}{64}\right)-1+6A$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $1,387640052\neq 0$. Loại B.

```
log(1/64)-1+6A
      1.387640052
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\log\left(\dfrac{1}{64}\right)-4+3A$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-3,709269961\neq 0$. Loại C.



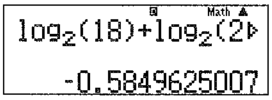
– *Phương án D:* Nhập vào máy $\log\left(\frac{1}{64}\right)-6\left(A-1\right)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.



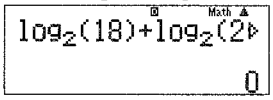
Câu 27: Đáp án B.

Gán $\log_2 3 \to A$.

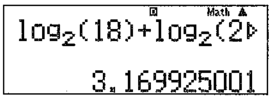
– *Phương án A:* Nhập $\log_2 18+\log_2 21-\log_2 63-2A$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-0,5849625007\neq 0$. Loại A.



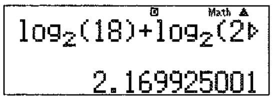
– *Phương án B:* Nhập $\log_2 18+\log_2 21-\log_2 63-1-A$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập $\log_2 18+\log_2 21-\log_2 63-1+A$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $3,169925001\neq 0$ Loại C.



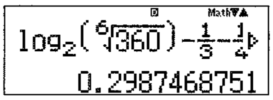
– *Phương án D:* Nhập $\log_2 18+\log_2 21-\log_2 63-2+A$. Ấn ⊟, màn hình hiện kết quả bằng $2,169925001\neq 0$. Loại D.



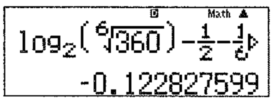
Câu 28: Đáp án C.

Gán $\log_2\left(3\right)\to A$ và gán $\log_2\left(5\right)\to B$.

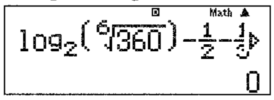
– *Phương án A:* Nhập $\log_2\left(\sqrt[6]{360}\right)-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}A-\frac{1}{6}B$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0,2987468751\neq 0$. Loại A.



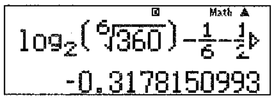
– *Phương án B:* Nhập $\log_2\left(\sqrt[6]{360}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}A-\frac{1}{3}B$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-0,122827599\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\log_2\left(\sqrt[6]{360}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}A-\frac{1}{6}B$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



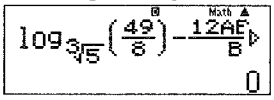
– *Phương án D:* Nhập $\log_2\sqrt[6]{360}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}A-\frac{1}{3}B$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-0,3178150993\neq 0$. Loại D.



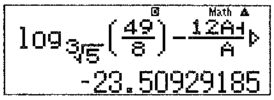
Câu 29: Đáp án A.

Gán $\log_{25}\left(7\right)\to A$ và gán $\log_2\left(5\right)\to B$.

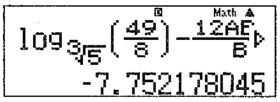
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}-\frac{12AB-9}{B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



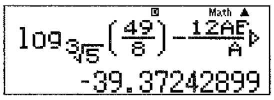
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}-\frac{12A+9}{A}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-23,50929185\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}-\frac{12AB+9}{B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-7,752178045\neq 0$. Loại C.



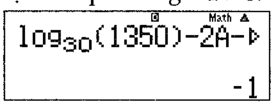
– *Phương án D:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{5}}\frac{49}{8}-\frac{12AB+9}{A}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-39,37242899\neq 0$. Loại D.



Câu 30: Đáp án C.

Gán $\log_{30}\left(3\right)\to A$ và gán $\log_{30}\left(5\right)\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\log_{30}1350-2A-B-2$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-1\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\log_{30}1350-A-2B-1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-0,150189938\neq 0$. Loại B.

```
log30(1350)-A-2▷
      -0.150189938
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\log_{30}1350-2A-B-1$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

```
log30(1350)-2A-▷
                0
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\log_{30}1350-A-2B-2$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả $-1,150189938\neq 0$. Loại D.

```
log30(1350)-A-2▷
      -1.150189938
```

Câu 31: Đáp án C.

Gán $\log_{49}11\to A$ và gán $\log_2 7\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{7}}\frac{121}{8}-12A-\frac{9}{B}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng $-6,411729368\neq 0$. Loại A.

```
log3√7(121/8)-12A▷
      -6.411729368
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{7}}\frac{121}{8}-12B-\frac{9}{A}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng $-44,10761345\neq 0$. Loại B.

```
log3√7(121/8)-12B▷
      -44.10761345
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{7}}\frac{121}{8}-12A+\frac{9}{B}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

```
log3√7(121/8)-12A▷
                 0
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\log_{\sqrt[3]{7}}\frac{121}{8}-12B+\frac{9}{A}$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả $-14,89334118\neq 0$. Loại D.

```
log3√7(121/8)-12B▷
      -14.89334118
```

Câu 32: Đáp án D.

Gán $\log_{31}7\to A$ và gán $\log_7 13\to B$.

– *Phương án A:* Nhập $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)-\frac{AB+A+1}{2A}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng $-1\neq 0$. Loại A.

```
log49(403/7)-(AB+1)/2A▷
                -1
```

– *Phương án B:* Nhập $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)-\frac{AB+A-1}{2A}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng $0,7647203321\neq 0$. Loại B.

```
log49(403/7)-(AB+1)/2A▷
      0.7647203321
```

– *Phương án C:* Nhập $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)-\frac{A+B+1}{2A}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng $-1,503997814\neq 0$. Loại C.

```
log49(403/7)-(A+B)/2A▷
      -1.503997814
```

– *Phương án D:* Nhập $\log_{49}\left(\frac{403}{7}\right)-\frac{AB-A+1}{2A}$. Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

```
log49(403/7)-(AB-1)/2A▷
                 0
```

Câu 33: Đáp án A.

Ta có $B=(\ln1-\ln2)+(\ln2-\ln3)+(\ln3-\ln4)+...+(\ln6911-\ln6912)=\ln1-\ln6912=-\ln6912$.

Gán $\ln2\to A$ và gán $\ln3\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào máy $-\ln(6912)+8A+3B$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

```
-ln(6912)+8A+3B
                 0
```

– *Phương án B:* Nhập vào máy $-\ln(6912)-8A-3B$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả $-1768202862\neq 0$. Loại B.

```
-ln(6912)-8A-3B
      -17.68202862
```

– *Phương án C:* Nhập vào máy $-\ln(6912)-8A+3B$.

Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả $-11,09035489\neq 0$. Loại C.

```
-ln(6912)-8A+3B
      -11.09035489
```

– *Phương án D:* Nhập vào máy $-\ln(6912)+8A-3B$.

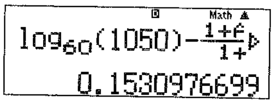
Ấn $\boxed{=}$, máy hiện kết quả $-6,591673732\neq 0$. Loại D.

```
-ln(6912)+8A-3B
      -6.591673732
```

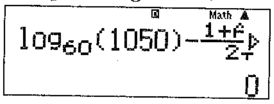
Câu 34: Đáp án B.

Gán $\log_2 3\to A$, gán $\log_2 5\to B$ và gán $\log_2 7\to C$.

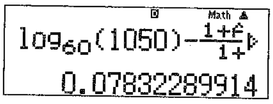
– *Phương án A:* Nhập $\log_{60}(1050)-\dfrac{1+A+2B+C}{1+2A+B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0{,}1530976699\neq 0$. Loại A.



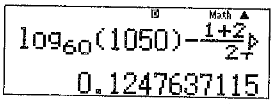
– Phương án B: Nhập $\log_{60}(1050)-\dfrac{1+A+2B+C}{2+A+B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập $\log_{60}(1050)-\dfrac{1+A+B+2C}{1+2A+B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0{,}07832289914\neq 0$. Loại C.



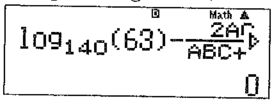
– *Phương án D:* Nhập $\log_{60}(1050)-\dfrac{1+2A+B+C}{2+A+B}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0{,}1247637115\neq 0$. Loại D.



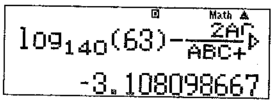
Câu 35: Đáp án A.

Gán $\log_2(3)\to A$, $\log_3(5)\to B$ và gán $\log_7(2)\to C$.

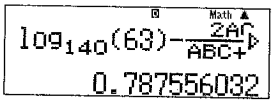
– *Phương án A:* Nhập $\log_{140}(63)-\dfrac{2AC+1}{ABC+2C+1}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



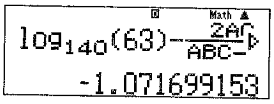
– *Phương án B:* Nhập $\log_{140}(63)-\dfrac{2AC+1}{ABC+2C-1}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-3{,}108098667\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\log_{140}(63)-\dfrac{2AC-1}{ABC+2C+1}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $0{,}787556032\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\log_{140}(63)-\dfrac{2AC+1}{ABC-2C+1}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-1{,}071699153\neq 0$. Loại D.



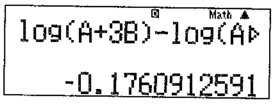
Dạng 3: Xét tính đúng – sai của một mệnh đề chứa mũ và logarit

Câu 36: Đáp án D.

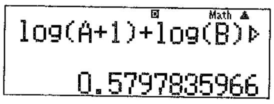
Chọn $b=2\to a^2-20a+36=0$. Ấn MODE 5 (EQN) 3 để giải phương trình bậc hai. Ta tìm được hai nghiệm là $a=18$ và $a=2$.

Ta chọn $a=18$ và gán $18\to A$, gán $2\to B$.

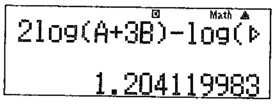
– *Phương án A:* Nhập $\log(A+3B)-\log(A)-\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-0{,}17...\neq 0$. Vậy A sai.



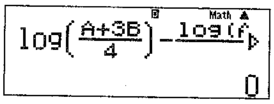
– *Phương án B:* Nhập $\log(A+1)+\log(B)-1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0{,}57...\neq 0$. Vậy B sai.



– *Phương án C:* Nhập $2\log(A+3B)-\log(A)-\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $1{,}20...\neq 0$. Vậy C sai.

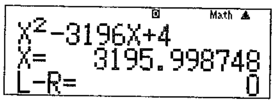


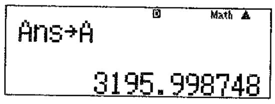
– *Phương án D:* Nhập $\log\left(\dfrac{A+3B}{4}\right)-\dfrac{\log(A)+\log(B)}{2}$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy D đúng.



Câu 37: Đáp án A.

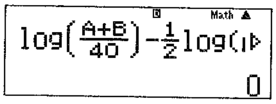
Chọn $b=2\to a^2-3196a+4=0$. Sử dụng lệnh SOLVE để giải phương trình này, ta tìm được một nghiệm là $a=3195{,}998748...$ (nghiệm còn lại không cần thiết phải tìm). Gán nghiệm đó vào A $(Ans\to A)$.





Gán $2\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\log\left(\dfrac{A+B}{40}\right)-\dfrac{1}{2}\log(A)-\dfrac{1}{2}\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy A đúng.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\log\left(\frac{A+B}{40}\right)-\log(A)-\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $-1,90...\neq 0$. Vậy B sai.

```
log(A+B/40)-log(A:▷
        -1.902818298
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\log\left(\frac{A+B}{40}\right)-\frac{1}{4}\log(A)-\frac{1}{4}\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $0,95...\neq 0$. Vậy C sai.

```
log(A+B/40)-1/4log(▷
        0.9514091491
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\log\left(\frac{A+B}{40}\right)-2\log(A)-2\log(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-5,70...\neq 0$. Vậy D sai.

```
log(A+B/40)-2log(▷
        -5.708454894
```

Để giải phương trình $a^2-3196a+4=0$ ta cũng có thể sử dụng tính năng MODE 5 (EQN) 3 và xác định được hai nghiệm như sau:

```
X1=                    X2=
     3195.998748            1.251564946×10^-3
```

Tuy nhiên, khi về phương thức COMP để thực hiện các bước tiếp theo, ta không thể gán một trong hai nghiệm (X_1, X_2) đó vào A một cách chính xác nhất. Nếu ta gán giá trị $3195,998748\to A$ thì chắc chắn trong các bước thử tiếp theo, đáp án thu được sẽ có sai số nhất định (thường là rất nhỏ).

Câu 38: Đáp án D.

Chọn $b=2\to a^2-46b+4=0$. Sử dụng lệnh SOLVE để giải phương trình này, ta tìm được một nghiệm là $a=45,91287847...$ và gán vào A $(Ans\to A)$.

```
X²-46X+4               Ans→A
X=   45.91287847
L-R=           0            45.91287847
```

Gán $2\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\log\left(\frac{A+B}{5}\right)-\log_5(A)-\log_5(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-1,82...\neq 0$. Vậy A sai.

```
log(A+B/5)-log5(▷
        -1.82688506
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\log\left(\frac{A+B}{5}\right)-\frac{1}{2}(\log_5(A)+\log_5(B))$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-0,42...\neq 0$. Vậy B sai.

```
log(A+B/5)-1/2(log▷
        -0.4227014009
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\log_5\left(\frac{A+B}{5}\right)-\log_5(A)-\log_5(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả $-1,40...\neq 0$. Vậy C sai.

```
log5(A+B/5)-log5(▷
        -1.404183659
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\log_5\left(\frac{A+B}{5}\right)-\frac{1}{2}(\log_5(A)+\log_5(B))$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy D đúng.

```
log5(A+B/5)-1/2(lo▷
                   0
```

Khi dùng lệnh SOLVE để giải phương trình $a^2-46b+4=0$, một số máy tính sẽ hiển thị nghiệm $a=0,0871215252$ trước. Ta cũng có thể chọn nghiệm này gán vào A bởi vì nó cũng thỏa mãn giả thiết bài toán.

```
X²-46X+4
X=   0.0871215252
L-R=           0
```

Câu 39: Đáp án A.

Chọn $b=2\to a^2-68a+4=0$. Sử dụng lệnh SOLVE để giải phương trình này, ta tìm được một nghiệm là $a=0,058874503...$ và gán vào A $(Ans\to A)$.

```
X²-68X+4               Ans→A
X=   0.058874503
L-R=           0            0.05887450305
```

Gán $2\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\log_6(A+B)-1-\log_{36}(A)-\log_{36}(B)$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 0. Vậy A đúng.

```
log6(A+B)-1-log▷
                   0
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\log_6\left(\frac{A+B}{6}\right)-\log_6(A)-\log_6(B)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,59...\neq 0$. Vậy B sai.

```
log6((A+B)/6)-log6(▶
        0.5969551225
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $2\log_6(A+B)-\log_6(A)-\log_6(B)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2\neq 0$. Vậy C sai.

```
2log6(A+B)-log6▶
                   2
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\log_6\left(\frac{A+B}{6}\right)-2\left(\log_6(A)+\log_6(B)\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,79...\neq 0$. Vậy D sai.

```
log6((A+B)/6)-2(lo▶
         1.790865368
```

Câu 40: Đáp án D.

– *Mệnh đề* (I): Nhập vào máy $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-3,259200435\times 10^{-3}<0$. Suy ra $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$. Vậy (I) đúng.

```
(1/5)^√3-(1/5)^1.7
   -3.259200435×10^-3
```

– *Mệnh đề* (II): Nhập vào máy $4^{\sqrt{5}}-4^{2,23}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,1859178647>0$. Suy ra $4^{\sqrt{5}}>4^{2,23}$. Vậy (II) sai.

```
4^√5-4^2.23
        0.1859178647
```

Câu 41: Đáp án A.

* Chọn $a=0,5\in(0;1)$ và $a=1,5>1$. Nhập vào máy $A^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-A^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [0] [.] [5] $(A=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,05...>0$.

```
A^(√3/3)-A^(√2/2)
      -0.06826900404
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,06...<0$.

```
A^(√3/3)-A^(√2/2)
      -0.06826900404
```

Vậy với $0<a<1$ thì $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Loại C, D.

* Chọn $b=0,5\in(0;1)$ và $b=1,5>1$. Nhập vào máy $\log_B\left(\frac{3}{4}\right)-\log_B\left(\frac{4}{5}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [0] [.] [5] $(B=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,09...>0$.

```
logB(3/4)-logB(4/5)
       0.09310940439
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(B=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,15...<0$.

```
logB(3/4)-logB(4/5)
       -0.1591715781
```

Vậy với $b>1$ thì $\log_b\frac{3}{4}<\log_b\frac{4}{5}$.

Câu 42: Đáp án C.

* Chọn $a=0,5\in(0;1)$ và $a=1,5>1$. Nhập vào máy $A^{\frac{13}{7}}-A^{\frac{15}{8}}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [0] [.] [5] $(A=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $3,395445252\times 10^{-3}>0$.

```
A^(13/7)-A^(15/8)
   3.395445252×10^-3
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi A? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,01...<0$.

```
A^(13/7)-A^(15/8)
      -0.01542997692
```

Vậy với $a>1$ thì $a^{\frac{13}{7}}<a^{\frac{15}{8}}$. Loại B, D.

* Chọn $b=0,5\in(0;1)$ và $b=1,5>1$. Nhập vào máy $\log_B\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)-\log_B\left(2+\sqrt{3}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [0] [.] [5] $(B=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,03...>0$.

```
logB(√2+√5)-lo▶
       0.03196088611
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(B=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,05...<0$.

```
logB(√2+√5)-log▷
      -0.05463749568
```

Vậy với $0<b<1$ thì $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)>\log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 43: Đáp án C.

* Chọn $a=0,5\in(0;1)$ và $a=1,5>1$. Nhập vào máy $A^{\sqrt{7}}-A^{\sqrt{6}}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [0][.][5] $(A=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-0,02...<0$.

```
A^√7-A^√6
      -0.02328548898
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi A? Ấn [1][.][5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,22...>0$.

```
A^√7-A^√6
      0.2236232955
```

Vậy với $0<a<1$ thì $a^{\sqrt{7}}<a^{\sqrt{6}}$. Loại A, B.

* Chọn $b=0,5\in(0;1)$ và $b=1,5>1$. Nhập vào máy $\log_B(3)-\log_B(4)$. Ấn [CALC], máy hỏi B? Ấn [0][.][5] $(B=0,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,41...>0$.

```
logB(3)-logB(4)
      0.4150374993
```

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi B? Ấn [1][.][5] $(B=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,70...<0$.

```
logB(3)-logB(4)
      -0.7095112914
```

Vậy với $b>1$ thì $\log_b 3<\log_b 4$.

Câu 44: Đáp án A.

Chọn $a=1,5$ và $b=2,5$. Gán $1,5\to A$ và $2,5\to B$.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\log_{\sqrt{A}}\left(A^2+AB\right)-2-2\log_A\left(A+B\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Vậy A đúng.

```
log√A(A²+AB)-2-▷
                 0
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\log_{\sqrt{A}}\left(A^2+AB\right)-4\log_A\left(A+B\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-4,83...\neq 0$. Vậy B sai.

```
log√A(A²+AB)-4l▷
      -4.838045165
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\log_{\sqrt{A}}\left(A^2+AB\right)-1-4\log_A\left(B\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,20...\neq 0$. Vậy C sai.

```
log√A(A²+AB)-1-▷
      -1.201358853
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\log_{\sqrt{A}}\left(A^2+AB\right)-4-2\log_A\left(B\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,31...\neq 0$. Vậy D sai.

```
log√A(A²+AB)-4-▷
      0.3183431563
```

Câu 45: Đáp án C.

Chọn $a=1,5; b=2,5$ và $c=3,5$. Gán $1,5\to A$, gán $2,5\to B$ và gán $3,5\to C$.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\log_A\left(B\right)+\log_A\left(C\right)-\log\left(B+C\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,57...\neq 0$. Vậy A sai.

```
logA(B)+logA(C)▷
      4.571393401
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình $\log_A\left(B\right)+\log_A\left(C\right)-\log_A\left(|B-C|\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $5,34...\neq 0$. Vậy B sai.

```
logA(B)+logA(C)▷
      5.349544651
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình $\log_A\left(B\right)+\log_A\left(C\right)-\log_A\left(BC\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Vậy C đúng.

```
logA(B)+logA(C)▷
                 0
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình $\log_A\left(B\right)+\log_A\left(C\right)-\log_A\left(\dfrac{B}{C}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $6,17...\neq 0$. Vậy D sai.

```
logA(B)+logA(C)▷
      6.179387293
```

Dạng 4: Tìm số chữ số của một lũy thừa

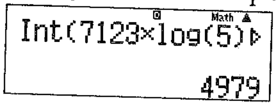
Câu 46: Đáp án A.

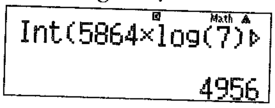
Quan sát đáp án, ta loại ngay C và D, chỉ có thể là một trong hai đáp án A hoặc B đúng.

Số chữ số của 5^{7123} là $\left[\log\left(5^{7123}\right)\right]+1$ $=\left[7123.\log 5\right]+1$. Nhập $\text{Int}\left(7123\times\log(5)\right)+1$ vào máy. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 4979.

Tương tự, số chữ số của 7^{5864} là $\left[\log\left(7^{5864}\right)\right]+1$ $=\left[5864.\log 7\right]+1$. Nhập $\text{Int}\left(5864\times\log(7)\right)+1$ vào máy. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 4956.

Như vậy $5^{7123}>7^{5864}$. Đáp án A đúng. Chọn A.



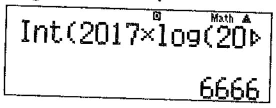


Vậy A đúng.

Câu 47: Đáp án B.

Số $M=2017^{2017}$ có số chữ số là $n=\left[\log M\right]+1$ $=\left[\log\left(2017^{2017}\right)\right]+1=\left[2017.\log 2017\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(2017\times\log(2017)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 6666. Chọn B.



Câu 48: Đáp án B.

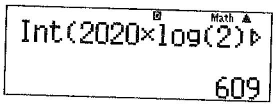
Xét $(1+x)^{2020}=C_{2020}^{0}+C_{2020}^{1}x+C_{2020}^{2}x^{2}+...+C_{2020}^{2020}x^{2020}$

Cho $x=1$ thì ta có

$2^{2020}=(1+1)^{2020}=C_{2020}^{0}+C_{2020}^{1}+C_{2020}^{2}+...+C_{2020}^{2020}=M$

Số $M=2^{2020}$ có số chữ số là $\left[\log M\right]+1$ $=\left[\log 2^{2020}\right]+1=\left[2020.\log 2\right]+1$.

Nhập vào máy $\left[2020\times\log(2)\right]+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 609.



Câu 49: Đáp án B.

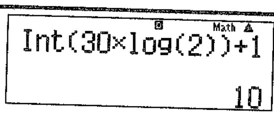
* Đặt $2^{30}=10^{x}\rightarrow x=\log 2^{30}$ và số chữ số của 2^{30} trong hệ thập phân là $\left[x\right]+1=\left[\log 2^{30}\right]+1=\left[30.\log 2\right]+1$.

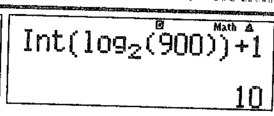
Nhập vào máy $\text{Int}\left(30\times\log(2)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 10. Suy ra $m=10$.

* Đặt $30^{2}=900=2^{y}\rightarrow y=\log_{2}900$ và số chữ số của 30^{2} trong hệ nhị phân là $\left[y\right]+1=\left[\log_{2}900\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(\log_{2}(900)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 10. Suy ra $n=10$.

Vậy $m+n=20$. Chọn B.

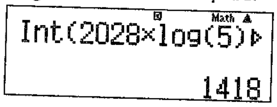




Câu 50: Đáp án D.

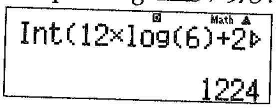
– *Phương án A:* Nếu $(a;b)=(5;5)$ thì $a^{12}b^{2016}$ $=5^{12}.5^{2016}=5^{2028}$. Số chữ số của 5^{2028} là $\left[\log 5^{2028}\right]+1$ $=\left[2028.\log(5)\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(2028\times\log(5)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $1418\neq 973$. Loại A.



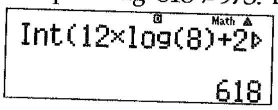
– *Phương án B:* Nếu $(a;b)=(6;4)$ thì $a^{12}b^{2016}=6^{12}.4^{2016}$ và số chữ số của $6^{12}.4^{2016}$ là $\left[\log\left(6^{12}.4^{2016}\right)\right]+1$ $=\left[12.\log 6+2016.\log 4\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(12\times\log(6)+2016\times\log(4)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $1223\neq 973$. Loại B.



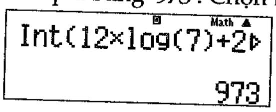
– *Phương án C:* Nếu $(a;b)=(8;2)$ thì $a^{12}b^{2016}=8^{12}.2^{2016}$ và số chữ số của $8^{12}.2^{2016}$ là $\left[\log\left(8^{12}.2^{2016}\right)\right]+1$ $=\left[12.\log 8+2016.\log 2\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(12\times\log(8)+2016\times\log(2)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $618\neq 973$. Loại C.



– *Phương án D:* Nếu $(a;b)=(7;3)$ thì $a^{12}b^{2016}=7^{12}.3^{2016}$ và số chữ số của $7^{12}.3^{2016}$ là $\left[\log\left(7^{12}.3^{2016}\right)\right]+1$ $=\left[12.\log 7+2016.\log 3\right]+1$.

Nhập vào máy $\text{Int}\left(12\times\log(7)+2016\times\log(3)\right)+1$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng 973. Chọn D.



CHỦ ĐỀ 6: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

KINH NGHIỆM

Ở bước 2, giá trị x_0 thường chọn là các số lẻ (thỏa mãn điều kiện của $f(x)$ và cả đáp án) để kết quả thu được chính xác hơn.
Ở bước 3, sau khi ấn [=], kết quả nhận được mà bằng 0 thì ta vẫn nên CALC với thêm một vài giá trị $x_1, x_2, \ldots$ khác để chắc chắn rằng kết quả đó có chính xác hay không.
Thông thường, kết quả nhận được sẽ có sai số rất nhỏ. Vì vậy, để kết quả được dễ quan sát hơn, ta ấn [SHIFT] [MODE] [6] [9] (Fix–9).
Tính năng này đã được đề cập tới tại PHẦN 1 của cuốn sách.

Các dạng toán liên quan:

Dạng 1: Xác định nguyên hàm của một hàm số

Phân tích: Nếu $F(x)+C$ là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tức là $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $F'(x) = f(x) \to f(x_0) = F'(x_0) = \frac{d}{dx}(F(x))\Big|_{x=x_0}$.

Khi đó $\frac{d}{dx}(F(x))\Big|_{x=x_0} - f(x_0) = 0$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Nhập vào máy $\frac{d}{dx}(F(X))\Big|_{x=X} - f(X)$.

* **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn x_0 $(X = x_0)$ với x_0 là một số tùy ý thỏa mãn điều kiện.

* **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả. Nếu kết quả bằng 0 thì chọn đáp án tương ứng với $F(X)$ vừa nhập ở bước 1. Còn nếu kết quả khác 0 thì loại ngay đáp án đó và thực hiện tương tự với các đáp án còn lại.

Ví dụ 1: Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

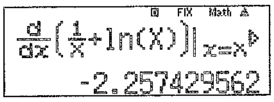
C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x$ D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Lời giải

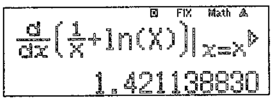
Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X} + \ln(X)\right)\Big|_{x=X} - \left(\sqrt{X} + \ln(X)\right)$

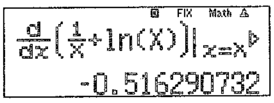
[SHIFT] [∫] [1] [□/□] [ALPHA] [)] [▶] [+] [ln] [ALPHA] [)] [)] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [(] [√] [ALPHA] [)] [▶] [+] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2,257429562 \neq 0$. Loại A.



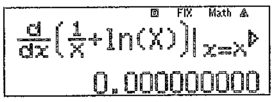
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X} + \ln(X)\right)\Big|_{x=X} - \left(-\sqrt{X} + \frac{1}{X}\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,421138830 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X} + \ln(X)\right)\Big|_{x=X} - \left(-\frac{1}{X^2} + \ln(X)\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện $-0,516290732 \neq 0$. Loại C.



– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X} + \ln(X)\right)\Big|_{x=X} - \frac{X-1}{X^2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.



Đáp án D.

Ví dụ 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ là:

A. $2e^x+\tan x+C$ B. $e^x\left(2x-\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)+C$

C. $e^x+\tan x+C$ D. $\dfrac{e^x}{2}+\tan x+C$

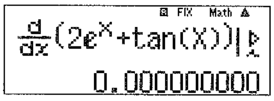
STUDY TIPS
Với các bài toán chứa hàm lượng giác, nếu đề không cho sẵn đơn vị góc (độ hoặc rađian), ta thường đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4].

Lời giải

Đưa máy về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

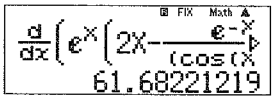
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\dfrac{d}{dx}\left(2e^X+\tan(X)\right)\Big|_{x=X}-\left(2e^X+\dfrac{1}{(\cos(X))^2}\right)$, ấn

[SHIFT] [∫] [2] [ALPHA] [$x10^x$] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [(] [2] [ALPHA] [$x10^x$] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [1] [$\frac{■}{■}$] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [)] [x^2] [▶] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

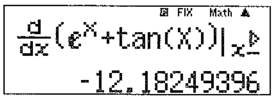


– *Phương án B:* Nhập vào máy $\dfrac{d}{dx}\left(e^X\left(2X-\dfrac{e^{-X}}{(\cos(X))^2}\right)\right)\Big|_{x=X}-2e^X-\dfrac{1}{(\cos(X))^2}$.

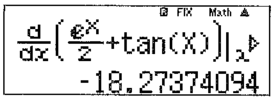
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $61,6...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\dfrac{d}{dx}\left(e^X+\tan(X)\right)\Big|_{x=X}-2e^X-\dfrac{1}{(\cos(X))^2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-12,1...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^X}{2}+\tan(X)\right)\Big|_{x=X}-2e^X-\dfrac{1}{(\cos(X))^2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-18,2...\neq 0$. Loại D.



Đáp án A.

Ví dụ 3: Một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{5(x^2+x)}{\sqrt{2x+1}},\left(x>-\dfrac{1}{2}\right)$ là:

A. $y=(x^2+x+1)\sqrt{2x+1}$ B. $y=(x^2-x+1)\sqrt{2x+1}$

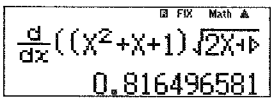
C. $y=(x^2+x-1)\sqrt{2x+1}$ C. $y=(x^2-x-1)\sqrt{2x+1}$

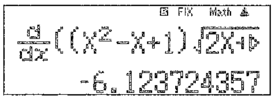
Lời giải

Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

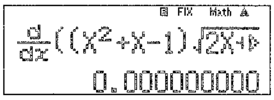
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\dfrac{d}{dx}\left((X^2+X+1)\sqrt{2X+1}\right)\Big|_{x=X}-\dfrac{5(X^2+X)}{\sqrt{2X+1}}$, ấn

[SHIFT] [∫] [(] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [√] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [$\frac{■}{■}$] [5] [(] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [)] [▽] [√] [2] [ALPHA] [)] [+] [1]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $0,8...\neq 0$. Loại A.

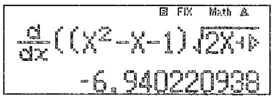




– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\left(X^2-X+1\right)\sqrt{2X+1}\right)\Big|_{x=X}-\frac{5\left(X^2+X\right)}{\sqrt{2X+1}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-6,12...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\left(X^2+X-1\right)\sqrt{2X+1}\right)\Big|_{x=X}-\frac{5\left(X^2+X\right)}{\sqrt{2X+1}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\left(X^2-X-1\right)\sqrt{2X+1}\right)\Big|_{x=X}-\frac{5\left(X^2+X\right)}{\sqrt{2X+1}}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-6,94...\neq 0$. Loại D.

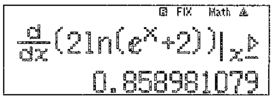
Đáp án C.

Ví dụ 4: Một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{e^x}{e^x+2}$ là

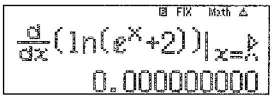
A. $2\ln\left(e^x+2\right)+C$ B. $\ln\left(e^x+2\right)+C$ C. $e^x.\ln\left(e^x+2\right)+C$ D. $e^{2x}+C$

Lời giải

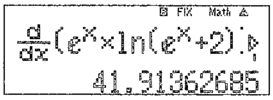
Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].



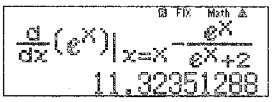
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(2\ln\left(e^X+2\right)\right)\Big|_{x=X}-\frac{e^X}{e^X+2}$, ấn [SHIFT] [∫] [2] [ln] [ALPHA] [×10^x] [x^□] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [)] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [▭/▭] [ALPHA] [×10^x] [x^□] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [×10^x] [x^□] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,85...\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(e^X+2\right)\right)\Big|_{x=X}-\frac{e^X}{e^X+2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(e^X\times\ln\left(e^X+2\right)\right)\Big|_{x=X}-\frac{e^X}{e^X+2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $41,91...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(e^X\right)\Big|_{x=X}-\frac{e^X}{e^X+2}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $11,32...\neq 0$. Loại D.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Nguyên hàm $I=\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ là

A. $I=\ln x.\ln(\ln x)+C$

B. $I=\ln x.\ln(\ln x)+\ln x+C$

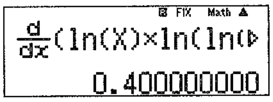
C. $I=\ln x.\ln(\ln x)-\ln x+C$

D. $I=\ln(\ln x)+\ln x+C$

Lời giải

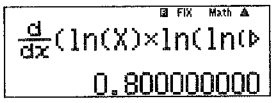
Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\ln(X)\times\ln(\ln(X))\right)\Big|_{x=X}-\frac{\ln(\ln(X))}{X}$, ấn



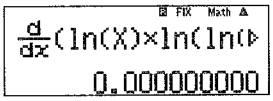
[SHIFT] [∫] [ln] [ALPHA] [)] [)] [×] [ln] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [⬚/⬚] [ln] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)] [)] [▼] [ALPHA] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,4\neq 0$. Loại A.

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\ln(X)\times\ln(\ln(X))+\ln(X)\right)\Big|_{x=X}-\frac{\ln(\ln(X))}{X}$.



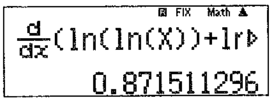
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,8\neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\ln(X)\times\ln(\ln(X))-\ln(X)\right)\Big|_{x=X}-\frac{\ln(\ln(X))}{X}$.



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\frac{d}{dx}\left(\ln(\ln(X))+\ln(X)\right)\Big|_{x=X}-\frac{\ln(\ln(X))}{X}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $0,87...\neq 0$. Loại D.



Đáp án C.

Dạng 2: Xác định nguyên hàm dựa vào điều kiện cho trước

Xác định $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ sao cho $F(x_0)=k$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Nhập vào máy $F(X)-k-\int_{x_0}^{X} f(X)dx$.

* **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập X tùy ý (sao cho thỏa mãn điều kiện đề bài)

* **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện kết quả.

* **Bước 4:** Quan sát kết quả. Nếu kết quả nhận được có ít nhất một giá trị khác 0 thì loại ngay đáp án tương ứng và kiểm tra các đáp án khác. Còn nếu kết quả luôn cho giá trị bằng 0 với nhiều giá trị của A thì chọn đáp án tương ứng.

CHÚ Ý

Ở bước 2, nên chọn các giá trị X lẻ (tùy ý) để việc xác định kết quả được chính xác hơn.
Để kết quả nhận được dễ quan sát hơn, ta dùng lệnh [SHIFT] [MODE] [6] [9] (Fix–9).

Ví dụ 1: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+\frac{1}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ là:

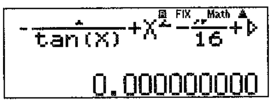
A. $-\cot x+x^2-\frac{\pi^2}{16}$ B. $\cot x-x^2+\frac{\pi^2}{16}$

C. $-\cot x+x^2$ D. $\cot x-x^2-\frac{\pi^2}{16}$

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] [9].

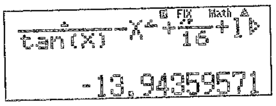
– *Phương án A:* Nhập vào máy $-\frac{1}{\tan(X)}+X^2-\frac{\pi^2}{16}+1-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(2X+\frac{1}{(\sin(X))^2}\right)dx$, ấn



[(−)] [1] [⬚/⬚] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▶] [+] [ALPHA] [)] [x²] [−] [SHIFT] [×10ˣ] [x²] [⬚/⬚] [1] [6] [▶] [+] [1] [−] [∫] [(] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [⬚/⬚] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▶] [)] [▶] [▼] [SHIFT] [×10ˣ] [⬚/⬚] [4] [▲] [▲] [ALPHA] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy

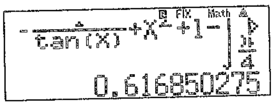
hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{1}{\tan(X)} - X^2 + \frac{\pi^2}{16} + 1 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(2X + \frac{1}{\sin(X)^2}\right)dx$. Ấn



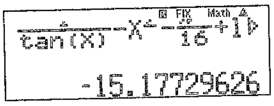
[CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] (X = 2,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-13,94... \neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Nhập vào máy $-\frac{1}{\tan(X)} + X^2 + 1 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(2X + \frac{1}{\sin(X)^2}\right)dx$. Ấn [CALC],



máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] (X = 2,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,61... \neq 0$. Loại C.

– Phương án D: Nhập vào máy $\frac{1}{\tan(X)} - X^2 - \frac{\pi^2}{16} + 1 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{A}\left(2X + \frac{1}{\sin(X)^2}\right)dx$. Ấn



[CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] (X = 2,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-15,17... \neq 0$. Loại D.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$ là:

A. $F(x) = \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1}$

B. $F(x) = \frac{2}{1 - \tan\frac{x}{2}} - \sqrt{3}$

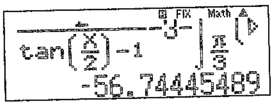
C. $F(x) = \frac{1}{1 - \tan\frac{x}{2}} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

D. $F(x) = \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + \sqrt{3} + 6$

Lời giải

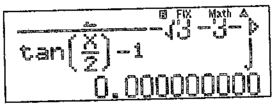
Đưa máy về chế độ rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] [9].

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\frac{2}{\tan\left(\frac{X}{2}\right) - 1} - 3 - \int_{\frac{\pi}{3}}^{X}\left(\frac{1}{1 - \sin(X)}\right)dx$, ấn [▭] [2] [▼]



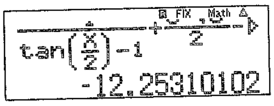
[tan] [▭] [ALPHA] [)] [▼] [2] [▶] [)] [−] [1] [▶] [−] [3] [−] [∫] [(] [▭] [1] [▼] [1] [−] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▶] [)] [▼] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [3] [▲] [▲] [ALPHA] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] (X = 1,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-56,74... \neq 0$. Loại A.

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{-2}{\tan\left(\frac{X}{2}\right) - 1} - \sqrt{3} - 3 - \int_{\frac{\pi}{3}}^{X}\left(\frac{1}{1 - \sin(X)}\right)dx$. Ấn [CALC],



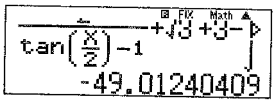
máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] (X = 1,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{-1}{\tan\left(\frac{X}{2}\right) - 1} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} - 3 - \int_{\frac{\pi}{3}}^{X}\left(\frac{1}{1 - \sin(X)}\right)dx$. Ấn



[CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] (X = 1,5). Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-12,25... \neq 0$. Loại C.

– *Phương án D:* Nhập vào máy $\dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{X}{2}\right)-1}+\sqrt{3}+3-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{X}\left(\dfrac{1}{1-\sin(X)}\right)dx$. Ấn [CALC],



máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-49,01...\neq 0$. Loại D.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là:

A. $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$ B. $F(x)=\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$

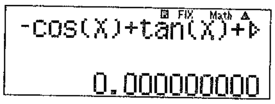
C. $F(x)=-\cos x+\tan x+1-\sqrt{2}$ D. $F(x)=-\cos x+\tan x$

Lời giải

Đưa máy về chế độ rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] [9].

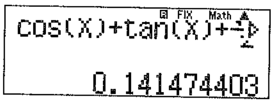
– *Phương án A:* Nhập $-\cos(X)+\tan(X)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(\sin(X)+\dfrac{1}{(\cos(X))^2}\right)dx$, ấn

[(−)] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [tan] [ALPHA] [)] [)] [+] [√■] [2] [▶] [■/■] [2] [▶] [−] [1] [−] [∫■] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [■/■] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▶] [)] [▼] [SHIFT] [×10ˣ] [■/■] [4] [▲] [▲] [ALPHA] [)].



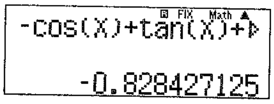
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

– *Phương án B:* Nhập vào máy $\cos(X)+\tan(X)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(\sin(X)+\dfrac{1}{\cos(X)^2}\right)dx$.



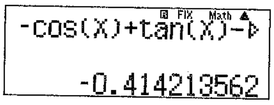
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,14...\neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Nhập $-\cos(X)+\tan(X)+1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(\sin(X)+\dfrac{1}{\cos(X)^2}\right)dx$. Ấn



[CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,82...\neq 0$. Loại C.

– *Phương án D:* Nhập $-\cos(X)+\tan(X)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\left(\sin(X)+\dfrac{1}{\cos(X)^2}\right)dx$. Ấn [CALC],



máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,41...\neq 0$. Loại D.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ là kết quả nào sau đây? Biết nguyên hàm này bằng $\dfrac{\pi}{8}$ khi $x=\dfrac{\pi}{4}$

A. $F(x)=\dfrac{\sin^3 x}{3}$ B. $F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}$

C. $F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{1}{4}$ D. $F(x)=\dfrac{\sin^3 x}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

STUDY TIPS

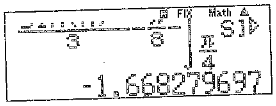
Từ giả thiết, ta có $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ và thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$.

Lời giải

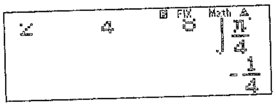
Đưa máy về chế độ rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\frac{(\sin(X))^3}{3}-\frac{\pi}{8}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X))^2\,dx$:

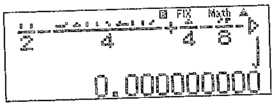
(sin ALPHA))) SHIFT x³ ÷ 3 ▶ − SHIFT ×10ˣ ÷ 8 ▶ − ∫ (sin ALPHA))) x² ▼ SHIFT ×10ˣ ÷ 4 ▲ ▲ ALPHA). Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,66...\neq 0$. Loại A.



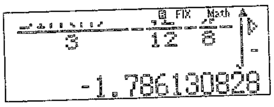
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\frac{X}{2}-\frac{\sin(2X)}{4}-\frac{\pi}{8}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X))^2\,dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-\frac{1}{4}\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\frac{X}{2}-\frac{\sin(2X)}{4}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X))^2\,dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\frac{\sin(X)^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\pi}{8}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X))^2\,dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,78...\neq 0$. Loại D.



Đáp án C.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị $y=F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6};0\right)$ thì $F(x)$ là

A. $F(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\cot x$ B. $F(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot x$

C. $F(x)=-\sqrt{3}+\cot x$ D. $F(x)=\sqrt{3}-\cot x$

STUDY TIPS

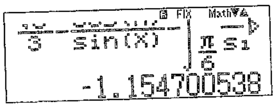
Từ giả thiết, ta có đồ thị $y=F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6};0\right)$ nên $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Lời giải

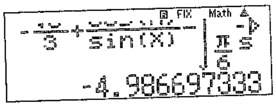
Đưa máy về chế độ rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{X}\frac{1}{(\sin(X))^2}dx$:

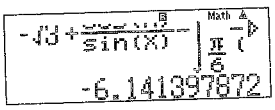
√ 3 ▶ ÷ 3 ▶ − cos ALPHA)) ÷ sin ALPHA)) ▶ − ∫ ÷ 1 ▼ (sin ALPHA))) x² ▼ SHIFT ×10ˣ ÷ 6 ▲ ▲ ALPHA). Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,15...\neq 0$. Loại A.

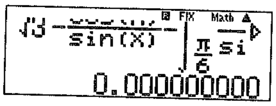


– *Phương án B:* Nhập vào máy $-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{X}\frac{1}{(\sin(X))^2}dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-4,98...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $-\sqrt{3}+\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{X}\frac{1}{(\sin(X))^2}dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-6,14...\neq 0$. Loại C.





– *Phương án D:* Nhập vào máy $\sqrt{3}-\frac{\cos(X)}{\sin(X)}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{X}\frac{1}{(\sin(X))^2}dx$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

Đáp án D.

Dạng 3: Tính tích phân xác định của một hàm số

Kiểm tra xem k có phải là kết quả của tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hay không?

Quy trình bấm máy:

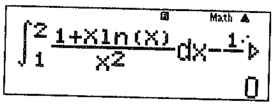
* **Bước 1:** Nhập vào máy $\int_a^b f(X)dx-k$.

* **Bước 2:** Ấn =, quan sát kết quả: Nếu kết quả bằng 0 thì chọn đáp án tương ứng với giá trị k đó. Còn nếu kết quả khác 0 thì loại đáp án tương ứng giá trị k đó.

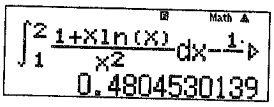
Ví dụ 1: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{1+x\ln x}{x^2}dx$. Kết quả **đúng** là:

A. $I=\frac{1+\ln^2 2}{2}$ B. $I=\frac{1-\ln^2 2}{2}$ C. $I=\frac{1+\ln 2}{2}$ D. $I=\frac{1-\ln 2}{2}$

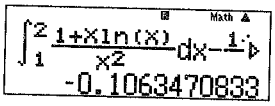
Lời giải



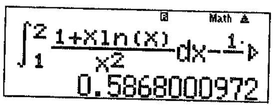
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_1^2\frac{1+X\ln(X)}{X^2}dx-\frac{1+(\ln(2))^2}{2}$, ấn [phím bấm máy]. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_1^2\frac{1+X\ln(X)}{X^2}dx-\frac{1-(\ln(2))^2}{2}$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,4804530139\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_1^2\frac{1+X\ln(X)}{X^2}dx-\frac{1+\ln(2)}{2}$. Ấn =, máy hiện hiện kết quả bằng $-0,1063470833\neq 0$. Loại C.



– Phương án D: Nhập vào máy $\int_1^2\frac{1+X\ln(X)}{X^2}dx-\frac{1-\ln(2)}{2}$. Ấn =, máy hiện hiện kết quả bằng $0,5868000972\neq 0$. Loại D.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx$. Kết quả **đúng** là:

A. $I=e^3-3e^2$ B. $I=e^3+e^2$

C. $I=e^3-e^2$ D. $I=e^3-2e^2$

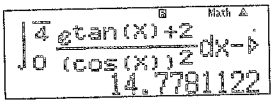
Lời giải

Đưa máy tính về chế độ góc rađian: SHIFT MODE 4 (Rad).

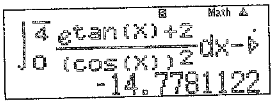
STUDY TIPS

Với các bài toán chứa hàm lượng giác, nếu đề không nói gì thêm thì đưa máy về chế độ rad: SHIFT MODE 4 (Rad).

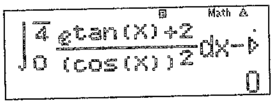
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(X)+2}}{(\cos(X))^2}dx - (e^3 - 3e^2)$, ấn [∫□] [x²] [SHIFT] [ln] ($e^{\blacksquare}$) [tan] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [▽] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▽] [0] [△] [□/□] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▽] [4] [▶] [▶] [−] [(] [SHIFT] [ln] ($e^{\blacksquare}$) [3] [▶] [−] [3] [SHIFT] [ln] ($e^{\blacksquare}$) [2] [▶] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $14,7781122 \neq 0$. Loại A.



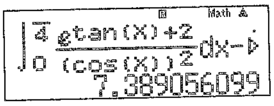
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(X)+2}}{(\cos(X))^2}dx - (e^3 + e^2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-14,7781122 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(X)+2}}{(\cos(X))^2}dx - (e^3 - e^2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan(X)+2}}{(\cos(X))^2}dx - (e^3 - 2e^2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $7,389056099 \neq 0$. Loại D.



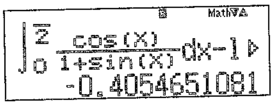
Đáp án C.

> Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$. Chọn kết quả **đúng**:
>
> A. $I = \ln 3$ B. $I = \ln 4$ C. $I = \ln 2$ D. $I = \ln 6$

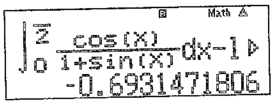
Lời giải

Đưa máy về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

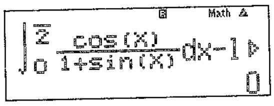
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(X)}{1+\sin(X)}dx - \ln(3)$, ấn [∫□] [□/□] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▽] [1] [+] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▽] [0] [△] [□/□] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▽] [2] [▶] [▶] [−] [ln] [3] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,4054651081 \neq 0$. Loại A.



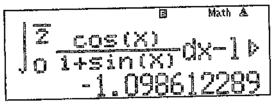
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(X)}{1+\sin(X)}dx - \ln(4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,6931471806 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(X)}{1+\sin(X)}dx - \ln(2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(X)}{1+\sin(X)}dx - \ln(6)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,098612289 \neq 0$. Loại D.



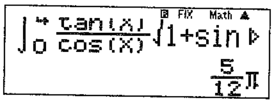
Đáp án C.

> Ví dụ 4: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x}\sqrt{1+\sin^2 x}dx$ là
>
> A. $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{2}$ B. $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$ C. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{12}$ D. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

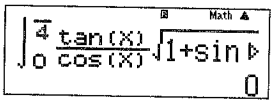
Lời giải

Đưa máy về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

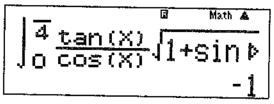
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(X)}{\cos(X)}\sqrt{1+(\sin(X))^2}dx-\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{2}$, ấn [∫] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▤] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▶] [√] [1] [+] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▽] [0] [△] [SHIFT] [×10^x] [▤] [4] [▶] [▶] [−] [√] [3] [▶] [+] [1] [+] [SHIFT] [×10^x] [▤] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{5\pi}{12}\neq 0$. Loại A.



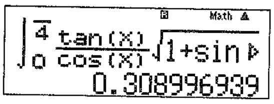
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(X)}{\cos(X)}\sqrt{1+(\sin(X))^2}dx-\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{12}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(X)}{\cos(X)}\sqrt{1+(\sin(X))^2}dx-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(X)}{\cos(X)}\sqrt{1+(\sin(X))^2}dx-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,30...\neq 0$.



Đáp án B.

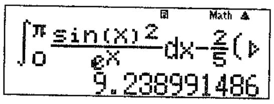
Ví dụ 5: Kết quả của tích phân $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{e^x}dx$ là

A. $\frac{2}{5}\left(1-e^{\pi}\right)$ B. $\frac{\pi}{5}\left(1-e^{2}\right)$ C. $\frac{2}{5}\left(1+e^{-\pi}\right)$ D. $\frac{2}{5}\left(1-e^{-\pi}\right)$

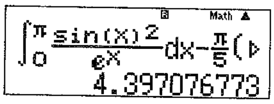
Lời giải

Đưa máy về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

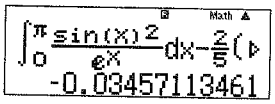
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{(\sin(X))^2}{e^X}dx-\frac{2}{5}\left(1-e^{\pi}\right)$, ấn [∫] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▤] [SHIFT] [ln] [ALPHA] [)] [▽] [0] [△] [SHIFT] [×10^x] [▶] [−] [2] [▤] [5] [▶] [(] [1] [−] [SHIFT] [ln] [SHIFT] [×10^x] [▶] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $9,23...\neq 0$. Loại A.



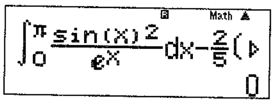
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{(\sin(X))^2}{e^X}dx-\frac{\pi}{5}\left(1-e^{2}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,39...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{(\sin(X))^2}{e^X}dx-\frac{2}{5}\left(1+e^{-\pi}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,03...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{(\sin(X))^2}{e^X}dx-\frac{2}{5}\left(1-e^{-\pi}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.



Đáp án C.

Dạng 4: Bài toán tính tích phân chứa tham số

[illegible] KHI SỬ DỤNG CALC TA BỎ QUA KHÔNG NHẬP GIÁ TRỊ

Kết quả của $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là một số không phụ thuộc vào x. Suy ra kết quả của tích phân $\int_a^b f(x;m)$ cũng không phụ thuộc vào x mà chỉ phụ thuộc vào tham số m, khi m thay đổi thì kết quả tích phân đó cũng thay đổi theo. Vì thế khi sử dụng [CALC], ta chỉ nhập M (tùy ý) mà bỏ qua không nhập X. Tuy nhiên, nếu ta nhập X bằng một giá trị khác (tùy ý) thì kết quả bài toán cũng không bị ảnh hưởng.

Kiểm tra xem $I(m)$ có là kết quả của tích phân $I=\int_a^b f(x;m)\mathrm{d}x$ hay không, với m là tham số.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Nhập vào máy $\int_a^b f(X;M)\mathrm{d}x - I_i(M)$, với biến X và M được nhập từ bàn phím máy tính.

* **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua (không nhập X). Máy hỏi M? Ta chọn M tùy ý thỏa mãn giả thiết bài toán (nếu có).

* **Bước 3:** Ấn [=] và quan sát kết quả. Nếu máy hiện kết quả bằng 0 thì chọn đáp án tương ứng. Nếu máy hiện kết quả khác 0 thì loại đáp án tương ứng và thử tiếp đối với các đáp án khác.

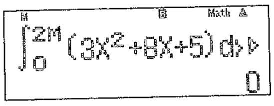
Ví dụ 1: Giá trị của tích phân $I=\int_0^{2m}\left(3x^2+8x+5\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=2m\left(4m^2+8m+5\right)$ B. $I=m\left(4m^2+8m+5\right)$

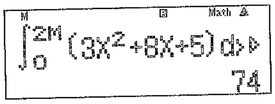
C. $I=4m^2+8m+5$ D. $I=m\left(4m^2+8m\right)$

Lời giải

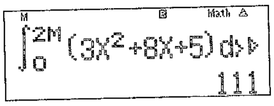
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{2M}\left(3X^2+8X+5\right)\mathrm{d}x-2M\left(4M^2+8M+5\right)$, ấn [∫] [(] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [8] [ALPHA] [)] [+] [5] [)] [▽] [0] [△] [2] [ALPHA] [M+] [▷] [−] [2] [ALPHA] [M+] [(] [4] [ALPHA] [M+] [x²] [+] [8] [ALPHA] [M+] [+] [5] [)]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị M khác $(M>1)$ đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



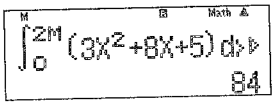
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{2M}\left(3X^2+8X+5\right)\mathrm{d}x-M\left(4M^2+8M+5\right)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $74\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{2M}\left(3X^2+8X+5\right)\mathrm{d}x-\left(4M^2+8M+5\right)$, ấn [◁] (13 lần) [DEL]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $111\neq 0$. Loại C.



– Phương án D: Nhập $\int_0^{2M}\left(3X^2+8X+5\right)\mathrm{d}x-M\left(4M^2+8M\right)$, ấn [◁] [◁] [DEL] [DEL] [◁] (9 lần) [ALPHA] [M+]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $84\neq 0$. Loại D.

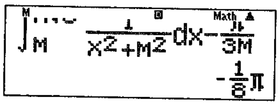


Đáp án A.

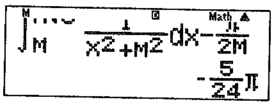
Ví dụ 2: Tính tích phân $I=\int_m^{m\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+m^2},(m>1)$. Chọn kết quả **đúng**:

A. $I=\frac{\pi}{3m}$ B. $I=\frac{\pi}{2m}$ C. $I=\frac{\pi}{6m}$ D. $I=\frac{\pi}{12m}$

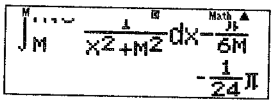
Lời giải



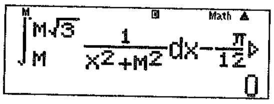
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_{M}^{M\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+M^2}dx - \frac{\pi}{3M}$, ấn [∫] [▭/▭] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [M+] [x²] [▼] [ALPHA] [M+] [▲] [ALPHA] [M+] [√▭] [3] [▶] [▶] [−] [▭/▭] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [3] [ALPHA] [M+]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{1}{8}\pi \neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_{M}^{M\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+M^2}dx - \frac{\pi}{2M}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{5}{24}\pi \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_{M}^{M\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+M^2}dx - \frac{\pi}{6M}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $-\frac{1}{24}\pi \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_{M}^{M\sqrt{3}} \frac{1}{X^2+M^2}dx - \frac{\pi}{12M}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị M khác $(M>1)$ đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

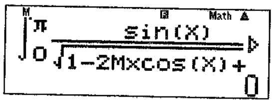
Đáp án D.

Ví dụ 3: Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2m\cos x+m^2}}dx, (m>1)$. Kết quả **đúng** là:

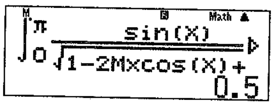
A. $\frac{2}{m}$ B. $\frac{1}{m}$ C. m D. $2m$

Lời giải

Đưa máy về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

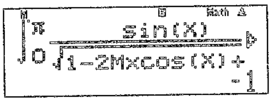


– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{\sin(X)}{\sqrt{1-2M\times\cos(X)+M^2}}dx - \frac{2}{M}$, ấn [∫] [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▼] [√▭] [1] [−] [2] [ALPHA] [M+] [×] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [ALPHA] [M+] [x²] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▶] [−] [▭/▭] [2] [▼] [ALPHA] [M+]. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị M khác $(M>1)$ đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

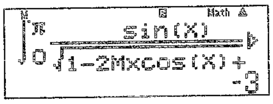


– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi} \frac{\sin(X)}{\sqrt{1-2M\times\cos(X)+M^2}}dx - \frac{1}{M}$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $0{,}5 \neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{\pi}\frac{\sin(X)}{\sqrt{1-2M\times\cos(X)+M^2}}dx-M$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn 2 $(M=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả $-1\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^{\pi}\frac{\sin(X)}{\sqrt{1-2M\times\cos(X)+M^2}}dx-2M$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn 2 $(M=2)$. Ấn =, máy hiện kết quả $-3\neq 0$. Loại D.



Đáp án D.

Ví dụ 4: Kết quả của tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a}{b\cos^2 x\left(1+e^{-3x}\right)}dx$ là:

A. $\frac{a}{2b}$ B. $\frac{2a}{b}$ C. $\frac{4a}{b}$ D. $\frac{a}{b}$

STUDY TIPS

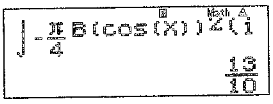
Với bài toán tính tích phân chứa nhiều tham số, ta cũng thực hiện theo quy trình tương tự các ví dụ trên bằng cách sử dụng lệnh CALC với các giá trị tùy ý của tham số. Ta nên chọn giá trị tham số lẻ để kết quả hiển thị chính xác hơn.

Lời giải

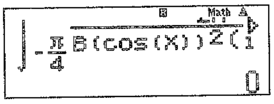
Đưa máy về chế độ góc rađian: SHIFT MODE 4 (Rad).

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2A}{B\left(\cos(X)\right)^2\left(1+e^{-3X}\right)}dx-\frac{A}{2B}$, ấn [illegible].

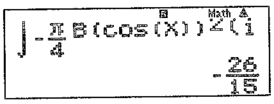
Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 1 . 3 $(A=1,3)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 1 . 5 $(B=1,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X, máy hiện kết quả $\frac{13}{10}\neq 0$. Loại A.



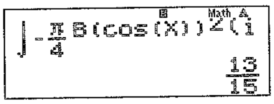
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2A}{B\left(\cos(X)\right)^2\left(1+e^{-3X}\right)}dx-\frac{2A}{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 1 . 3 $(A=1,3)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 1 . 5 $(B=1,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị A, B khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2A}{B\left(\cos(X)\right)^2\left(1+e^{-3X}\right)}dx-\frac{4A}{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 1 . 3 $(A=1,3)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 1 . 5 $(B=1,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X, máy hiện kết quả $-\frac{26}{15}\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2A}{B\left(\cos(X)\right)^2\left(1+e^{-3X}\right)}dx-\frac{A}{B}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 1 . 3 $(A=1,3)$. Ấn =, máy hỏi B? Ấn 1 . 5 $(B=1,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X, máy hiện kết quả $\frac{13}{15}\neq 0$. Loại D.



Đáp án B.

Dạng 5: Chọn hàm đại diện để tính tích phân

Cho $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = k_0$. Tính tích phân $I = \int_m^n f(t(x))\mathrm{d}x$.

Phân tích: Giả sử $f(x) = \alpha.g(x)$ với $g(x)$ là một hàm bất kì liên tục trên $[a;b]$.

Khi đó ra có: $k_0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha.g(x)\mathrm{d}x = \alpha.\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \to \alpha = \dfrac{k_0}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \alpha_0$

Vậy $f(x) = \alpha_0.g(x) \to f(t(x)) = \alpha_0.g(t(x)) \to I = \int_m^n f(t(x))\mathrm{d}x = \int_m^n \alpha_0.g(t(x))\mathrm{d}x$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Chọn hàm $g(x)$. Nhập vào $k_0 \div \int_a^b \mathrm{g}(\mathrm{X})\mathrm{d}x$, ấn [=] được kết quả α_0.

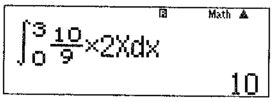
* **Bước 2:** Nhập vào $\int_m^n \alpha_0.\mathrm{g}(\mathrm{t}(\mathrm{X}))\mathrm{d}x$, ấn [=] ta được kết quả chính là giá trị của I.

STUDY TIPS

Ta luôn có $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 20 = \int_0^6 k.g(x)\mathrm{d}x = k.\int_0^6 g(x)\mathrm{d}x$.

Chọn một hàm số $g(x)$ tùy ý thì $k = \dfrac{20}{\int_0^6 g(x)\mathrm{d}x} = k_0$

$\to f(x) = k_0.g(x)$.



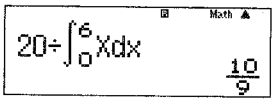
Ví dụ 1: Cho $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 20$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 40$ B. $I = 10$ C. $I = 20$ D. $I = 15$

Lời giải

Chọn $g(x) = x$. Nhập vào máy $20 \div \int_0^6 \mathrm{X}\mathrm{d}x$: [2] [0] [÷] [∫] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [6]

Ấn [=] máy hiện kết quả là $\frac{10}{9}$. Khi đó $f(x) = \frac{10}{9}x \to f(2x) = \frac{10}{9}.2x$



Nhập vào $\int_0^3 \frac{10}{9} \times 2\mathrm{X}\mathrm{d}x$: [∫] [1] [0] [▭/▭] [9] [▶] [×] [2] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [3]

Ấn [=] máy hiện kết quả là 10. Vậy $I = 10$.

Đáp án B.

STUDY TIPS

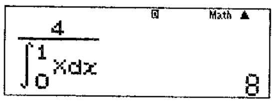
Bài toán có sự xuất hiện của hàm lượng giác nên ta cần đưa máy về chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Ví dụ 2: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$ B. $I = 6$ C. $I = 2$ D. $I = 12$

Lời giải

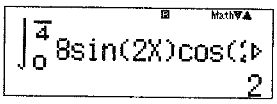
Chọn $g(x) = x$. Nhập vào màn hình $4 \div \int_0^1 \mathrm{X}\mathrm{d}x$: [4] [÷] [∫] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [1].



Ấn [=] máy hiện kết quả là 8. Khi đó $f(x) = 8x \to f(\sin 2x) = 8\sin 2x$.

Nhập vào màn hình $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin(2\mathrm{X})\cos(2\mathrm{X})\mathrm{d}x$:

[∫] [8] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [cos] [2] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [4]



Ấn [=] máy hiện kết quả là 2.

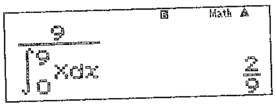
Đáp án C.

Ví dụ 3: Biết rằng $f(x)$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $T=\int_0^9 f(x)dx=9$. Tính $D=\int_0^3\left[f(3x)+T\right]dx$

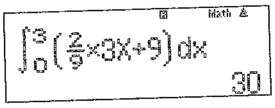
A. $D=30$ B. $D=3$ C. $D=12$ D. $D=27$

Lời giải

Chọn $g(x)=x$. Nhập vào màn hình $9\div\int_0^9 X dx$: [9] [÷] [∫] [ALPHA] [)] [▼] [0] [▲] [9].



Ấn [=] máy hiện kết quả là $\frac{2}{9}$. Khi đó $f(x)=\frac{2}{9}x\to f(3x)=\frac{2}{9}.3x$.



Nhập vào màn hình $\int_0^3\left(\frac{2}{9}\times 3X+9\right)dx$: [∫] [(] [2] [÷] [9] [▶] [×] [3] [ALPHA] [)] [+] [9] [)] [▼] [0] [▲] [3]. Ấn [=] máy hiện kết quả là 30. Vậy $D=\int_0^3\left[f(3x)+T\right]dx=30$.

Đáp án A.

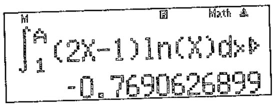
Dạng 6: Tìm tham số để tích phân bằng một giá trị cho trước

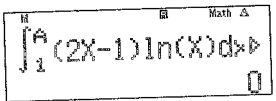
Ví dụ 1: Tìm giá trị của a để $\int_1^a(2x-1)\ln x dx=2\ln 2-\frac{1}{2}$. Chọn đáp án đúng:

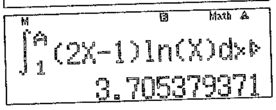
A. $a=\sqrt{2}$ B. $a=2$ C. $a=3$ D. $a=\sqrt{3}$

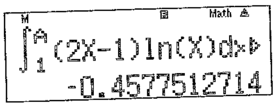
Lời giải

Nhập vào máy $\int_1^A(2X-1)\ln(X)dx-\left(2\ln(2)-\frac{1}{2}\right)$, ấn: [∫] [(] [2] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [ln] [ALPHA] [)] [)] [▼] [1] [▲] [ALPHA] [(-)] [▶] [−] [(] [2] [ln] [2] [)] [−] [÷] [1] [▼] [2] [▶] [)].









– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [√] [2] [)] $(A=\sqrt{2})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,7690626899\neq 0$. Loại A.

– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [2] $(A=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [3] $(A=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $3,705379371\neq 0$. Loại C.

– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [√] [3] [)] $(A=\sqrt{3})$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,4577512714\neq 0$. Loại D.

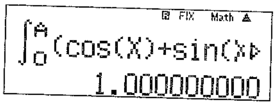
Đáp án B.

Ví dụ 2: Nếu $\int_0^a(\cos x+\sin x)dx=0,(0<a<2\pi)$ thì giá trị a bằng

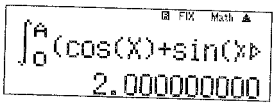
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. π

Lời giải

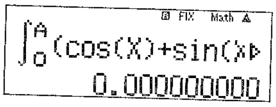
Đưa máy tính về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad). Nhập vào máy $\int_0^A (\cos(X)+\sin(X))dx$, ấn [∫] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [sin] [ALPHA] [)] [)] [)] [▼] [0] [▲] [ALPHA] [(-)]



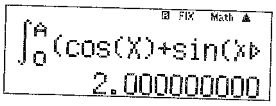
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [4] $\left(A=\frac{\pi}{4}\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $1\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [2] $\left(A=\frac{\pi}{2}\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $2\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [3] [SHIFT] [×10ˣ] [÷] [2] $\left(A=\frac{3\pi}{2}\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [SHIFT] [×10ˣ] $(A=\pi)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $2\neq 0$. Loại D.

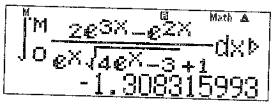
Đáp án C.

Ví dụ 3: Giá trị của m để $\int_0^m \frac{2e^{3x}-e^{2x}}{e^x\sqrt{4e^x-3}+1}dx=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\ln 5$ là:

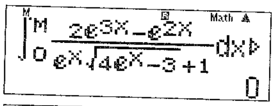
A. $m=\ln 2$ B. $m=\ln 3$ C. $m=\ln 4$ D. $m=\ln 5$

Lời giải

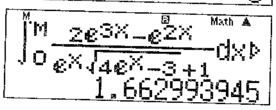
Nhập vào máy $\int_0^M \frac{2e^{3X}-e^{2X}}{e^X\sqrt{4e^X-3}+1}dx-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\ln(5)\right)$, ấn [∫] [÷] [2] [SHIFT] [ln] $(e^{■})$ [3] [ALPHA] [)] [▶] [–] [SHIFT] [ln] $(e^{■})$ [2] [ALPHA] [)] [▼] [SHIFT] [ln] $(e^{■})$ [ALPHA] [)] [▶] [√] [4] [SHIFT] [ln] $(e^{■})$ [ALPHA] [)] [▶] [–] [3] [▶] [+] [1] [▼] [0] [▲] [ALPHA] [M+] [▶] [–] [(] [÷] [8] [▼] [3] [▶] [–] [÷] [1] [▼] [3] [▶] [ln] [5] [)] [)].



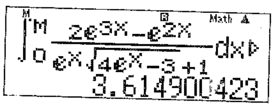
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [ln] [2] [)] $(M=\ln 2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1,308315993\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [ln] [3] [)] $(M=\ln 3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [ln] [4] [)] $(M=\ln 4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1,662993945\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [ln] [5] [)] $(M=\ln 5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $3,614900423\neq 0$. Loại D.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Giá trị của tham số m để $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\sqrt{m}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{m}}$ là:

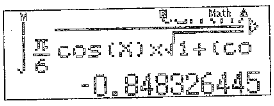
A. $m=5$ B. $m=4$ C. $m=3$ D. $m=2$

Lời giải

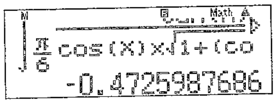
Đưa máy tính về chế độ góc rađian: [SHIFT] [MODE] [4] (Rad). Nhập vào máy

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(X)}{\cos(X)\times\sqrt{1+(\cos(X))^2}}dx-\left(\sqrt{M}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{M}}\right)$, ấn [∫] [■/■] [tan] [ALPHA] [)] [)] [▼] [cos] [ALPHA]

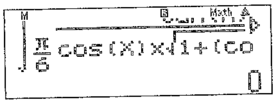
[)] [)] [×] [√■] [1] [+] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x²] [▼] [■/■] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [6] [▲] [▲]
[■/■] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [4] [▶] [▶] [−] [(] [√■] [ALPHA] [M+] [▶] [−] [■/■] [√■] [7] [▼] [√■] [ALPHA] [M+]
[▶] [▶] [)].



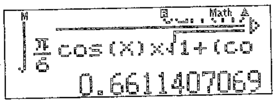
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [5] $(M=5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,848326445\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [4] $(M=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,4725987686\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [3] $(M=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(M=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,6611407069\neq 0$. Loại D.

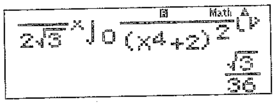
Đáp án C.

Ví dụ 5: Cho đẳng thức $2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó $144m^2-1$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

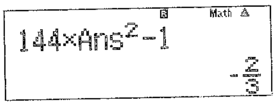
Lời giải

Từ $2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$, suy ra $m=\frac{1}{2\sqrt{3}}.\int_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx$.



Nhập vào màn hình $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\int_0^1\frac{4X^3}{(X^4+2)^2}dx$: [1] [■/■] [2] [√■] [3] [▶] [▶] [×] [∫] [4] [ALPHA]
[)] [SHIFT] [x³] [■/■] [(] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▶] [+] [2] [)] [x²] [▼] [0] [▲] [1]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{\sqrt{3}}{36}$.



Nhập vào màn hình $144\times Ans^2-1$: [1] [4] [4] [×] [Ans] [x²] [−] [1]

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\frac{2}{3}$. Vậy $144m^2-1=-\frac{2}{3}$.

Đáp án A.

Dạng 6: Tích phân chống máy tính cầm tay

> **CHÚ Ý**
>
> Tại bước 2, để tìm a,b,c của hệ $\begin{cases} f(a;b;c)=\text{A} \\ g(a;b;c)=m \end{cases}$ ta cần sử dụng linh hoạt một số chức năng như EQN: [MODE] [5], hay lệnh SOLVE: [SHIFT] [CALC], hay dùng bảng giá trị TABLE: [MODE] [7].
>
> *Chú ý:* Máy tính cầm tay chưa thể giải quyết hết mọi bài toán ở dạng này. Trong khuôn khổ cuốn sách, tác giả sẽ chỉ đề cập đến các dạng bài thường gặp mà máy tính có thể xử lý được.

Biết $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = f(a;b;c)$ với a,b,c thuộc một tập hợp số nào đó (số nguyên, số hữu tỉ,...) và thỏa mãn hệ thức $g(a;b;c)=m$. Để tìm a,b,c ta làm như sau:

Quy trình thực hiện:

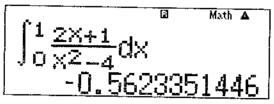
* **Bước 1:** Nhập vào máy tính tích phân $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$. Sau đó gán kết quả vào biến nhớ nào đó $(\text{A,B,C,D,E,F,X,Y,M})$ (Chẳng hạn ta gán kết quả vào biến nhớ A).

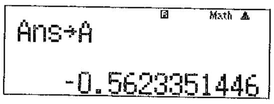
* **Bước 2:** Ta có hệ phương trình $\begin{cases} f(a;b;c)=\text{A} \\ g(a;b;c)=m \end{cases}$. Từ đây tìm các nghiệm của a,b,c của hệ phương trình thỏa mãn giả thiết (số nguyên, số hữu tỉ,...).

Ví dụ 1: Biết $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-4}dx = a\ln 3 + b\ln 2,\ (a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $S=2a+b$.

A. $S=\frac{5}{2}$ B. $S=\frac{3}{2}$ C. $S=-\frac{1}{2}$ D. $S=-\frac{5}{4}$

Lời giải





Nhập vào màn hình $\int_0^1 \frac{2X+1}{X^2-4}dx$:

[∫□] [□/□] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [▼] [0] [▲] [1]

Ấn [=] máy hiện kết quả là –0,5623351446, gán vào biến nhớ A: [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)]

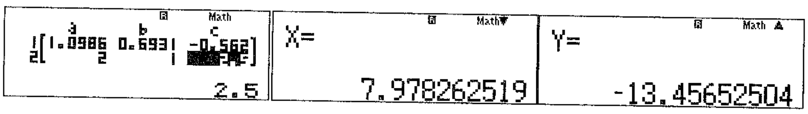
Giả thiết trở thành $a\ln 3 + b\ln 2 = \text{A}$.

<u>**Cách 1:**</u> Ta kiểm tra đáp án bằng giải hệ $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = \text{A} \\ 2a+b=S \end{cases}$ với S là một trong các đáp án A, B, C, D. Kết quả đúng cho ta các giá trị $a,b\in\mathbb{Q}$.

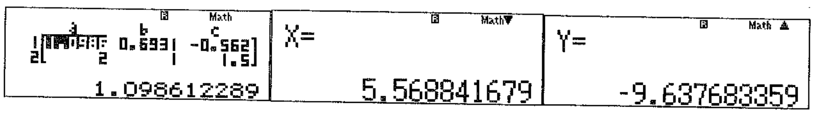
> **STUDY TIPS**
>
> Qua việc tính $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-4}dx$ rồi gán kết quả vào biến nhớ A và kết hợp với đáp án. Ta được hệ $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = \text{A} \\ 2a+b=S \end{cases}$ là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể giải bằng tính năng EQN: [MODE] [5] [1], nếu hai nghiệm a,b tìm được là số hữu tỉ $(a,b\in\mathbb{Q})$ thì chọn đáp án tương ứng.

– *Phương án A:* $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = \text{A} \\ 2a+b=\frac{5}{2} \end{cases}$. Sử dụng [MODE] [5] (EQN) [1], nhập các hệ số của hệ phương trình.

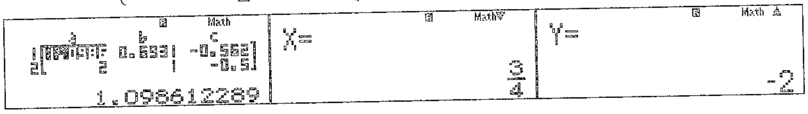
Ta tìm được $\begin{cases} a=7,978262519 \\ b=-13,45652504 \end{cases} \rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.



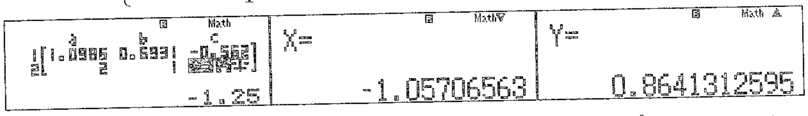
– *Phương án B:* $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = \text{A} \\ 2a+b=\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=5,568841679 \\ b=-9,637683359 \end{cases} \rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại B.



– *Phương án C:* $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = A \\ 2a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$. Chọn C.



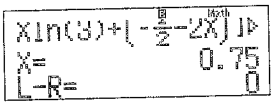
– *Phương án D:* $\begin{cases} a\ln 3 + b\ln 2 = A \\ 2a + b = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1,05706563 \\ b = 0,8641312595 \end{cases} \rightarrow a, b \notin \mathbb{Q}$. Loại D.



<u>Cách 2:</u> Ta cũng có thể dùng SOLVE để xác định đáp án. Chẳng hạn, đối với đáp án C, ta có $S = -\dfrac{1}{2} \rightarrow 2a + b = -\dfrac{1}{2} \rightarrow b = -\dfrac{1}{2} - 2a$.

Từ $a\ln 3 + b\ln 2 = A \Leftrightarrow a\ln 3 + \left(-\dfrac{1}{2} - 2a\right)\ln 2 = A$. Coi $a = X$.

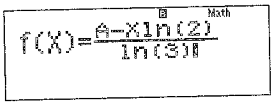
Nhập vào màn hình $X\ln(3) + \left(-\dfrac{1}{2} - 2X\right)\ln(2) - A$: [ALPHA] [)] [ln] [3] [)] [+] [(] [(-)] [1] [▭/▭] [2] [▶] [−] [2] [ALPHA] [)] [)] [ln] [2] [)] [−] [ALPHA] [(-)]



Ấn [SHIFT] [CALC], ấn [=], máy hỏi Solve for X. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0,75.

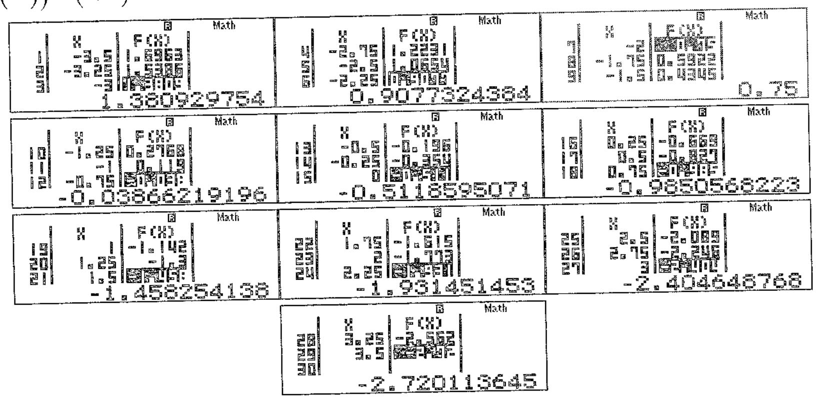
Suy ra $X = \dfrac{3}{4} \rightarrow a = \dfrac{3}{4} \rightarrow b = -\dfrac{1}{2} - 2.\dfrac{3}{4} = -2 \rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$. Chọn B.

<u>Cách 3:</u> Từ $a\ln 3 + b\ln 2 = A \rightarrow a = \dfrac{A - b.\ln 2}{\ln 3} \rightarrow f(x) = \dfrac{A - x.\ln 2}{\ln 3}$. Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1]. Nhập vào màn hình hàm số $f(X) = \dfrac{A - X\ln(2)}{\ln(3)}$:



[▭/▭] [ALPHA] [(-)] [−] [ALPHA] [)] [ln] [2] [)] [▽] [ln] [3] [)]

Chọn giá trị $Start = -14.0,25; End = 14.0,25; Step = 0,25$. Từ bảng giá trị, dò cặp $(X; F(X)) \equiv (b; a)$ thỏa mãn $a, b \in \mathbb{Q}$.



STUDY TIPS

Ở bài toán này các đáp án có dạng $10.0,25$; $6.0,25$; $-2.0,25$; $-5.0,25$. Đây là tích của các số nguyên với 0,25. Vậy ta sẽ chọn giá trị $Step = 0,25$.

Sau khi xác định bước nhảy $Step = k$, ta thường chọn $Start = -14k$ và $End = 14k$ (bởi tại chế độ [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1] bảng chỉ hiển thị được tối đa 30 giá trị, mặt khác ở dạng toán này, đáp án các giá trị a,b,c thường không quá lớn).

Quan sát bảng giá trị, ta tìm được cặp $(X; F(X)) = \left(-2; \dfrac{3}{4}\right)$ thỏa mãn.

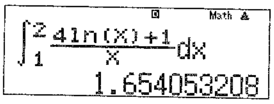
Suy ra $b = -2, a = \dfrac{3}{4} \rightarrow S = 2a + b = -\dfrac{1}{2}$.

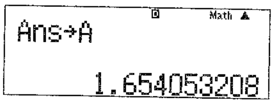
Đáp án B.

Ví dụ 2: Cho $\int_1^2 \frac{4\ln x+1}{x}dx = a\ln^2 2 + b\ln 2$ và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $S=4a+b$, kết quả **đúng** là

A. $S=3$ B. $S=9$ C. $S=7$ D. $S=5$

Lời giải





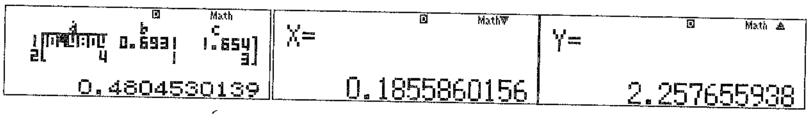
Nhập $\int_1^2 \frac{4\ln(X)+1}{X}dx$: [∫] [▭/▭] [4] [ln] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [▽] [ALPHA] [)] [▽] [1] [△] [2].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1,654053208. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)] $(\text{Ans}\to\text{A})$. Khi đó ta có $a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A}$.

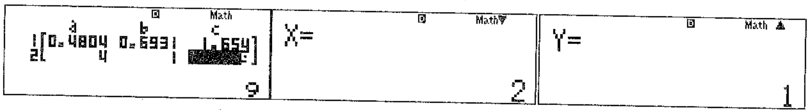
Cách 1: Dùng [MODE] [5] (EQN) [1]

Xét hệ phương trình $\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=S \end{cases}$ với S tương ứng với 4 đáp án.

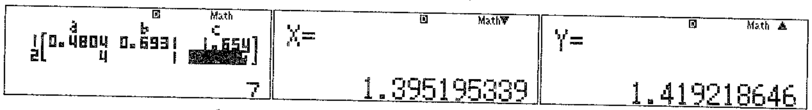
– *Phương án A:* $S=3\to\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=3 \end{cases}\to\begin{cases} a=0,1855860156 \\ b=2,257655938 \end{cases}\to a,b\notin\mathbb{Z}$. Loại A.



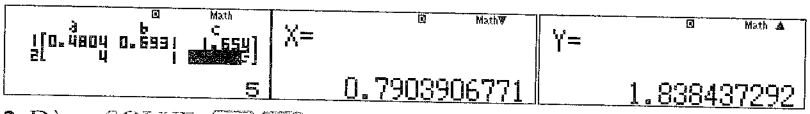
– *Phương án B:* $S=9\to\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=9 \end{cases}\to\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}\to a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.



– *Phương án C:* $S=7\to\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=7 \end{cases}\to\begin{cases} a=1,395195339 \\ b=1,419218646 \end{cases}\to a,b\notin\mathbb{Z}$. Loại C.



– *Phương án D:* $S=5\to\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=5 \end{cases}\to\begin{cases} a=0,7903906771 \\ a=1,838437292 \end{cases}\to a,b\notin\mathbb{Z}$. Loại D.



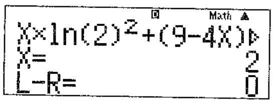
STUDY TIPS

Qua việc tính $\int_1^2 \frac{4\ln x+1}{x}dx$ rồi gán kết quả vào biến nhớ A và kết hợp với đáp án. Ta được hệ $\begin{cases} a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A} \\ 4a+b=S \end{cases}$ là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể giải bằng tính năng EQN: [MODE] [5] [1], nếu hai nghiệm tìm được đều nguyên $(a,b\in\mathbb{Z})$ thì chọn đáp án tương ứng.

Cách 2: Dùng SOLVE: [SHIFT] [CALC]

Với phương án B, ta có $S=9\to4a+b=9\to b=9-4a$. Khi đó $a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A}$ $\Leftrightarrow a\ln^2 2+(9-4a)\ln 2-\text{A}=0$. Nhập vào màn hình $\text{X}\times\ln^2 2+(9-4\text{X})\times\ln 2-\text{A}$:

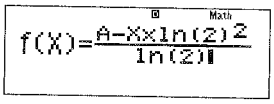
[ALPHA] [)] [×] [ln] [2] [)] [x²] [+] [(] [9] [−] [4] [ALPHA] [)] [)] [×] [ln] [2] [)] [−] [ALPHA] [(−)].



Ấn [SHIFT] [CALC], ấn [=], máy hỏi Solve for X. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2. Vậy $a=2\to b=9-4.2=1$ thỏa mãn $a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.

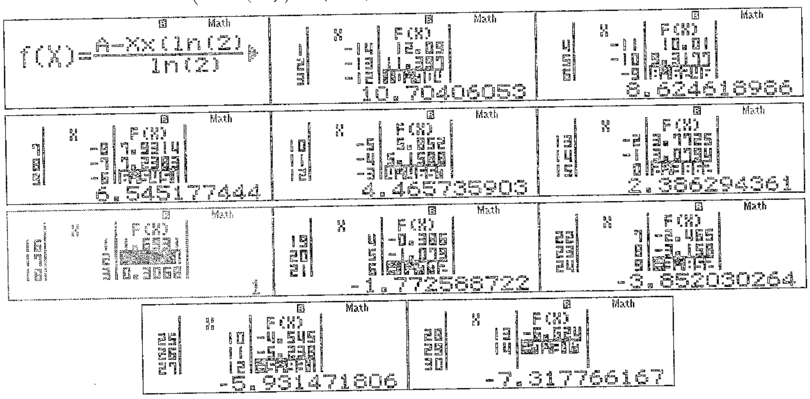
Cách 3: Dùng TABLE: [MODE] [7]

Từ $a\ln^2 2+b\ln 2=\text{A}\to b=\frac{\text{A}-a\ln^2 2}{\ln 2}\to f(x)=\frac{\text{A}-x.\ln^2 2}{\ln 2}$. Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1]. Nhập vào màn hình hàm số $f(\text{X})=\frac{\text{A}-\text{X}\times(\ln(2))^2}{\ln(2)}$:



[▭/▭] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [)] [×] [(] [ln] [2] [)] [)] [x²] [▽] [ln] [2] [)]

Chọn $Start=-14, End=14, Step=1$. Trên bảng giá trị, ta dò cặp $(X;F(X))\equiv(a;b)$ nguyên. Ta tìm được $(X;F(X))=(2;1)$.



Suy ra $a=2, b=1 \rightarrow S=4a+b=9$.

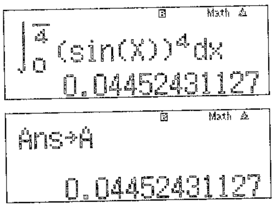
Đáp án B.

> **STUDY TIPS**
>
> Nếu giả thiết bài toán cho $a,b\in\mathbb{Z}$ thì ta **thường chọn** các giá trị $Start=-14$, $End=14$ và $Step=1$. Nếu vẫn chưa tìm được các giá trị thỏa mãn thì ta xét các giá trị Start, End khác. Chẳng hạn $Start=-44$, $End=-15$, $Step=1$ hoặc $Start=15$, $End=44$, $Step=1$ (do bảng hiển thị được tối đa 30 (dòng) giá trị.

Ví dụ 3: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x dx=\pi a+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $M=a+b$

A. $M=\frac{11}{32}$ B. $M=-\frac{5}{32}$ C. $M=\frac{5}{32}$ D. $M=-\frac{11}{32}$

Lời giải



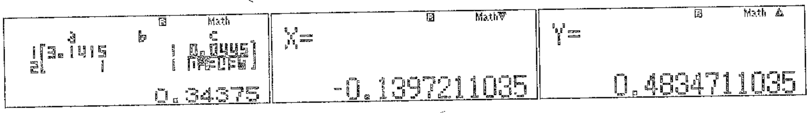
Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4. Nhập vào màn hình $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(X))^4 dx$:

∫ (sin ALPHA))) x² 4 ▼ 0 ▲ SHIFT ×10ˣ ÷ 4

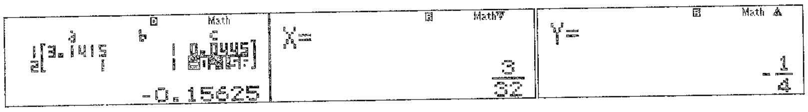
Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0,04452431127. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn Ans SHIFT RCL (−) $(Ans\rightarrow A)$. Giả thiết trở thành $\pi a+b=A$.

<u>Cách 1:</u> Dùng MODE 5 (EQN) 1

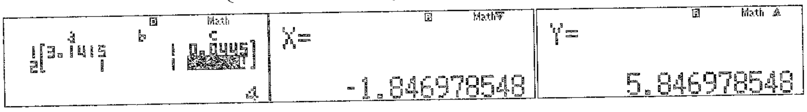
– *Phương án A:* $M=\frac{11}{32}\rightarrow\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=\frac{11}{32}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-0,1397211035\\ b=0,4834711035\end{cases}\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.



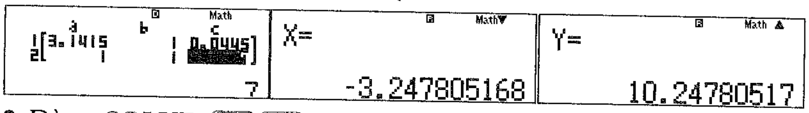
– *Phương án B:* $M=-\frac{5}{32}\rightarrow\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=-\frac{5}{32}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{32}\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}\rightarrow a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.



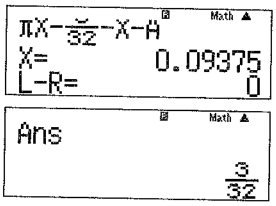
– *Phương án C:* $M=4\rightarrow\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-1,846978548\\ b=5,846978548\end{cases}\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại C.



– *Phương án D:* $M=7\rightarrow\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=7\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-3,247805168\\ b=10,24780517\end{cases}\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$.



Cách 2: Dùng SOLVE: SHIFT CALC



Với phương án B, ta có $a+b=-\frac{5}{32}\Leftrightarrow b=-\frac{5}{32}-a$. Khi đó, từ giả thiết $\pi a+b=A$ ta có $\pi a-\frac{5}{32}-a-A=0$. Nhập vào màn hình $\pi X-\frac{5}{32}-X-A$:

SHIFT ×10ˣ ALPHA) − 5 ▭ 3 2 ▶ − ALPHA) − ALPHA (−)

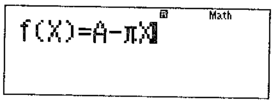
Ấn SHIFT CALC, ấn =, máy hỏi Solve for X. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0,09375.

Suy ra $a=0,09375=\frac{3}{32}\rightarrow b=-\frac{1}{4}\rightarrow a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.

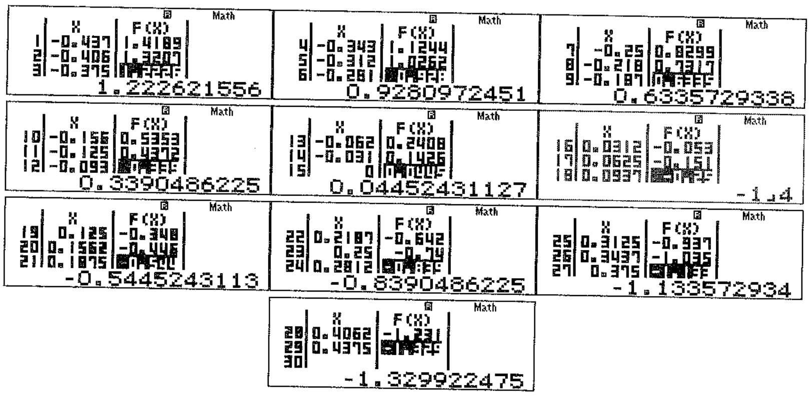
Cách 3: Dùng TABLE: MODE 7

Từ $\pi a+b=A\rightarrow b=A-\pi a\rightarrow f(x)=A-\pi x$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập vào màn hình hàm số $f(X)=A-\pi X$: ALPHA (−) − SHIFT ×10ˣ ALPHA)



Chọn $\text{Start}=-\frac{14}{32},\text{End}=\frac{14}{32},\text{Step}=\frac{1}{32}$. Trên bảng giá trị, ta dò cặp $(X;F(X))\equiv(a;b)$ thỏa mãn $X,F(X)\in\mathbb{Q}$.



STUDY TIPS

Ta thấy các đáp án lần lượt có dạng $11.\frac{1}{32};-5.\frac{1}{32};5.\frac{1}{32}$ và $-11.\frac{1}{32}$, là tích của $\frac{1}{32}$ với một số nguyên. Theo nhận xét ở **ví dụ 1**, ta sẽ chọn $\text{Start}=-\frac{14}{32},\text{End}=\frac{14}{32}$ và $\text{Step}=\frac{1}{32}$.

Ta tìm được $(X;F(X))=\left(\frac{3}{32};-\frac{1}{4}\right)$ thỏa mãn. Khi đó $a=\frac{3}{32},b=-\frac{1}{4}\rightarrow a+b=-\frac{5}{32}$

Đáp án B.

Ví dụ 4: Biết $\int_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}dx=a+\ln\frac{b}{2}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a-2b$

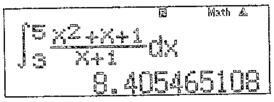
A. $P=-2$ B. $P=5$ C. $P=2$ D. $P=10$

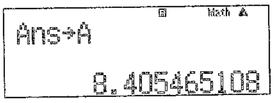
Lời giải

Nhập vào màn hình $\int_3^5\frac{X^2+X+1}{X+1}dx$:

∫ ▭ ALPHA) x² + ALPHA) + 1 ▽ ALPHA) + 1 ▽ 3 △ 5

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 8,405465108. Gán kết quả vào biến nhớ A, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(-)] $(\text{Ans} \to \text{A})$. Giả thiết trở thành $a+\ln\frac{b}{2}=\text{A}$.





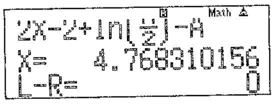
STUDY TIPS

Ta thấy hệ $\begin{cases} a+\ln\frac{b}{2}=\text{A} \\ a-2b=P \end{cases}$ không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn nên bài toán không thể dùng chức năng [MODE] (EQN) [5] [1] để giải.

<u>**Cách 1:**</u> Dùng SOLVE: [SHIFT] [CALC]

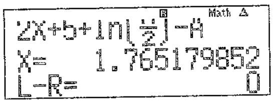
– *Phương án A:* $P=-2 \to a-2b=-2 \to a=2b-2$. Khi đó $2b-2+\ln\frac{b}{2}=\text{A}$.

Nhập vào màn hình $2\text{X}-2+\ln\left(\frac{\text{X}}{2}\right)-\text{A}$. Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=4{,}768310156=b \to b\notin\mathbb{Z}$. Loại A.



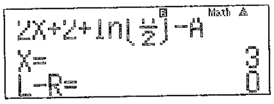
– *Phương án B:* $P=5 \to a-2b=5 \to a=2b+5$. Suy ra $2b+5+\ln\frac{b}{2}=\text{A}$.

Nhập vào màn hình $2\text{X}+5+\ln\left(\frac{\text{X}}{2}\right)-\text{A}$. Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=1{,}765179852=b \to b\notin\mathbb{Z}$. Loại B.



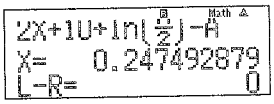
– *Phương án C:* $P=2 \to a-2b=2 \to a=2b+2$. Suy ra $2b+2+\ln\frac{b}{2}=\text{A}$.

Nhập vào màn hình $2\text{X}+2+\ln\left(\frac{\text{X}}{2}\right)-\text{A}$. Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=3=b \to a=8 \to a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn C.



– *Phương án D:* $P=10 \to a-2b=10 \to a=2b+10$. Suy ra $2b+10+\ln\frac{b}{2}=\text{A}$.

Nhập vào màn hình $2\text{X}+2+\ln\left(\frac{\text{X}}{2}\right)-\text{A}$. Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=0{,}247492879=b \to b\notin\mathbb{Z}$. Loại D.

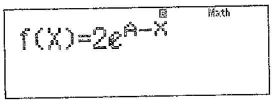


<u>**Cách 2:**</u> Dùng TABLE: [MODE] [7]

Từ giả thiết $\text{A}=a+\ln\frac{b}{2} \Leftrightarrow \text{A}-a=\ln\frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{2}=e^{\text{A}-a} \Leftrightarrow b=2e^{\text{A}-a} \to f(x)=2e^{\text{A}-x}$.

Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1].

Nhập vào màn hình hàm số $f(\text{X})=2e^{\text{A}-\text{X}}$: [2] [SHIFT] [ln] [ALPHA] [(-)] [−] [ALPHA] [)]

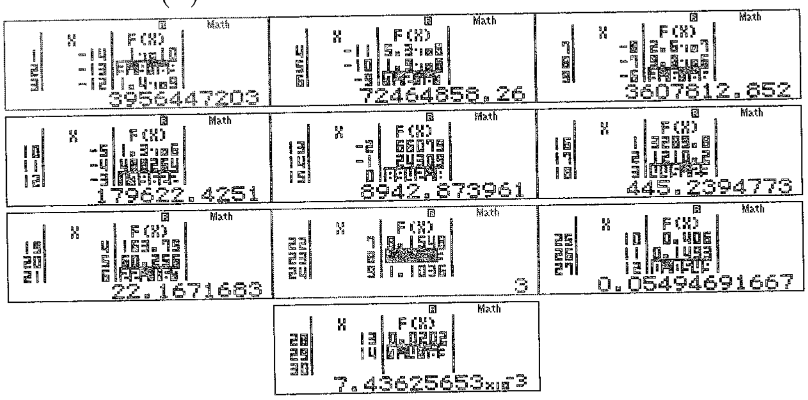


Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Trên bảng giá trị, dò cặp $(\text{X};\text{F}(\text{X}))\equiv(a;b)$ sao cho $\text{X}\in\mathbb{Z}$ và $\text{F}(\text{X})\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIPS

Do $a,b\in\mathbb{Z} \to x,f(x)\in\mathbb{Z}$.

Khi đó ta chọn Start, End, Step lần lượt là −14;14;1.



Từ bảng giá trị, ta tìm được $(X;F(X))=(-13;3956447203)$ và $(X;F(X))=(8;3)$.

* $a=-13;b=3956447203\rightarrow S=a-2b=-7912894419$. Không có đáp án phù hợp.

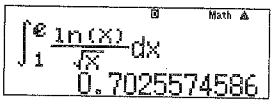
* $a=8;b=3\rightarrow S=a-2b=2$. Đáp án C phù hợp.

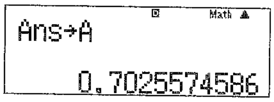
Đáp án C.

Ví dụ 5: Cho tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=a\sqrt{e}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=ab$

A. $P=4$ B. $P=-8$ C. $P=-4$ D. $P=8$

Lời giải





Nhập vào máy $\int_1^e \frac{\ln(X)}{\sqrt{X}}dx$, ấn [∫] [ln] [ALPHA] [)] [)] [÷] [√] [ALPHA] [)] [▼] [1] [▲] [ALPHA] [×10ˣ]. Ấn [=], máy hiện kết quả 0,7025574586. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)] $(\text{Ans}\rightarrow \text{A})$. Giả thiết trở thành $\text{A}=a\sqrt{e}+b$.

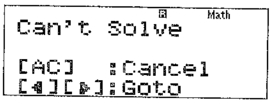
Cách 1: Dùng SOLVE: [SHIFT] [CALC]

STUDY TIPS

Khi sử dụng SOLVE: [SHIFT] [CALC] ta cần tìm tất cả các nghiệm có thể có của phương trình, tránh trường hợp nghiệm bị bỏ sót như ở phương án B (Cách 1).

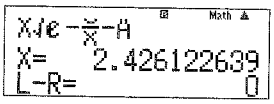
– *Phương án A:* $P=ab=4\rightarrow b=\frac{4}{a}$. Giả thiết $\text{A}=a\sqrt{e}+b\Leftrightarrow a\sqrt{e}+\frac{4}{a}-\text{A}=0$.

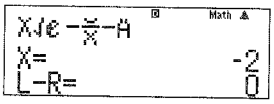
Nhập $\text{X}\sqrt{e}+\frac{4}{\text{X}}-\text{A}$: [ALPHA] [)] [√] [ALPHA] [×10ˣ] [▶] [+] [4] [÷] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [(−)]



Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện Can't SOLVE. Vậy phương trình không có nghiệm trên $\mathbb{R}$. Loại A.

– *Phương án B:* $P=ab=-8\rightarrow b=-\frac{8}{a}$. Giả thiết $\text{A}=a\sqrt{e}+b\Leftrightarrow a\sqrt{e}-\frac{8}{a}-\text{A}=0$.



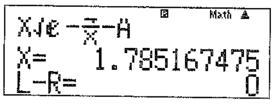


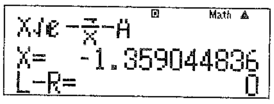
Nhập $\text{X}\sqrt{e}-\frac{8}{\text{X}}-\text{A}$: [ALPHA] [)] [√] [ALPHA] [×10ˣ] [▶] [−] [8] [÷] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [(−)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=2,426122639=a\rightarrow a\notin\mathbb{Z}$.

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [(−)] [1] [=], màn hình hiện $\text{X}=-2=a\rightarrow b=4\rightarrow a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $P=ab=-4\rightarrow b=-\frac{4}{a}$. Giả thiết $\text{A}=a\sqrt{e}+b\Leftrightarrow a\sqrt{e}-\frac{4}{a}-\text{A}=0$.





Nhập $\text{X}\sqrt{e}-\frac{4}{\text{X}}-\text{A}$: [ALPHA] [)] [√] [ALPHA] [×10ˣ] [▶] [−] [4] [÷] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [(−)]

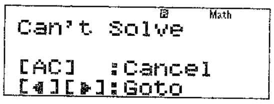
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện $\text{X}=1,785167475=a\rightarrow a\notin\mathbb{Z}$.

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [(−)] [1] [=], màn hình hiện $\text{X}=-1,359044836=a\rightarrow a\notin\mathbb{Z}$

Loại C.

– *Phương án D:* $P=ab=8\rightarrow b=\frac{8}{a}$. Giả thiết $\text{A}=a\sqrt{e}+b\Leftrightarrow a\sqrt{e}+\frac{8}{a}-\text{A}=0$.

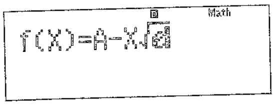
Nhập $\text{X}\sqrt{e}+\frac{8}{\text{X}}-\text{A}$: [ALPHA] [)] [√] [ALPHA] [×10ˣ] [▶] [+] [8] [÷] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [(−)]



Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE) [=] [=], màn hình hiện Can't Solve. Vậy phương trình không có nghiệm trên $\mathbb{R}$. Loại D.

Cách 2: Dùng TABLE: [MODE] [7]

Từ giả thiết $\text{A}=a\sqrt{e}+b\Leftrightarrow b=\text{A}-a\sqrt{e}\rightarrow f(x)=\text{A}-x\sqrt{e}$. Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1].

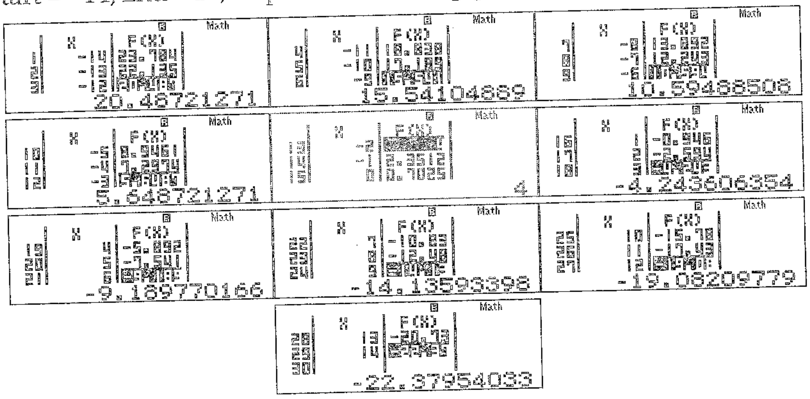


STUDY TIPS

Do $a,b\in\mathbb{Z}\to x,f(x)\in\mathbb{Z}$.
Khi đó ta chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$

Nhập vào màn hình hàm số $f(X)=A-X\sqrt{e}$: [ALPHA] [(-)] [—] [ALPHA] [)] [√] [ALPHA] [×10^x].

Với Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Ta có bảng giá trị dưới đây:



Từ bảng giá trị, ta tìm được cặp $(X;F(X))=(-2;4)$ nguyên.

Suy ra $a=-2;b=4$. Vậy $P=ab=-8$.

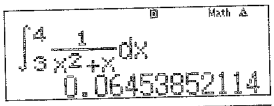
Đáp án B.

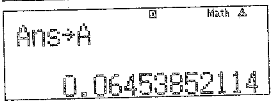
Ví dụ 6: Biết $\int_3^4\frac{dx}{x^2+x}=a\ln2+b\ln3+c\ln5$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b+c$

A. $S=8$ B. $S=-2$ C. $S=2$ D. $S=0$

Lời giải

Nhập vào máy $\int_3^4\frac{1}{X^2+X}dx$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,06453852114$. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(-)] $(Ans\to A)$.





Khi đó $A=a\ln2+b\ln3+c\ln5$.

STUDY TIPS

Do $\begin{cases}a\ln2+b\ln3+c\ln5=A\\a+b+c=S\end{cases}$ là hệ hai phương trình 3 ẩn, nên khó có thể biến đổi về phương trình một ẩn để sử dụng SOLVE. Tuy nhiên, ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa a và b, cụ thể $b=f(a)$. Coi $a=x\to b=f(x)$, sử dụng TABLE và nhập vào máy hàm số $f(X)$ với $X\in\mathbb{Z}$. Chọn Start, End, Step lần lượt là $-14;14;1$. Quan sát bảng và tìm các cặp giá trị $X,F(X)$ nguyên trong bảng. Đó tương ứng là các giá trị a và b.

<u>Cách 1:</u> Dùng TABLE: [MODE] [7]

– *Phương án A:* $S=8\to a+b+c=8\to c=8-a-b$. Khi đó giả thiết trở thành

$$A=a\ln2+b\ln3+(8-a-b)\ln5\to b=\frac{A-a\ln\frac{2}{5}-8\ln5}{\ln\frac{3}{5}}\to f(x)=\frac{A-x\ln\frac{2}{5}-8\ln5}{\ln\frac{3}{5}}$$

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1], nhập $f(X)=\frac{A-X\ln(2\div5)-8\ln(5)}{\ln(3\div5)}$:

[▭] [ALPHA] [(-)] [—] [ALPHA] [)] [ln] [2] [÷] [5] [)] [—] [8] [ln] [5] [)] [▼] [ln] [3] [÷] [5] [)]

Nhập Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp giá trị $(X;F(X))$ nguyên. Loại A.

– *Phương án B:* $S=-2\to a+b+c=-2\to c=-2-a-b$. Khi đó giả thiết trở thành

$$A=a\ln2+b\ln3+(-2-a-b)\ln5\to b=\frac{A-a\ln\frac{2}{5}+2\ln5}{\ln\frac{3}{5}}\to f(x)=\frac{A-x\ln\frac{2}{5}+2\ln5}{\ln\frac{3}{5}}$$

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1], nhập $f(X)=\frac{A-X\ln(2\div5)+2\ln(5)}{\ln(3\div5)}$:

[▭] [ALPHA] [(-)] [—] [ALPHA] [)] [ln] [2] [÷] [5] [)] [+] [2] [ln] [5] [)] [▼] [ln] [3] [÷] [5] [)]

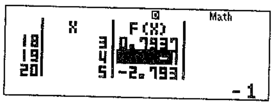
Nhập Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp giá trị $(X;F(X))$ nào nguyên. Loại B.

– *Phương án C:* $S=2\to a+b+c=2\to c=2-a-b$. Khi đó giả thiết trở thành

$$A=a\ln 2+b\ln 3+(2-a-b)\ln 5\to b=\frac{A-a\ln\frac{2}{5}-2\ln 5}{\ln\frac{3}{5}}\to f(x)=\frac{A-x\ln\frac{2}{5}-2\ln 5}{\ln\frac{3}{5}}$$

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], nhập $f(X)=\frac{A-X\ln(2\div 5)-2\ln(5)}{\ln(3\div 5)}$:

[▭/▭] [ALPHA] [(–)] [–] [ALPHA] [)] [ln] [2] [÷] [5] [)] [–] [2] [ln] [5] [)] [▽] [ln] [3] [÷] [5] [)]



Nhập Start = –14, End = 14, Step = 1. Quan sát bảng giá trị, tìm được $X=4, F(X)=-1$ nguyên, tức $a=4, b=-1\to c=-1\in\mathbb{Z}$. Chọn C.

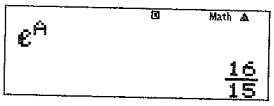
– *Phương án D:* $S=0\to a+b+c=0\to c=-a-b$. Khi đó giả thiết trở thành

$$A=a\ln 2+b\ln 3+(-a-b)\ln 5\to b=\frac{A-a\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{5}}\to f(x)=\frac{A-x\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{3}{5}}.$$

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], nhập $f(X)=\frac{A-X\ln(2\div 5)}{\ln(3\div 5)}$:

[▭/▭] [ALPHA] [(–)] [–] [ALPHA] [)] [ln] [2] [÷] [5] [)] [▽] [ln] [3] [÷] [5] [)]

Nhập Start = –15, End = 0, Step = 1 và Start = 0, End = 15, Step = 1. Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp giá trị $(X;F(X))$ nào nguyên. Loại D.



Cách 2: Ta thấy $A=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5=\ln 2^a+\ln 3^b+\ln 5^c=\ln(2^a.3^b.5^c)$

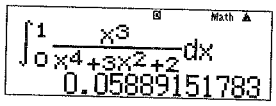
$$\Leftrightarrow 2^a.3^b.5^c=e^A=\frac{16}{15}=\frac{2^4}{3.5}=2^4.3^{-1}.5^{-1}\to\begin{cases}a=4\\ b=c=-1\end{cases}\to S=a+b+c=2.$$

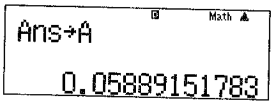
Đáp án C.

> Ví dụ 7: Cho $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=\ln a+b\ln c$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+2b+c$
>
> A. $S=3$ B. $S=2$ C. $S=0$ D. $S=-3$

Lời giải

Nhập $\int_0^1\frac{X^3}{X^4+3X^2+2}dx$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0,05889151783. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [(–)] $(Ans\to A)$.





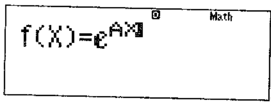
Giả thiết trở thành $A=\ln a+b\ln c$

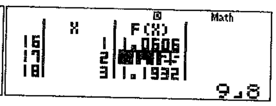
$\Leftrightarrow a.c^b=e^A\Leftrightarrow(a.c^b)^x=(e^A)^x=\Leftrightarrow a^x.c^{bx}=e^{Ax}$ với $x\in\mathbb{Z}$.

Ấn [MODE] [7] (TABLE) và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], nhập vào màn hình $f(X)=e^{AX}$:

[ALPHA] [×10ˣ] [2x] [ALPHA] [(–)] [ALPHA] [)]

Nhập Start = –14, End = 14, Step = 1. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $X=2, F(X)=1,125=\frac{9}{8}$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Q}$.





STUDY TIPS

* **Chẳng hạn,** nếu $S=3$ thì $a+2b+c=3\Leftrightarrow b=\frac{3-a-c}{2}$.

Khi đó $\int_0^1\frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=A$ $=\ln a+\frac{3-a-c}{2}.\ln c$ và rất khó có thể biểu diễn a theo c (hoặc c theo a) như ví dụ 5 để lập bảng giá trị.

* Do $b\in\mathbb{Q}$ nên tồn tại một số $x\in\mathbb{Z}$ sao cho $bx\in\mathbb{Z}$. Mà $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên $a^x.c^{bx}\in\mathbb{Q}$ $\to e^{Ax}\in\mathbb{Q}$. Như vậy, ta chỉ cần nhập hàm $f(X)=e^{AX}$ với $X\in\mathbb{Z}$ và quan sát bảng giá trị, tìm trên bảng các giá trị $X\in\mathbb{Z}$ và $F(X)\in\mathbb{Q}$, đó cũng tương ứng là giá trị của x và $a^x.c^{bx}\to a,b,c$

Tức là $a^2.c^{2b}=\frac{9}{8}=\frac{3^2}{2^3}=3^2.2^{-3}=3^2.2^{2.\frac{-3}{2}}\rightarrow a=3,b=-\frac{3}{2},c=2\rightarrow S=a+2b+c=2$.

Đáp án B.

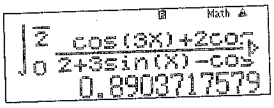
Ví dụ 8: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x+2\cos x}{2+3\sin x-\cos 2x}dx=a\ln 2+b\ln 3+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

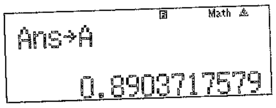
Tính $P=a+b+c$

A. $P=-3$ B. $P=-2$ C. $P=2$ D. $P=1$

Lời giải

Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4. Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3X)+2\cos(X)}{2+3\sin(X)-\cos(2X)}dx$ vào máy, ấn = máy hiện kết quả bằng 0,8903717579. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn Ans SHIFT RCL (-) $(\text{Ans}\rightarrow\text{A})$. Giả thiết trở thành $\text{A}=a\ln 2+b\ln 3+c$.





Cách 1: Dùng TABLE: MODE 7

– *Phương án A:* $P=a+b+c=-3\rightarrow c=-3-a-b\rightarrow \text{A}=a(\ln 2-1)+b(\ln 3-1)-3$

$\rightarrow b=\frac{\text{A}+3-a\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}\rightarrow f(x)=\frac{\text{A}+3-x\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập hàm số $\text{f}(\text{X})=\frac{\text{A}+3-\text{X}\ln(2\div e)}{\ln(3\div e)}$. Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$.

Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp $(\text{X};\text{F}(\text{X}))\equiv(a;b)$ thỏa mãn $\text{X}\in\mathbb{Z}$, $\text{F}(\text{X})\in\mathbb{Z}$.

– *Phương án B:* $P=a+b+c=-2\rightarrow c=-2-a-b\rightarrow \text{A}=a(\ln 2-1)+b(\ln 3-1)-2$

$\rightarrow b=\frac{\text{A}+2-a\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}\rightarrow f(x)=\frac{\text{A}+2-x\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập hàm số $\text{f}(\text{X})=\frac{\text{A}+2-\text{X}\ln(2\div e)}{\ln(3\div e)}$. Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$.

Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp $(\text{X};\text{F}(\text{X}))\equiv(a;b)$ thỏa mãn $\text{X}\in\mathbb{Z}$, $\text{F}(\text{X})\in\mathbb{Z}$.

– *Phương án C:* $P=a+b+c=2\rightarrow c=2-a-b\rightarrow \text{A}=a(\ln 2-1)+b(\ln 3-1)+2$

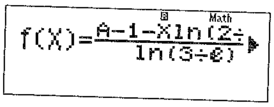
$\rightarrow b=\frac{\text{A}-2-a\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}\rightarrow f(x)=\frac{\text{A}-2-x\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập hàm số $\text{f}(\text{X})=\frac{\text{A}-2-\text{X}\ln(2\div e)}{\ln(3\div e)}$. Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$.

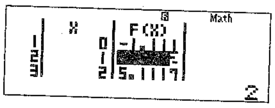
Quan sát bảng giá trị, ta không tìm được cặp $(\text{X};\text{F}(\text{X}))\equiv(a;b)$ thỏa mãn $\text{X}\in\mathbb{Z}$, $\text{F}(\text{X})\in\mathbb{Z}$.

– *Phương án D:* $P=a+b+c=1\to c=1-a-b\to A=a(\ln 2-1)+b(\ln 3-1)+1$

$\to b=\dfrac{A-1-a\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}\to f(x)=\dfrac{A-1-x\ln\frac{2}{e}}{\ln\frac{3}{e}}$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1.



Nhập hàm số $f(X)=\dfrac{A-1-X\ln(2\div e)}{\ln(3\div e)}$. Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$.



Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $(X;F(X))=(1;2)$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}, F(X)\in\mathbb{Z}$. Chọn D.

Cách 2: Từ $A=a\ln 2+b\ln 3+c=\ln 2^a+\ln 3^b+\ln e^c=\ln(2^a3^be^c)\Leftrightarrow 2^a3^be^c=e^A$

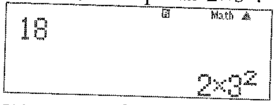
$\Leftrightarrow 2^a3^b=e^{A-c}\to f(x)=e^{A-x}$ với $f(x)=2^a.3^b$.

Do $a,b\in\mathbb{Z}$ nên $2^a.3^b\in\mathbb{Q}\to f(x)\in\mathbb{Q}$. Như vậy, ta sử dụng TABLE, nhập vào máy hàm số $f(X)=e^{A-X}$, do $c\in\mathbb{Z}\to x\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn Start $=-14$, End $=14$ và Step $=1$. Tìm trên bảng các giá trị $X\in\mathbb{Z}$ và $f(X)\in\mathbb{Q}$, đó tương ứng là c và 2^a3^b.

STUDY TIPS

Để phân tích 18 ra thừa số nguyên tố, ta dùng lệnh SHIFT °'" (FACT).

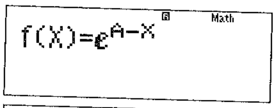
Ấn 1 8 = SHIFT °'", màn hình hiện kết quả là 2×3^2.

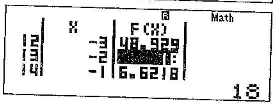


Vậy $18=2.3^2$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập hàm số $f(X)=e^{A-X}$.

Cho Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Ấn =, bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $X=-2\in\mathbb{Z}$ và $F(X)=18\in\mathbb{Q}$. Khi đó $c=-2$ và $2^a.3^b=18$





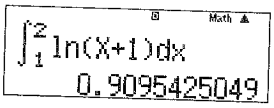
$\to 2^a.3^b=2^1.3^2\to\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$. Vậy $P=a+b+c=1$.

Đáp án D.

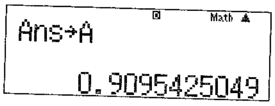
Ví dụ 9: Cho tích phân $\int_1^2\ln(x+1)dx=a\ln 3+b\ln 2+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$

A. $S=0$ B. $S=1$ C. $S=2$ D. $S=3$

Lời giải



Nhập vào máy $\int_1^2\ln(X+1)dx$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0,9095425049. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn Ans SHIFT RCL (-) $(\text{Ans}\to A)$.

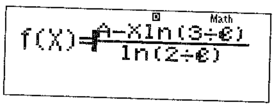


Giả thiết tương đương với $A=a\ln 3+b\ln 2+c$.

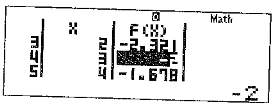
Cách 1: Dùng TABLE: MODE 7

Phương án A: $P=a+b+c=0\to c=-a-b\to A=a(\ln 3-1)+b(\ln 2-1)$

$\to b=\dfrac{A-a\ln\frac{3}{e}}{\ln\frac{2}{e}}\to f(x)=\dfrac{A-x\ln\frac{3}{e}}{\ln\frac{2}{e}}$. Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1.



Nhập vào màn hình $f(X)=\dfrac{A-X\ln(3\div e)}{\ln(2\div e)}$. Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$.



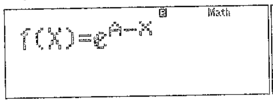
Quan sát bảng giá trị, ta tìm được cặp $(X;F(X))\equiv(3;-2)$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Suy ra $a=3,b=-2$. Chọn A.

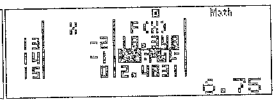
Cách 2: Từ $A = a\ln 3 + b\ln 2 + c = \ln 3^a + \ln 2^b + \ln e^c = \ln\left(3^a.2^b.e^c\right)$

$\Leftrightarrow 3^a.2^b.e^c = e^A \Leftrightarrow 3^a.2^b = e^{A-c} \rightarrow f(x) = e^{A-x}$.

Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1].

Nhập vào màn hình hàm số $f(X) = e^{A-X}$. Nhập Start $= -14$ End $= 14$, Step $= 1$. Ấn [=], bảng giá trị hiện ra.





Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $X = -1 \in \mathbb{Z}$ và $F(X) = 6{,}75 = \dfrac{27}{4} \in \mathbb{Q}$. Khi đó

$c = -1$ và $3^a.2^b = \dfrac{27}{4} \rightarrow 3^a.2^b = \dfrac{3^3}{2^2} = 3^3.2^{-2} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. Vậy $P = a + b + c = 0$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

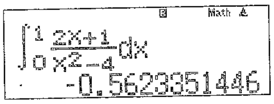
Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $3^a.2^b \in \mathbb{Q}$, mà $3^a 2^b = e^{A-c}$ nên $e^{A-c} \in \mathbb{Q}$ $\rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$. Dùng TABLE, nhập vào máy hàm số $f(X) = e^{A-X}$, $c \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Z}$

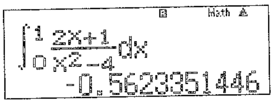
Khi đó ta chọn các giá trị Start $= -14$, End $= 14$, bước nhảy Step $= 1$. Dò trên bảng các giá trị $X \in \mathbb{Z}$ và $f(X) \in \mathbb{Q}$, đó tương ứng là c và $3^a.2^b$

Ví dụ 10: Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-4}dx = \frac{a}{b}\ln 3 - (c-1)\ln 2$, $(a; b; c \in \mathbb{N}^*)$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + abc$

A. $S = 70$ B. $S = 84$ C. $S = 64$ D. $S = 28$

Lời giải





Nhập $\displaystyle\int_0^1 \frac{2X+1}{X^2-4}dx$: [∫] [□/□] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [▼] [0] [▲] [1]

Ấn [=] màn hình hiện kết quả là $-0{,}5623351446$, gán vào A: [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)]

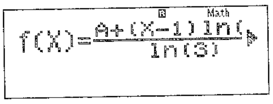
$(Ans \rightarrow A)$. Giả thiết trở thành $A = \dfrac{a}{b}\ln 3 - (c-1)\ln 2 \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{A + (c-1)\ln 2}{\ln 3}$

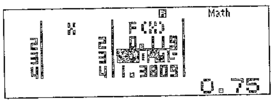
$\rightarrow f(x) = \dfrac{A + (x-1)\ln 2}{\ln 3}$ với $f(x) = \dfrac{a}{b}$ và $x = c$.

Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1]. Nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{A + (X-1)\ln(2)}{\ln(3)}$

[□/□] [ALPHA] [(−)] [+] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [ln] [2] [)] [▼] [ln] [3] [)]

Nhập Start $= 1$, End $= 29$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $(X; F(X)) = \left(3; \dfrac{3}{4}\right)$ thỏa mãn $X \in \mathbb{N}^*$, $F(X) \in \mathbb{Q}$ và $F(X) > 0$.





Như vậy: $c = 3, \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4} \rightarrow a = 3, b = 4, c = 3 \rightarrow S = a^2 + b^2 + c^2 + abc = 70$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \dfrac{a}{b} > 0$.

$\rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$ và $f(x) > 0$.

Mặt khác $c \in \mathbb{N}^* \rightarrow x \in \mathbb{N}^*$.

Ta chọn Start $= 1$, End $= 29$ và Step $= 1$. Trên bảng giá trị, dò cặp $(X; F(X))$ thỏa mãn $X \in \mathbb{N}^*$, $F(X) \in \mathbb{Q}$ và $F(X) > 0$.

Khi đó $(X; F(X)) \equiv \left(c; \dfrac{a}{b}\right)$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Xác định nguyên hàm của một hàm số

Câu 1: Hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ có nguyên hàm là

A. $\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}+C$ B. $2\sqrt{x^2-2x+5}+C$

C. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}}{2}+C$ D. $\sqrt{x^2-2x+5}+C$

Câu 2: Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

A. $-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B. $\ln\sqrt{1+x^2}$

C. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ C. $\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

B. $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C$

C. $F(x)=\ln\sqrt{x^2+1}-x+C$

D. $F(x)=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C$

Câu 4: Hàm số $F(x)=\ln|\sin x-3\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=\dfrac{\cos x+3\sin x}{\sin x-3\cos x}$

B. $f(x)=\cos x+3\sin x$

C. $f(x)=\dfrac{-\cos x-3\sin x}{\sin x-3\cos x}$

D. $f(x)=\dfrac{\sin x-3\cos x}{\cos x+3\sin x}$

Câu 5: Kết quả của $\int\cos x\sqrt{\sin x+1}dx$ bằng:

A. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(\sin x+1)^3}+C$

B. $F(x)=-\dfrac{2}{3}\sqrt{(\sin x+1)^3}+C$

C. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sin x+1}+C$

D. $F(x)=\dfrac{2}{3}(\sin x+1)^3+C$

Câu 6: Hàm số $f(x)=\cos x\left(\dfrac{1}{\cos x}+x\right)$ có nguyên hàm là:

A. $F(x)=\sin x\left(\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{x^2}{2}\right)+C$

B. $F(x)=x(1+\sin x)-\cos x+C$

C. $F(x)=x(1+\sin x)+\cos x+C$

D. $F(x)=x(1-\sin x)+\cos x+C$

Câu 7: Hàm số $y=xe^x$ có các nguyên hàm là:

A. $F(x)=xe^x+e^x+C$ B. $F(x)=x^2e^x+C$

C. $F(x)=\dfrac{x^2e^{x+1}}{x+1}+C$ D. $F(x)=e^x(x-1)+C$

Câu 8: Hàm số $y=\ln x\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{\ln x}\right)$ có các nguyên hàm là:

A. $F(x)=\ln^2 x+x^2+C$

B. $F(x)=\dfrac{\ln^2 x+x^2}{2}+C$

C. $F(x)=\dfrac{\ln^2 x}{2}+x^2+C$

D. $F(x)=\ln x\left(\ln x+\dfrac{x^2}{2\ln x}\right)+C$

Câu 9: Hàm số $y=3.2^x+\sqrt{x}$ có nguyên hàm là:

A. $\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ B. $\dfrac{3.2^x}{\ln 2}+\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$

C. $\dfrac{2^x}{3.\ln 2}+\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$ D. $\dfrac{3.2^x}{\ln 2}+\sqrt{x^3}+C$

Câu 10: Hàm số $y=2^{2x}.3^x.7^x$ có nguyên hàm là:

A. $\dfrac{84^x}{\ln 84}+C$ B. $\dfrac{2^{2x}.3^x.7^x}{\ln 4.\ln 3.\ln 7}+C$

C. 84^x+C D. $84^x.\ln 84+C$

Dạng 2: Xác định nguyên hàm có điều kiện cho trước

Câu 11: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{\sin x}\cos x$ biết $F(\pi)=5$

A. $F(x)=e^{\sin x}+4$ B. $F(x)=e^{\sin x}$

C. $F(x)=e^{\cos x}+4$ D. $F(x)=e^{\cos x}$

Câu 12: Hàm số $f(x)=(x-1)e^x$ có một nguyên hàm $F(x)$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng 1 khi $x=0$?

A. $F(x)=(x-1)e^x$ B. $F(x)=(x-2)e^x$

C. $F(x)=(x+1)e^x+1$ D. $F(x)=(x-2)e^x+3$

Câu 13: Một nguyên hàm của $f(x) = x\ln x$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này triệt tiêu khi $x = 1$

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}(x^2+1)$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x + 1$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{2}(x^2+1)$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}(x^2-1)$

Câu 14: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 2017$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = e^{\tan x}$ B. $F(x) = e^{-\tan x}$

C. $F(x) = e^{\tan x} + 2016$ D. $F(x) = e^{\tan x} + 2018$

Câu 15: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Kết quả là:

A. $F(x) = \tan x - x + \frac{\pi}{4}$

B. $F(x) = \tan x - x - \frac{\pi}{4}$

C. $F(x) = x - \tan x + \frac{\pi}{4}$

D. $F(x) = x - \tan x - \frac{\pi}{4}$

Câu 16: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \sin x - \cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

A. $f(x) = -\cos x - \sin x + \sqrt{2}$

B. $f(x) = \cos x - \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{2}$

D. $f(x) = \cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 17: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$ biết $F(1) = \frac{1}{3}$:

A. $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - 6$

B. $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - 6$

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin x.\sin 7x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

A. $\frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 8x}{16}$ B. $\frac{\sin 8x}{16} - \frac{\sin 6x}{12}$

C. $\frac{\sin 6x}{12} - \frac{\sin 8x}{16}$ D. $-\frac{\sin 6x}{12} - \frac{\sin 8x}{16}$

Câu 19: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 19$ là:

A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2}$

B. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 2$

C. $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} + 20$

D. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 20$.

Câu 20: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x) = 2x - 3\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$:

A. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$

B. $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$

C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$

D. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Dạng 3: Tính tích phân xác định của một hàm số

Câu 21: Tích phân $I = \int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$ có giá trị là:

A. $\frac{9}{2} + 3\ln\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} + 3\ln\frac{3}{2}$

C. $\frac{9}{2} + 3\ln\frac{2}{3}$ D. $\frac{9}{2} - 3\ln\frac{2}{3}$

Câu 22: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin^2 x dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$ B. $I = -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$

C. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$ D. $I = \frac{\pi}{6}$

Câu 23: Tích phân $K = \int_1^e \frac{1+x\ln x}{x}e^x dx$ bằng:

A. $K = e^{-e}$ B. $K = \frac{1}{e}$ C. $K = -\frac{1}{e}$ D. $K = e^e$

Câu 24: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$ bằng:

A. $I=\ln 2$ B. $I=-\ln 2$

C. $I=-4\ln 2$ D. $I=\frac{1}{4}\ln 2$

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}dx$. Kết quả là:

A. $I=\frac{116}{135}$ B. $I=\frac{118}{137}$

C. $I=\frac{116}{133}$ D. $I=\frac{115}{134}$

Câu 26: Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)^3}$ là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 27: Tính giá trị của tích phân sau $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)dx$:

A. $I=\frac{33\pi}{128}$ B. $I=\frac{32\pi}{128}$ C. $I=\frac{31\pi}{128}$ D. $I=\frac{30\pi}{128}$

Câu 28: Giá trị của tích phân $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}dx}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}$ là:

A. $I=2\ln 3-1$ B. $I=2\ln 2-1$

C. $I=\ln 3-1$ D. $I=\ln 2-1$

Câu 29: Tích phân $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{8}{15}$

Câu 30: Kết quả của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2x\cos 3x dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{2}$

Dạng 4: Tính tích phân chứa tham số

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$. Kết quả **đúng** là

A. $\frac{\pi}{4a}$ B. $\frac{\pi}{2a}$ C. $\frac{\pi}{a}$ D. $\frac{4\pi}{a}$

Câu 32: Kết quả của tích phân $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx, (a>0)$ là

A. $\frac{\pi a^2}{2}$ B. $\frac{\pi a}{4}$ C. $\frac{\pi a^2}{4}$ D. $\frac{\pi a}{2}$

Câu 33: Kết quả của tích phân $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx, (a>0)$ là

A. $\frac{\pi a^4}{8}$ B. $\frac{\pi a^4}{16}$ C. $\frac{\pi a^2}{16}$ D. $\frac{\pi a^2}{8}$

Câu 34: Kết quả của tích phân $\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ là

A. $a\left(\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{12}\right)$ B. $a\left(\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{12}\right)$

C. $a\left(\sqrt{3}+1-\frac{\pi}{12}\right)$ D. $a\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)$

Câu 35: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx$ có kết quả bằng

A. $\frac{1}{|a|+|b|}$ B. $\frac{1}{|a|-|b|}$ C. $\frac{1}{a^2+b^2}$ D. $\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}$

Dạng 5: Chọn hàm đại diện để tính tích phân

Câu 36: Biết rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)dx=9$. Khi đó, giá trị của $\int_0^3 f(3x)dx$ bằng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 37: Cho $\int_2^5 f(x)dx=10$. Khi đó $\int_5^2 [2-4f(x)]dx$ bằng:

A. 32 B. 34 C. 36 D. 40

Câu 38: Nếu $f(x)$ liên tục và $\int_0^4 f(x)dx=10$, thì $\int_0^2 f(2x)dx$ bằng

A. 5 B. 29 C. 19 D. 9

Câu 39: Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và $\int_{-2}^0 f(x)dx=2$. Giá trị của $\int_0^2 f(x)dx$ là

A. 2 B. –2 C. 1 D. –1

Câu 40: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_{-1}^0 f(x)dx=3$. Giá trị của $\int_{-1}^1 f(x)dx$ là

A. 3 B. 2 C. 6 D. –3

Dạng 6: Tìm tham số để tích phân bằng một giá trị cho trước

Câu 41: Cho tích phân $I=\int_1^m \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ và $I=3\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Giá trị của m là:

A. 2 B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. 8

Câu 42: Tìm $a>0$ sao cho $\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$

A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Câu 43: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{64}$. Khi đó n bằng:

A. 5 B. 3 C. 4 D. 6

Câu 44: Cho tích phân $\int_0^a \frac{(2x+1)e^x+2x}{e^x+1}\mathrm{d}x=1+\ln\frac{e+1}{2}$, giá trị của số thực dương a bằng

A. $a=\frac{3}{2}$ B. $a=\frac{1}{2}$ C. $a=1$ D. $a=2$

Câu 45: Cho đẳng thức tích phân $\int_1^m 3^{\frac{1}{x}}.\frac{\ln 3}{x^2}\mathrm{d}x+6=0$ và tham số thực m, giá trị của m bằng

A. $m=\frac{3}{2}$ B. $m=\frac{1}{2}$ C. $m=1$ D. $m=2$

Câu 46: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+2m)\mathrm{d}x=1+\pi^2$.

Giá trị của tham số m là:

A. 5 B. 3 C. 4 D. 6

Câu 47: Cho $\frac{\pi}{m}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=1$. Khi đó $9m^2-6$ bằng

A. 3 B. 30 C. –3 D. –30

Dạng 7: Tích phân chống máy tính cầm tay

Câu 48: Kết quả của tích phân $\int_{-1}^0\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x$ được viết dưới dạng $a+b\ln 2$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

Câu 49: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=a+b\pi\,;a,b\in\mathbb{Q}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=\frac{5}{4}$ B. $P=\frac{3}{4}$ C. $P=\frac{1}{4}$ D. $P=\frac{11}{4}$

Câu 50: Biết $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2-4}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2,\ (a;b\in\mathbb{Q})$, tính $S=a^2+b^2$

A. $S=\frac{49}{16}$ B. $S=\frac{59}{16}$ C. $S=\frac{47}{16}$ D. $S=\frac{73}{16}$

Câu 51: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi+\frac{1}{4}\ln b$ và $a,b\in\mathbb{Q}$.

Tính tích $M=ab$

A. $M=\frac{1}{2}$ B. $M=\frac{1}{4}$ C. $M=\frac{1}{6}$ D. $M=\frac{1}{8}$

Câu 52: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(1+\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2+a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức $M=a+b$

A. $M=20$ B. $M=40$ C. $M=60$ D. $M=10$

Câu 53: Cho tích phân $\int_1^2\frac{1-x}{x^2}e^x\mathrm{d}x=a.e^2+b.e$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$ B. $P=\frac{1}{2}$ C. $P=1$ D. $P=2$

Câu 54: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=2a-3b$

A. $P=8$ B. $P=5$ C. $P=3$ D. $P=2$

Câu 55: Cho $I=\int_1^e\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}\mathrm{d}x=a\ln 2-\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $S=a+b+c$

A. $S=3$ B. $S=5$ C. $S=0$ D. $S=7$

Câu 56: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=(a+b)\ln 3+c\ln 2$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$

A. $S=0$ B. $S=\frac{1}{2}$ C. $S=\frac{1}{3}$ D. $S=2$

Câu 57: Cho $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+5x+3}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=1$ B. $P=-3$ C. $P=2$ D. $P=0$.

Câu 58: Cho $\int_1^2\frac{x^2+2x+2}{x^2+x}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=3$ B. $P=-2$ C. $P=4$ D. $P=-1$

Câu 59: Cho tích phân $I=\int_1^e\frac{\ln x+e^{\ln x}}{x}dx=e^a-b$ với $a;b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của $S=a+2b$

A. $S=2$ B. $S=\frac{3}{2}$ C. $S=\frac{5}{2}$ D. $S=3$

Câu 60: Biết rằng $I=\int_1^e\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}dx=a\ln 2-\frac{b}{c}$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$

A. $S=3$ B. $S=5$ C. $S=7$ D. $S=10$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Xác định nguyên hàm của hàm số

Câu 1: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X-2}{\sqrt{X^2-2X+5}}\right)\bigg|_{x=X}-\frac{X-1}{\sqrt{X^2-2X+5}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,088\neq 0$. Loại A.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2X-2}{\sqrt{X^2-2X+5}}\right)\bigg|_{x=}$$
-0.088000000

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{X^2-2X+5}\right)\bigg|_{x=X}-\frac{X-1}{\sqrt{X^2-2X+5}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,6\neq 0$. Loại B.

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{X^2-2X+5}\right)\bigg|_{x}$$
0.600000000

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{X^2-2X+5}}{2}\right)\bigg|_{x=X}-\frac{X-1}{\sqrt{X^2-2X+5}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,3\neq 0$. Loại C.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{X^2-2X+5}}{2}\right)\bigg|_{x=}$$
-0.300000000

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X^2-2X+5}\right)\bigg|_{x=X}-\frac{X-1}{\sqrt{X^2-2X+5}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X^2-2X+5}\right)\bigg|_{x=}$$
0.000000000

Câu 2: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\right)\bigg|_{x=X}-\frac{1}{\sqrt{1+X^2}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,42...\neq 0$. Loại A.

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\right)\bigg|_{x=X}$$
-0.422616977

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+X^2}\right)\right)\bigg|_{x=X}-\frac{1}{\sqrt{1+X^2}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,02...\neq 0$. Loại B.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+X^2}\right)\right)\bigg|_{x}$$
-0.026563090

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)\right)\bigg|_{x=X}-\frac{1}{\sqrt{1+X^2}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)\right)$$
0.000000000

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(X-\sqrt{1+X^2}\right)\right)\bigg|_{x=X}-\frac{1}{\sqrt{1+X^2}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng Math ERROR.

```
Math ERROR
[AC]  :Cancel
[◄][►]:Goto
```

Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả là Math ERROR. Loại D.

> Thật vậy, $x-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2-\left(1+x^2\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}<0$
> do $\sqrt{1+x^2}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó không tồn tại $\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

Câu 3: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(X\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)\right)\bigg|_{x=X}-\frac{X\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)}{\sqrt{X^2+1}}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $1,04...\neq 0$. Loại A.

```
d/dx(Xln(X+√(1+X²)▷
         1.046292113
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)-X\right)\Big|_{x=X}-\frac{X\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)}{\sqrt{X^2+1}}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2,15...\neq 0$. Loại B.

```
d/dx(ln(X+√(1+X²)·▷
        -2.158025048
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sqrt{1+X^2}\right)-X\right)\Big|_{x=X}-\frac{X\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)}{\sqrt{X^2+1}}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2,18...\neq 0$. Loại C.

```
d/dx(ln(√(1+X²))-X▷
        -2.184588138
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X^2+1}\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)-X\right)\Big|_{x=X}-\frac{X\ln\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)}{\sqrt{X^2+1}}$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

```
d/dx(√(X²+1) ln(X+√▷
         0.000000000
```

Câu 4: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sin(X)-3\cos(X)\right|\right)\Big|_{x=X}-\frac{\cos(X)+3\sin(X)}{\sin(X)-3\cos(X)}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

```
d/dx(ln(|sin(X)-3▷
         0.000000000
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sin(X)-3\cos(X)\right|\right)\Big|_{x=X}-\cos(X)-3\sin(X).$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,66...\neq 0$. Loại B.

```
d/dx(ln(|sin(X)-3▷
        -0.663058644
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sin(X)-3\cos(X)\right|\right)\Big|_{x=X}+\frac{\cos(X)+3\sin(X)}{\sin(X)-3\cos(X)}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,66...\neq 0$.

```
d/dx(ln(|sin(X)-3▷
         0.662428346
```

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sin(X)-3\cos(X)\right|\right)\Big|_{x=X}-\frac{\sin(X)-3\cos(X)}{\cos(X)+3\sin(X)}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-2,68...\neq 0$.

```
d/dx(ln(|sin(X)-3▷
        -2.687980298
```

Câu 5: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(\sin(X)+1\right)^3}\right)\Big|_{x=X}-\cos(X)\sqrt{\sin(X)+1}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

```
d/dx(2/3√((sin(X)+1▷
         0.000000000
```

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\sin(X)+1\right)^3}\right)\Big|_{x=X}-\cos(X)\sqrt{\sin(X)+1}.$$

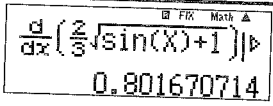
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,02...\neq 0$. Loại B.

```
d/dx(-2/3√((sin(X)+▷
         2.025782933
```

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sin(X)+1}\right)\Big|_{x=X}-\cos(X)\sqrt{\sin(X)+1}.$$

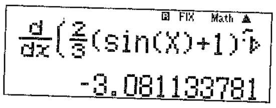
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X=2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,80...\neq 0$.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\left(\sin(X)+1\right)^3\right)\bigg|_{x=X}-\cos(X)\sqrt{\sin(X)+1}.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-3,08...\neq 0$.



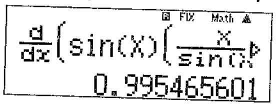
Câu 6: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(X)\left(\frac{X}{\sin(X)}+\frac{X^2}{2}\right)\right)\bigg|_{x=X}-\cos(X)\left(\frac{1}{\cos(X)}+X\right)$$

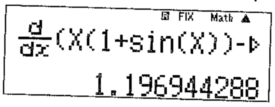
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,99...\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(X\left(1+\sin(X)\right)-\cos(X)\right)\bigg|_{x=X}-\cos(X)\left(\frac{1}{\cos(X)}+X\right).$$

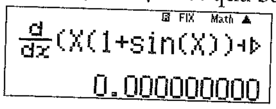
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $1,19...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(X\left(1+\sin(X)\right)+\cos(X)\right)\bigg|_{x=X}-\cos(X)\left(\frac{1}{\cos(X)}+X\right).$$

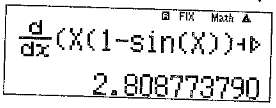
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. . Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(X\left(1-\sin(X)\right)+\cos(X)\right)\bigg|_{x=X}-\cos(X)\left(\frac{1}{\cos(X)}+X\right)$$

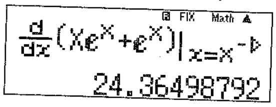
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2,80...\neq 0$. Loại D.



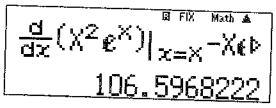
Câu 7: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

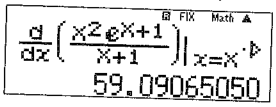
– *Phương án A:* Nhập $\frac{d}{dx}\left(Xe^X+e^X\right)\Big|_{x=X}-Xe^X$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $24,36...\neq 0$. Loại A.



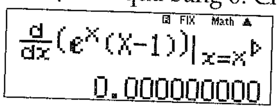
– *Phương án B:* Nhập $\frac{d}{dx}\left(X^2e^X\right)\Big|_{x=X}-Xe^X$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $106,59...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2e^{X+1}}{X+1}\right)\Big|_{x=X}-Xe^X$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $59,09...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\frac{d}{dx}\left(e^X(X-1)\right)\Big|_{x=X}-Xe^X$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.



Câu 8: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(X)^2+X^2\right)\bigg|_{x=X}-\ln(X)\left(\frac{1}{X}+\frac{X}{\ln(X)}\right).$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,86... \neq 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(X)^2+X^2\right)\Big|_{x} \quad 2.866516293$$

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(X)^2+X^2}{2}\right)\Bigg|_{x=X}-\ln(X)\left(\frac{1}{X}+\frac{X}{\ln(X)}\right).$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(X)^2+X^2}{2}\right)\Big|_{x} \quad 0.000000000$$

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(X)^2}{2}+X^2\right)\Bigg|_{x=X}-\ln(X)\left(\frac{1}{X}+\frac{X}{\ln(X)}\right).$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2,5 \neq 0$. Loại C.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(X)^2}{2}+X^2\right)\Big|_{x} \quad 2.500000000$$

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(X)^2+\frac{X^2}{2}\right)\Bigg|_{x=X}-\ln(X)\left(\frac{1}{X}+\frac{X}{\ln(X)}\right).$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,36... \neq 0$. Loại D.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(X)^2+\frac{X^2}{2}\right)\Big|_{x} \quad 0.366516293$$

Câu 9: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^X}{\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right)\Bigg|_{x=X}-3\times 2^X-\sqrt{X}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-11,31... \neq 0$. Loại A.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^X}{\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right) \quad -11.31370850$$

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\times 2^X}{\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right)\Bigg|_{x=X}-3\times 2^X-\sqrt{X}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\times 2^X}{\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right) \quad 0.000000000$$

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^X}{3\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right)\Bigg|_{x=X}-3\times 2^X-\sqrt{X}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-15,08... \neq 0$. Loại C.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^X}{3\ln(2)}+\frac{2}{3}\sqrt{X^3}\right) \quad -15.08494467$$

– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\times 2^X}{\ln(2)}+\sqrt{X^3}\right)\Bigg|_{x=X}-3\times 2^X-\sqrt{X}.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,79... \neq 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\times 2^X}{\ln(2)}+\sqrt{X^3}\right)\Big|_{x} \quad 0.790569415$$

Câu 10: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{84^X}{\ln(84)}\right)\Bigg|_{x=X}-2^{2X}\times 3^X\times 7^X$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{84^X}{\ln(84)}\right)\Big|_{x=X}- \quad 0.000000000$$

– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^{2X}\times 3^X\times 7^X}{\ln(4)\times\ln(3)\times\ln(7)}\right)\Bigg|_{x=X}-2^{2X}\times 3^X\times 7^X.$$

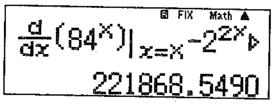
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $32015,73... \neq 0$. Loại B.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^{2X}\times 3^X\times}{\ln(4)\times\ln(3)\times}\right. \quad 32015.73960$$

– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(84^X\right)\Big|_{x=X}-2^{2X}\times 3^X\times 7^X.$$

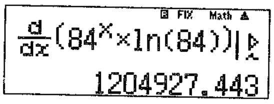
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $221868{,}54... \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* : Nhập vào màn hình

$$\frac{d}{dx}\left(84^X \times \ln(84)\right)\Big|_{x=X} - 2^{2X} \times 3^X \times 7^X.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1204927{,}44... \neq 0$. Loại D.

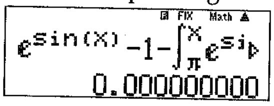


Dạng 2: Xác định nguyên hàm có điều kiện

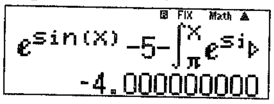
Câu 11: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ góc radian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

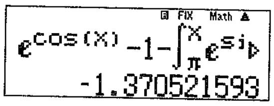
– *Phương án A:* Nhập $e^{\sin(X)} - 1 - \int_{\pi}^{X} e^{\sin(X)} \cos(X)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



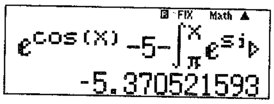
– *Phương án B:* Nhập $e^{\sin(X)} - 5 - \int_{\pi}^{X} e^{\sin(X)} \cos(X)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-4 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $e^{\cos(X)} - 1 - \int_{\pi}^{X} e^{\sin(X)} \cos(X)$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1{,}37... \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $e^{\cos(X)} - 5 - \int_{\pi}^{X} e^{\sin(X)} \cos(X)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-5{,}37... \neq 0$. Loại D.

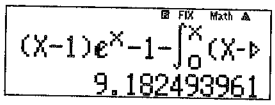


Câu 12: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

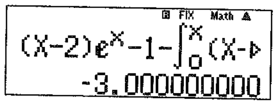
– *Phương án A:* Nhập $(X-1)e^X - 1 - \int_0^X (X-1)e^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $9{,}18... \neq 0$.

Loại A.



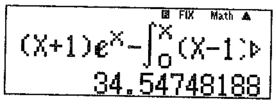
– *Phương án B:* Nhập $(X-2)e^X - 1 - \int_0^X (X-1)e^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-3 \neq 0$.

Loại B.



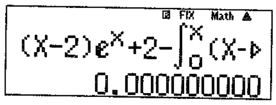
– *Phương án C:* Nhập $(X+1)e^X - \int_0^X (X-1)e^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $34{,}54... \neq 0$.

Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $(X-2)e^X + 2 - \int_0^X (X-1)e^X$. Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0.

Chọn D.

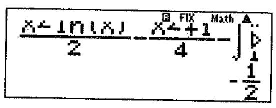


Câu 13: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập $\frac{X^2 \ln(X)}{2} - \frac{X^2+1}{4} - \int_1^X X\ln(X)dx$.

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [2] [.] [5] $(X = 2{,}5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-\frac{1}{2} \neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập $\frac{X^2\ln(X)}{2}+\frac{X}{4}+1-\int_1^X X\ln(X)dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{47}{16}\neq 0$. Loại B.

```
X²ln(X)/2 + X/4 + 1 - ∫₁^X ▷
                        47/16
```

– *Phương án C:* Nhập $\frac{X\ln(X)}{2}+\frac{X^2+1}{2}-\int_1^X X\ln(X)dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $3,21...\neq 0$. Loại C.

```
Xln(X)/2 + (X²+1)/2 - ∫₁^X ▷
                  3.219454878
```

– *Phương án D:* Nhập $\frac{X^2\ln(X)}{2}-\frac{X^2-1}{4}-\int_1^X X\ln(X)dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 2 . 5 $(X=2,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

```
X²ln(X)/2 - (X²-1)/4 - ∫₁^X ▷
                  0.000000000
```

Câu 14: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập $e^{\tan(X)}-2017-\int_0^X \frac{e^{\tan(X)}}{\cos(X)^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-2015,99...\neq 0$. Loại A.

```
e^tan(X) - 2017 - ∫₀^X ▷
                 -2015.999999
```

– *Phương án B:* Nhập $e^{-\tan(X)}-2017-\int_0^X \frac{e^{\tan(X)}}{\cos(X)^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1332987,84...\neq 0$. Loại B.

```
e^-tan(X) - 2017 - ∫ ▷
                 -1332987.849
```

– *Phương án C:* Nhập $e^{\tan(X)}-1-\int_0^X \frac{e^{\tan(X)}}{\cos(X)^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,000001470\approx 0$. Chọn C.

```
e^tan(X) - 1 - ∫₀^X e^ta/cos ▷
                  0.000001470
```

– *Phương án D:* Nhập $e^{\tan(X)}+1-\int_0^X \frac{e^{\tan(X)}}{\cos(X)^2}$. Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{1360545}{680272}=2,00...\neq 0$. Loại D.

```
e^tan(X) + 1 - ∫₀ e/cos ▷
               1360545/680272
```

Câu 15: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập $\tan(X)-X+\frac{\pi}{4}-1-\int_{\frac{\pi}{4}}^X \tan(X)^2 dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.

```
tan(X) - X + π/4 - 1 - ∫_{π/4} ▷
                  0.000000000
```

– *Phương án B:* Nhập $\tan(X)-X-\frac{\pi}{4}-1-\int_{\frac{\pi}{4}}^X \tan(X)^2 dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,57...\neq 0$. Loại B.

```
tan(X) - X - π/4 - 1 - ∫_{π/4} ▷
                 -1.570796327
```

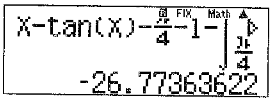
– *Phương án C:* Nhập $X-\tan(X)+\frac{\pi}{4}-1-\int_{\frac{\pi}{4}}^X \tan(X)^2 dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-25,20...\neq 0$. Loại C.

```
X - tan(X) + π/4 - 1 - ∫_{π/4} ▷
                 -25.20283989
```

– *Phương án D:* Nhập $X-\tan(X)-\frac{\pi}{4}-1-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}\tan(X)^2\,dx$.

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-26,77...\neq 0$. Loại D.



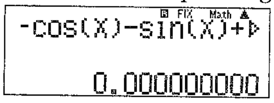
Câu 16: Đáp án A.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$-\cos(X)-\sin(X)+\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X)-\cos(X))dx.$$

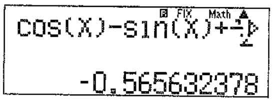
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\cos(X)-\sin(X)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X)-\cos(X))dx.$$

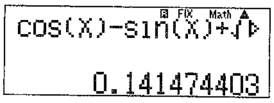
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,56...\neq 0$. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\cos(X)-\sin(X)+\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X)-\cos(X))dx.$$

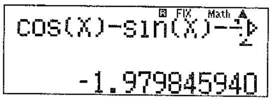
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,14...\neq 0$. Loại C.



– Với phương án D: Nhập vào màn hình

$$\cos(X)-\sin(X)-\frac{\sqrt{2}}{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{X}(\sin(X)-\cos(X))dx.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,97...\neq 0$. Loại D.



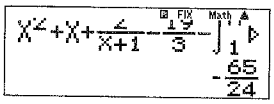
Câu 17: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$X^2+X+\frac{2}{X+1}-\frac{19}{3}-\int_{1}^{X}\frac{X^3+3X^2+3X-1}{X^2+2X+1}dx.$$

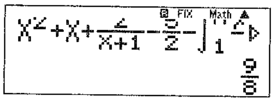
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-\frac{65}{24}\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$X^2+X+\frac{2}{X+1}-\frac{5}{2}-\int_{1}^{A}\frac{X^3+3X^2+3X-1}{X^2+2X+1}dx.$$

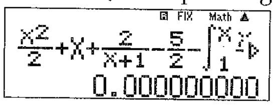
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{9}{8}\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{X^2}{2}+X+\frac{2}{X+1}-\frac{5}{2}-\int_{1}^{X}\frac{X^3+3X^2+3X-1}{X^2+2X+1}dx.$$

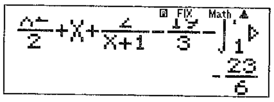
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\frac{X^2}{2}+X+\frac{2}{X+1}-\frac{19}{3}-\int_{1}^{X}\frac{X^3+3X^2+3X-1}{X^2+2X+1}dx.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-\frac{23}{6}\neq 0$. Loại D.



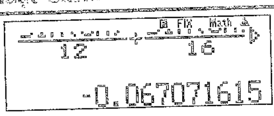
Câu 18: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\frac{\sin(6X)}{12}+\frac{\sin(8X)}{16}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\sin(X)\sin(7X)dx.$$

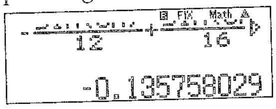
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,06...\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$-\frac{\sin(6X)}{12}+\frac{\sin(8X)}{16}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\sin(X)\sin(7X)dx.$$

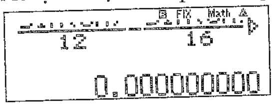
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,13...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\frac{\sin(6X)}{12}-\frac{\sin(8X)}{16}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\sin(X)\sin(7X)dx.$$

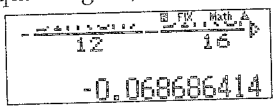
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$-\frac{\sin(6X)}{12}-\frac{\sin(8X)}{16}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\sin(X)\sin(7X)dx.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-0,06...\neq 0$. Loại D.



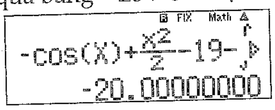
Câu 19: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$-\cos(X)+\frac{X^2}{2}-19-\int_0^X(X+\sin(X))dx.$$

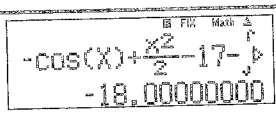
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-20\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$-\cos(X)+\frac{X^2}{2}-17-\int_0^X(X+\sin(X))dx.$$

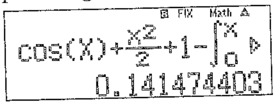
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-18\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\cos(X)+\frac{X^2}{2}+1-\int_0^X(X+\sin(X))dx.$$

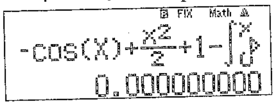
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,14...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$-\cos(X)+\frac{X^2}{2}+1-\int_0^X(X+\sin(X))dx.$$

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.



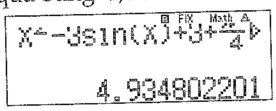
Câu 20: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ góc rađian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$X^2-3\sin(X)+3+\frac{\pi^2}{4}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}(2X-3\cos(X))dx.$$

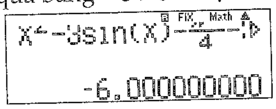
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $4,93...\neq 0$.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$X^2-3\sin(X)-\frac{\pi^2}{4}-3-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}(2X-3\cos(X))dx.$$

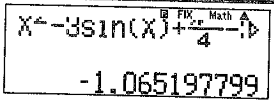
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-6\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$X^2-3\sin(X)+\frac{\pi^2}{4}-3-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}(2X-3\cos(X))dx.$$

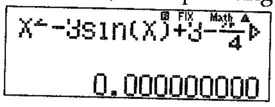
Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 . 5 $(X=1,5)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-1,06...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$X^2 - 3\sin(X) + 3 - \frac{\pi^2}{4} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{X}(2X - 3\cos(X))dx.$$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [.] [5] $(X = 1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với một vài giá trị X khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.

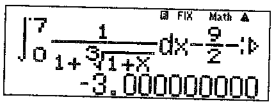


Dạng 3: Tính tích phân xác định của một hàm số

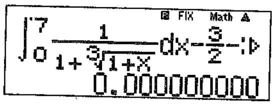
Câu 21: Đáp án B.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

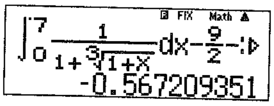
– *Phương án A:* Nhập $\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{X+1}}dx - \frac{9}{2} - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-3 \neq 0$. Loại A.



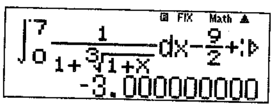
– *Phương án B:* Nhập $\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{X+1}}dx - \frac{3}{2} - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập $\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{X+1}}dx - \frac{9}{2} - 3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,567209351 \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{X+1}}dx - \frac{9}{2} + 3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-3 \neq 0$. Loại D.

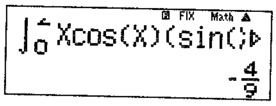


Câu 22: Đáp án C.

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

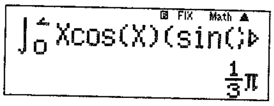
– *Phương án A:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\cos(X)(\sin(X))^2 dx - \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{4}{9} \neq 0$. Loại A.



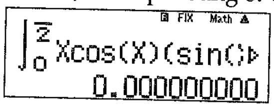
– *Phương án B:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\cos(X)(\sin(X))^2 dx + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $\frac{1}{3}\pi \neq 0$. Loại B.

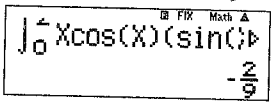


– *Phương án C:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\cos(X)(\sin(X))^2 dx - \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\cos(X)(\sin(X))^2 dx - \frac{\pi}{6}$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{2}{9} \neq 0$. Loại D.

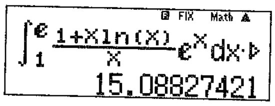


Câu 23: Đáp án D.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

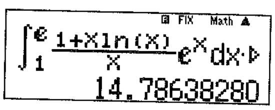
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_1^e \frac{1+X\ln(X)}{X}e^X dx - e^{-e}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $15,08827421 \neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_1^e \frac{1+X\ln(X)}{X}e^X dx - \frac{1}{e}$.

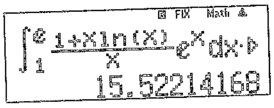
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $14,78638280 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_1^e \frac{1+X\ln(X)}{X}e^X dx + \frac{1}{e}$.

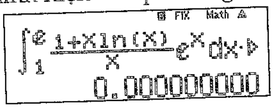
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $15,52214168 \neq 0$.

Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_1^e \frac{1+X\ln(X)}{X}e^X dx - e^e$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn D.



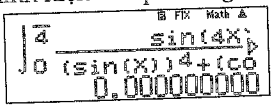
Câu 24: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4X)}{(\sin(X))^4+(\cos(X))^4}dx - \ln(2).$$

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

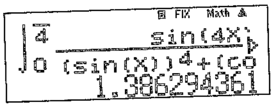


– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4X)}{(\sin(X))^4+(\cos(X))^4}dx + \ln(2).$$

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $1,386294361 \neq 0$.

Loại B.

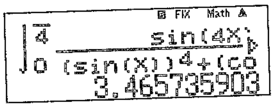


– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4X)}{(\sin(X))^4+(\cos(X))^4}dx + 4\ln(2).$$

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $3,465735903 \neq 0$.

Loại C.

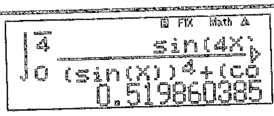


– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4X)}{(\sin(X))^4+(\cos(X))^4}dx - \frac{1}{4}\ln(2).$$

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,519860385 \neq 0$.

Loại D.

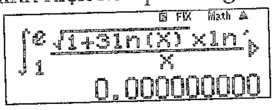


Câu 25: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

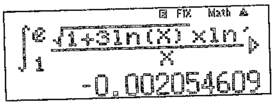
– *Phương án A:* Nhập $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln(X)}\times\ln(X)}{X}dx - \frac{116}{135}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



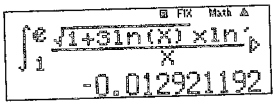
– *Phương án B:* Nhập $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln(X)}\times\ln(X)}{X}dx - \frac{118}{137}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả $-0,002054609 \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln(X)}\times\ln(X)}{X}dx - \frac{116}{133}$.

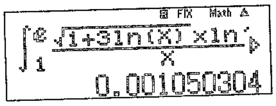
Ấn [=], màn hình hiện kết quả $-0,012921192 \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln(X)}\times\ln(X)}{X}dx - \frac{115}{134}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,001050304 \neq 0$.

Loại D.



Câu 26: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(X)}{(\sin(X)+\cos(X))^3}dx$, ấn [∫] [▭/▭] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▽] [(] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [SHIFT] [x²] [▽] [0] [△] [▭/▭] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▽] [2]. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $\frac{1}{2}$. Chọn A.

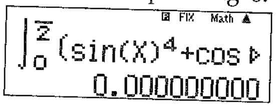
Câu 27: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(X)^4+\cos(X)^4\right)\left(\sin(X)^6+\cos(X)^6\right)dx-\frac{33\pi}{128}$.

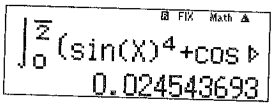
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(X)^4+\cos(X)^4\right)\left(\sin(X)^6+\cos(X)^6\right)dx-\frac{32\pi}{128}$.

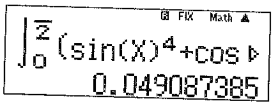
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,024543693\neq 0$.
Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(X)^4+\cos(X)^4\right)\left(\sin(X)^6+\cos(X)^6\right)dx-\frac{31\pi}{128}$.

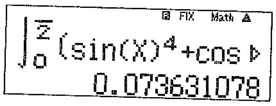
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,049087385\neq 0$.
Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(X)^4+\cos(X)^4\right)\left(\sin(X)^6+\cos(X)^6\right)dx-\frac{30\pi}{128}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,073631078\neq 0$.
Loại D.



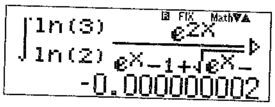
Câu 28: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{2X}}{e^X-1+\sqrt{e^X-2}}dx-2\ln(3)+1$.

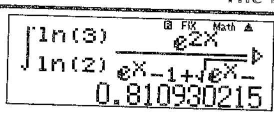
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,000000002\approx 0$
Chọn A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{2X}}{e^X-1+\sqrt{e^X-2}}dx-2\ln(2)+1$.

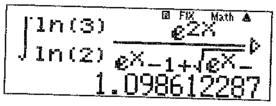
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,810930215\neq 0$.
Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{2X}}{e^X-1+\sqrt{e^X-2}}dx-\ln(3)+1$.

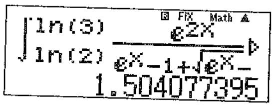
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $1,098612287\neq 0$.
Loại C.



– Phương án D: Nhập vào màn hình

$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{2X}}{e^X-1+\sqrt{e^X-2}}dx-\ln(2)+1$.

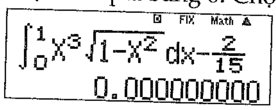
Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $1,504077395\neq 0$.
Loại D.



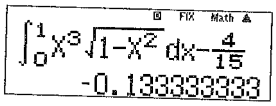
Câu 29: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

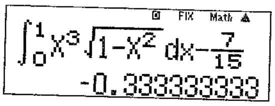
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^1 X^3\sqrt{1-X^2}dx-\frac{2}{15}$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



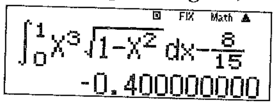
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^1 X^3\sqrt{1-X^2}dx-\frac{4}{15}$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,133333333\neq 0$.
Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^1 X^3\sqrt{1-X^2}dx-\frac{7}{15}$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,333333333\neq 0$.
Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^1 X^3\sqrt{1-X^2}dx-\frac{8}{15}$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,4\neq 0$. Loại D.

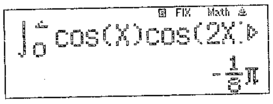


Câu 30: Đáp án C.

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad) và Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

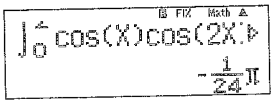
– *Phương án A:* Nhập $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(X)\cos(2X)\cos(3X)dx - \frac{\pi}{4}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{8} \neq 0$. Loại A.



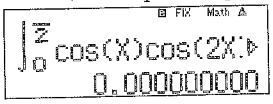
– *Phương án B:* Nhập $\int_0^{2} \cos(X)\cos(2X)\cos(3X)dx - \frac{\pi}{6}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{24} \neq 0$. Loại B.



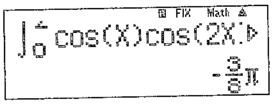
– *Phương án C:* Nhập $\int_0^{2} \cos(X)\cos(2X)\cos(3X)dx - \frac{\pi}{8}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^{2} \cos(X)\cos(2X)\cos(3X)dx - \frac{\pi}{2}$.

Ấn [=], màn hình hiện kết quả $-\frac{3\pi}{8} \neq 0$. Loại D.

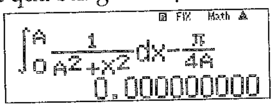


Dạng 4: Tính tích phân chứa tham số

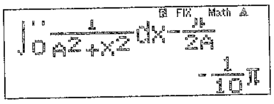
Câu 31: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

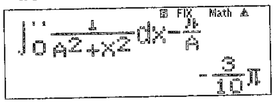
– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \frac{1}{A^2+X^2}dx - \frac{\pi}{4A}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị A khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



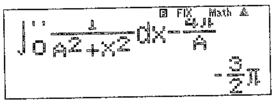
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \frac{1}{A^2+X^2}dx - \frac{\pi}{2A}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{10} \neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \frac{1}{A^2+X^2}dx - \frac{\pi}{A}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{3\pi}{10} \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \frac{1}{A^2+X^2}dx - \frac{4\pi}{A}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{3\pi}{2} \neq 0$. Loại D.

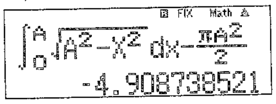


Câu 32: Đáp án C.

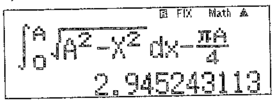
Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6] (Fix) [9].

– *Phương án A:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \sqrt{A^2-X^2}dx - \frac{\pi A^2}{2}$.

Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-4,90... \neq 0$. Loại A.



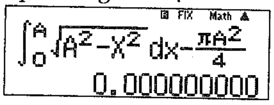
– *Phương án B:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \sqrt{A^2-X^2}dx - \frac{\pi A}{4}$. Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $2,94... \neq 0$. Loại B.



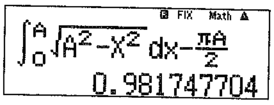
– *Phương án C:* Nhập vào máy $\int_0^{A} \sqrt{A^2-X^2}dx - \frac{\pi A^2}{4}$.

Ấn [CALC], máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A = 2,5)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [=] tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện

kết quả là 0. Dùng CALC với vài giá trị A khác, đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn C.



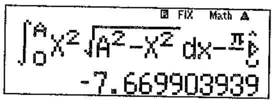
– *Phương án D:* Nhập vào máy $\int_0^A \sqrt{A^2-X^2}dx-\frac{\pi A}{2}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $0,98...\neq 0$. Loại D.



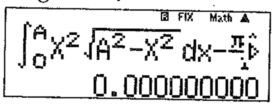
Câu 33: Đáp án B.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

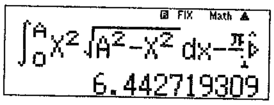
– *Phương án A:* Nhập $\int_0^A X^2\sqrt{A^2-X^2}dx-\frac{\pi A^4}{8}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-7,66...\neq 0$. Loại A.



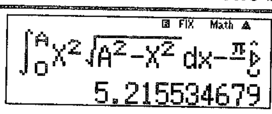
– *Phương án B:* Nhập $\int_0^A X^2\sqrt{A^2-X^2}dx-\frac{\pi A^4}{16}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị A khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Nhập $\int_0^A X^2\sqrt{A^2-X^2}dx-\frac{\pi A^2}{16}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $6,44...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập $\int_0^A X^2\sqrt{A^2-X^2}dx-\frac{\pi A^2}{8}$. Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $5,21...\neq 0$. Loại D.



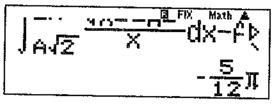
Câu 34: Đáp án D.

Đưa máy tính về chế độ Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\int_{A\sqrt{2}}^{2A}\frac{\sqrt{X^2-A^2}}{X}dx-A\left(\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{12}\right).$$

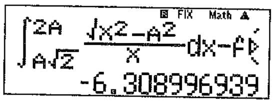
Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{5\pi}{12}\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\int_{A\sqrt{2}}^{2A}\frac{\sqrt{X^2-A^2}}{X}dx-A\left(\sqrt{3}+1+\frac{\pi}{12}\right).$$

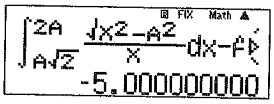
Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-6,30...\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\int_{A\sqrt{2}}^{2A}\frac{\sqrt{X^2-A^2}}{X}dx-A\left(\sqrt{3}+1-\frac{\pi}{12}\right).$$

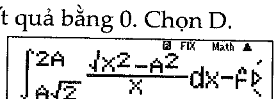
Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng $-5\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\int_{A\sqrt{2}}^{2A}\frac{\sqrt{X^2-A^2}}{X}dx-A\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right).$$

Ấn CALC, máy hỏi A? Ấn 2 . 5 $(A=2,5)$. Ấn =, máy hỏi X? Ấn = tiếp để bỏ qua X. Màn hình hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị A khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn D.



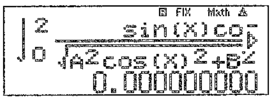
Câu 35: Đáp án A.

Đưa máy tính về chế độ góc radian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

– *Phương án A:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(X)\cos(X)}{\sqrt{A^2(\cos(X))^2+B^2(\sin(X))^2}}dx-\frac{1}{|A|+|B|}.$$

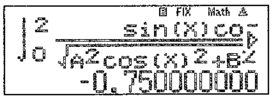
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A=2,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Dùng CALC với vài giá trị A, B khác đều nhận được kết quả bằng 0. Chọn A.



– *Phương án B:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(X)\cos(X)}{\sqrt{A^2(\cos(X))^2+B^2(\sin(X))^2}}dx-\frac{1}{|A|-|B|}.$$

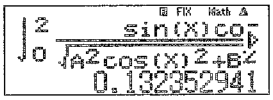
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A=2,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,75\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(X)\cos(X)}{\sqrt{A^2(\cos(X))^2+B^2(\sin(X))^2}}dx-\frac{1}{A^2+B^2}.$$

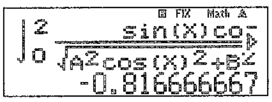
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A=2,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0,13...\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Nhập vào màn hình

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(X)\cos(X)}{\sqrt{A^2(\cos(X))^2+B^2(\sin(X))^2}}dx-\frac{1}{|A|}-\frac{1}{|B|}.$$

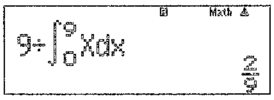
Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [2] [.] [5] $(A=2,5)$. Ấn [=], máy hỏi B? Ấn [1] [.] [5] $(A=1,5)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,81...\neq 0$. Loại D.



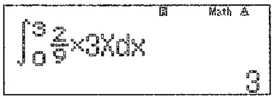
Dạng 5: Chọn hàm đại diện để tính tích phân

Câu 36: Đáp án C.

Nhập vào màn hình $9\div\int_0^9 Xdx$. Ấn [=] ta được kết quả là $\frac{2}{9}$. Khi đó $f(x)=\frac{2}{9}x$.



Nhập vào màn hình $\int_0^9\frac{2}{9}\times 3Xdx$. Ấn [=] ta được kết quả là 3. Vậy $\int_0^3 f(3x)dx=3$.

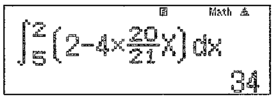


Câu 37: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $10\div\int_2^5 Xdx$. Ấn [=] ta được kết quả là $\frac{20}{21}$. Khi đó $f(x)=\frac{20}{21}x$.

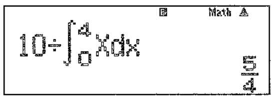


Nhập vào màn hình $\int_5^2\left(2-4\times\frac{20}{21}X\right)dx$. Ấn [=] ta được kết quả bằng 34. Vậy $\int_5^2\left[2-4f(x)\right]dx=34$.

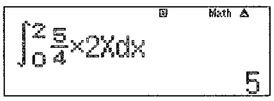


Câu 38: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $10\div\int_0^4 Xdx$. Ấn [=] ta được kết quả là $\frac{5}{4}$. Khi đó $f(x)=\frac{5}{4}x$.



Nhập vào màn hình $\int_0^2\frac{5}{4}\times 2Xdx$. Ấn [=] ta được kết quả là 5. Vậy $\int_0^2 f(2x)dx=5$.



Câu 39: Đáp án B.

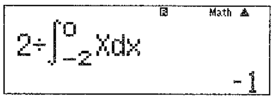
Phân tích: Giả sử $f(x)=k.g(x)$. Do $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow k.g(-x)=-k.g(x)$

$\Leftrightarrow g(-x)=-g(x)$. Vậy $g(x)$ cũng là hàm số lẻ.

Chọn $g(x)=x$ là một hàm số lẻ. Suy ra $f(x)=k.x$.

Ta có $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=2=\int_{-2}^{0} k.x\mathrm{d}x=k\int_{-2}^{0} x\mathrm{d}x \to k=\dfrac{2}{\int_{-2}^{0} x\mathrm{d}x}$

Nhập vào màn hình $2\div\int_{-2}^{0} x\mathrm{d}x$. Ấn [=] ta được kết quả là –1. Khi đó $f(x)=-x$.



Nhập vào màn hình $\int_{0}^{2} -\mathrm{X}\mathrm{d}x$. Ấn [=] ta được kết quả là –2. Vậy $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=-2$.



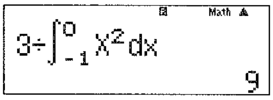
Câu 40: Đáp án C.

Phân tích: Giả sử $f(x)=k.g(x)$. Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow k.g(-x)=k.g(x)$

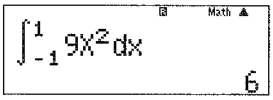
$\Leftrightarrow g(-x)=g(x)$. Vậy $g(x)$ cũng là hàm số chẵn.

Ta chọn $g(x)=x^2$ là một hàm số chẵn. Khi đó $3=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} k.x^2\mathrm{d}x=k.\int_{-1}^{0} x^2\mathrm{d}x \to k=\dfrac{3}{\int_{-1}^{0} x^2\mathrm{d}x}$

Nhập vào màn hình $3\div\int_{-1}^{0} \mathrm{X}^2\mathrm{d}x$. Ấn [=] ta được kết quả là 9. Suy ra $f(x)=9\mathrm{X}^2$.



Nhập vào màn hình $\int_{-1}^{1} 9\mathrm{X}^2\mathrm{d}x$. Ấn [=] ta được kết quả là 6. Vậy $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=6$.



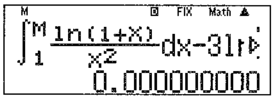
Dạng 6: Tìm tham số để tích phân bằng một giá trị cho trước

Câu 41: Đáp án A.

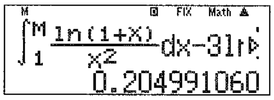
Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6](Fix) [9].

Nhập vào máy $\int_{1}^{M} \dfrac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}^2}\mathrm{d}x-3\ln\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, ấn [∫] [▯/▯] [ln] [1] [+] [ALPHA] [)] [)] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [▼] [1] [▲] [ALPHA] [M+] [▶] [–] [3] [ln] [2] [√] [3] [▼] [3] [▶] [)].

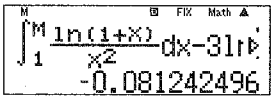
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [2] $(\mathrm{M}=2)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn A.



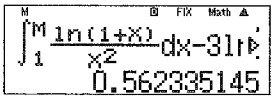
– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [3] $(\mathrm{M}=3)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,204991060\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [√] [3] [)] $(\mathrm{M}=\sqrt{3})$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-0,081242496\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [8] $(\mathrm{M}=8)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $0,562335145\neq 0$. Loại D.

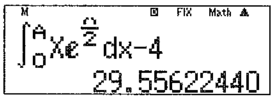


Câu 42: Đáp án D.

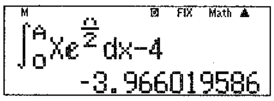
Đưa máy tính về chế độ Fix–9: [SHIFT] [MODE] [6](Fix) [9].

Nhập vào máy $\int_{0}^{A} \mathrm{X}e^{\frac{\mathrm{X}}{2}}\mathrm{d}x-4$ ấn [∫] [ALPHA] [)] [SHIFT] [ln] $(e^{\blacksquare})$ [▯/▯] [ALPHA] [)] [▼] [2] [▼] [0] [▲] [ALPHA] [(–)] [▶] [–] [4].

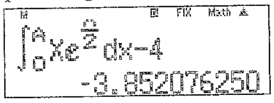
– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn [4] $(\mathrm{A}=4)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $29,55622440\neq 0$. Loại A.



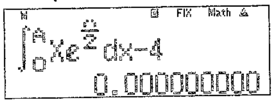
– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [=] để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn [1] [▯/▯] [4] $\left(\mathrm{A}=\dfrac{1}{4}\right)$. Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng $-3,966019586\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 1 ▭ 2 $\left(A=\frac{1}{2}\right)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $-3,852076250 \neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 2 $(A=2)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn D.



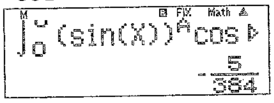
Câu 43: Đáp án B.

Đưa máy tính về chế độ góc radian SHIFT MODE 4 (Rad) và Fix–9: SHIFT MODE 6 (Fix) 9.

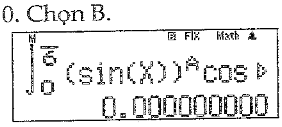
Nhập vào máy $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin(X))^A\cos(X)dx-\frac{1}{64}$, ấn



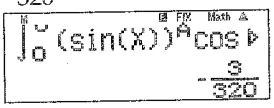
– *Phương án A:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi M? Ấn 5 $(A=5)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{5}{384}\neq 0$. Loại A.



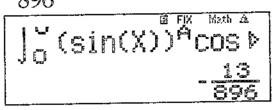
– *Phương án B:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 3 $(A=3)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 4 $(A=4)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{3}{320}\neq 0$. Loại C.

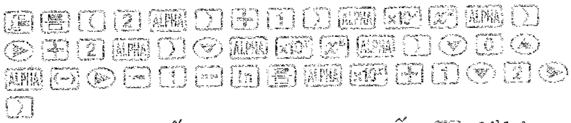


– *Phương án D:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 6 $(A=6)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $-\frac{13}{896}\neq 0$. Loại D.

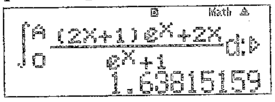


Câu 44: Đáp án C.

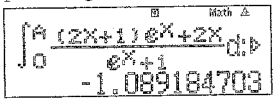
Nhập vào máy $\int_0^A\frac{(2X+1)e^X+2X}{e^X+1}dx-1-\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$:



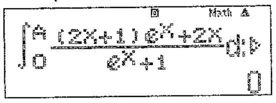
– *Phương án A:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 3 ▭ 2 $\left(A=\frac{3}{2}\right)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $1,63815159\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 1 ▭ 2 $\left(A=\frac{1}{2}\right)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $-1,089184703\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 1 $(A=1)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

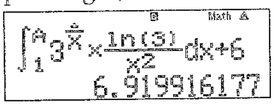


Câu 45: Đáp án B.

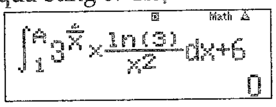
Nhập vào màn hình $\int_1^A 3^{\frac{1}{X}}\times\frac{\ln(3)}{X^2}dx+6$:



– *Phương án A:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 3 ▭ 2 $\left(A=\frac{3}{2}\right)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng $6,9199161769\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn = để bỏ qua X. Máy hỏi A? Ấn 1 ▭ 2 $\left(A=\frac{1}{2}\right)$. Ấn =, màn hình hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



Câu 46: Đáp án C.

Từ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+2m)\mathrm{d}x=1+\pi^2$ ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x+2m\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x=1+\pi^2 \Leftrightarrow m=\frac{1+\pi^2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x}{2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x}$$

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào màn hình $\left(1+\pi^2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{X}\sin(\mathrm{X})\mathrm{d}x\right)\div 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{X}\mathrm{d}x$:

[(] [1] [+] [SHIFT] [×10ˣ] [x²] [−] [∫] [ALPHA] [)] [sin] [ALPHA] [)] [)]
[▽] [0] [△] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [2] [▷] [▷] [)] [÷] [2] [∫] [ALPHA] [)]
[▽] [0] [△] [SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [2]

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 4.

```
(1+π²-∫₀^(π/2) Xsin(X ▸
                     4
```

Câu 47: Đáp án B.

Từ $\frac{\pi}{m}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x=1\to m=\frac{\pi}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x+1}$

Đưa máy tính về chế độ góc rađian [SHIFT] [MODE] [4] (Rad).

Nhập vào màn hình $\pi\div\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{X}\cos(\mathrm{X})\mathrm{d}x+1\right)$:

[SHIFT] [×10ˣ] [÷] [(] [∫] [ALPHA] [)] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▽] [0] [△]
[SHIFT] [×10ˣ] [▭/▭] [2] [▷] [▷] [+] [1] [)]

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 2.

```
π÷(∫₀^(π/2) Xcos(X)dx▸
                     2
```

Nhập vào máy $9\times \mathrm{Ans}^2-6$: [9] [×] [Ans] [x²] [−] [6]

Ấn [=], màn hình hiện kết quả bằng 30.

```
9×Ans²-6
                    30
```

Dạng 7: Tích phân chống máy tính cầm tay

Câu 48: Đáp án B.

Tính $\int\limits_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (−)}}$ A.

```
∫₋₁⁰(X+1+2/(X−1))dx          Ans→A
      -0.8862943611          -0.8862943611
```

Khi đó ta có $\mathrm{A}=a+b\ln 2$.

Cách 1: [MODE] [5] (EQN) [1]

– *Phương án A:* $\begin{cases}a+b\ln 2=\mathrm{A}\\ a+b=\frac{3}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=-6,27667406\\ b=7,77667406\end{cases}$

```
X=                      Y=
      -6.27667406             7.77667406
```

$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $\begin{cases}a+b\ln 2=\mathrm{A}\\ a+b=-\frac{3}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-2\end{cases}$

```
X=                      Y=
               1/2                    -2
```

$\to a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $\begin{cases}a+b\ln 2=\mathrm{A}\\ a+b=\frac{5}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=-8,535565413\\ b=11,03556541\end{cases}$

```
X=                      Y=
      -8.535565413            11.03556541
```

$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $\begin{cases}a+b\ln 2=\mathrm{A}\\ a+b=-\frac{5}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=2,758891353\\ b=-5,258891353\end{cases}$

```
X=                      Y=
       2.758891353           -5.258891353
```

$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

Cách 2: [SHIFT] [CALC] (SOLVE)

Nếu $a+b=-\frac{3}{2}\to b=-\frac{3}{2}-a\to \mathrm{A}=a+\left(-\frac{3}{2}-a\right)\ln 2$.

```
X+(-3/2-X)ln(2)-A       X+(-3/2-X)ln(2)-A
                        X=              0.5
                        L-R=              0
```

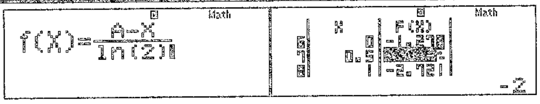
$\to a=\frac{1}{2},b=-2\to a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

Cách 3: [MODE] [7] (TABLE)

> Nhận xét: Ta thấy $a+b\in\left\{-\frac{5}{2};-\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}\to \mathrm{Step}=\frac{1}{2}$.
>
> Từ đó ta chọn $\mathrm{Start}=-\frac{14}{2},\mathrm{End}=\frac{14}{2},\mathrm{Step}=\frac{1}{2}$.

Từ $\mathrm{A}=a+b\ln 2\to b=\frac{\mathrm{A}-a}{\ln 2}\to f(x)=\frac{\mathrm{A}-x}{\ln 2}$.

Ấn [MODE] [7] và [SHIFT] [MODE] [▽] [5] [1], nhập vào máy hàm số $\mathrm{f}(\mathrm{X})=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{X}}{\ln(2)}$ với $\mathrm{Start}=-\frac{14}{2},\mathrm{End}=\frac{14}{2},\mathrm{Step}=\frac{1}{2}$.

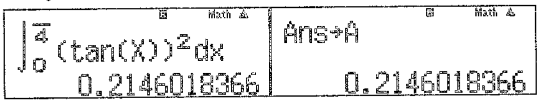


$\rightarrow X=\frac{1}{2}=a, F(X)=-2=b\rightarrow a+b=-\frac{3}{2}$. Chọn B.

Câu 49: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4.

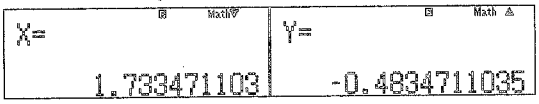
Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.



Khi đó ta có $a+b\pi=A$.

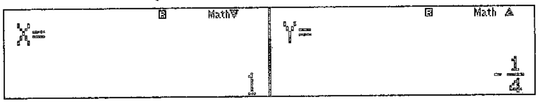
Cách 1: MODE 5 (EQN) 1

– *Phương án A:* $\begin{cases}a+b=\frac{5}{4}\\ a+b\pi=A\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=1733471103\\ b=-0,4834711035\end{cases}$



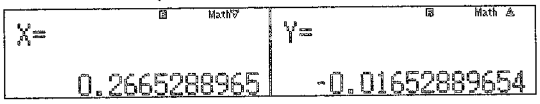
$\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $\begin{cases}a+b=\frac{3}{4}\\ a+b\pi=A\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$



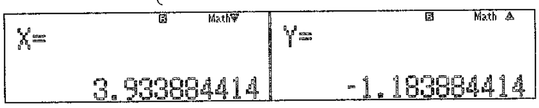
$\rightarrow a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $\begin{cases}a+b=\frac{1}{4}\\ a+b\pi=A\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=0,2665288965\\ b=-0,01652889654\end{cases}$



$\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

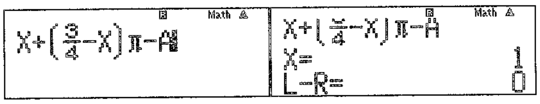
– *Phương án D:* $\begin{cases}a+b=\frac{11}{4}\\ a+b\pi=A\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=3,933884414\\ b=-1,183884414\end{cases}$



$\rightarrow a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

Cách 2: SHIFT CALC (SOLVE)

$a+b=\frac{3}{4}\rightarrow b=\frac{3}{4}-a\rightarrow A=a+\left(\frac{3}{4}-a\right)\pi$



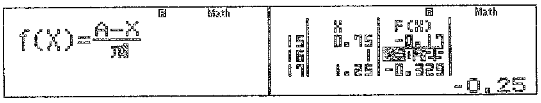
$\rightarrow a=1, b=-\frac{1}{4}\rightarrow a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

Cách 3: MODE 7 (TABLE)

Nhận xét: Ta thấy $a+b\in\left\{\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{4};\frac{11}{4}\right\}\rightarrow \text{Step}=\frac{1}{4}$. Từ đó ta chọn $\text{Start}=-\frac{14}{4}, \text{End}=\frac{14}{4}, \text{Step}=\frac{1}{4}$.

Từ $A=a+b\pi\rightarrow b=\frac{A-a}{\pi}\rightarrow f(x)=\frac{A-x}{\pi}$.

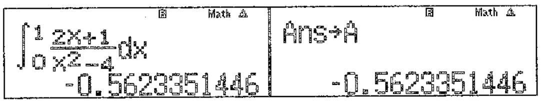
Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\frac{A-X}{\pi}$ với $\text{Start}=-\frac{14}{4}, \text{End}=\frac{14}{4}, \text{Step}=\frac{1}{4}$.



$\rightarrow X=1=a, F(X)=-\frac{1}{4}=b\rightarrow a+b=\frac{3}{4}$. Chọn B.

Câu 50: Đáp án D.

Tính $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2-4}dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.

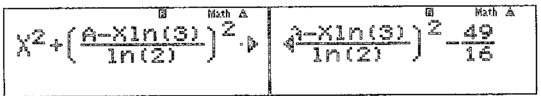


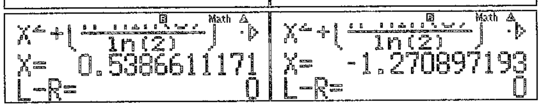
Khi đó $A=a\ln 3+b\ln 2$.

Cách 1: SHIFT CALC (SOLVE)

Từ $A=a\ln 3+b\ln 2\rightarrow b=\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}$

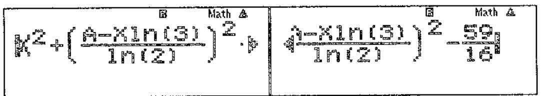
– *Phương án A:* $a^2+b^2=\frac{49}{16}\rightarrow a^2+\left(\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}\right)^2=\frac{49}{16}$

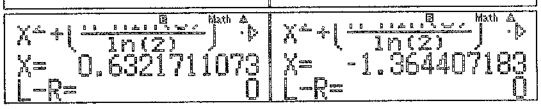




$\rightarrow a=X\rightarrow a\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

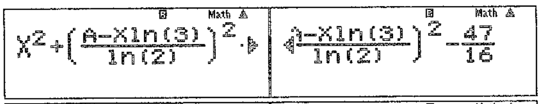
– *Phương án B:* $a^2+b^2=\frac{59}{16}\rightarrow a^2+\left(\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}\right)^2=\frac{59}{16}$

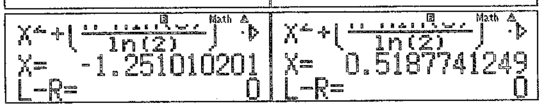




$\rightarrow a=X\rightarrow a\notin\mathbb{Q}$. Loại B.

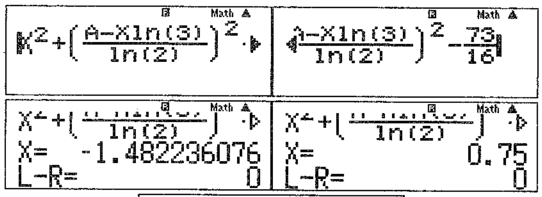
– *Phương án C:* $a^2+b^2=\frac{47}{16}\rightarrow a^2+\left(\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}\right)^2=\frac{47}{16}$.

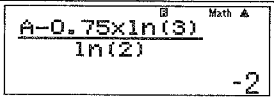




$\rightarrow a=X\rightarrow a\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a^2+b^2=\frac{73}{16}\to a^2+\left(\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}\right)^2=\frac{73}{16}$





$\to a=X=0,75\to b=\frac{A-0,75.\ln 3}{\ln 2}=-2\to a,b\in\mathbb{Q}$.

Chọn D.

Cách 2: MODE 7 (TABLE)

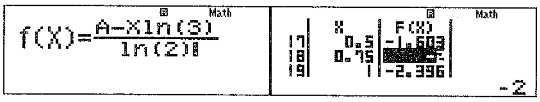
> Nhận xét: Ta thấy $a^2+b^2\in\left\{\frac{47}{16};\frac{49}{16};\frac{59}{16};\frac{73}{16}\right\}$. Nên nếu hàm số $f(x)$ chứa $x^2(\equiv a^2)$ (bậc của ẩn bằng 2) thì ta chọn Step $=\frac{1}{16}$. Suy ra nếu hàm số $f(x)$ chứa $x(\equiv a)$ thì chọn Step $=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$.

$A=a\ln 3+b\ln 2\to b=\frac{A-a\ln 3}{\ln 2}\to f(x)=\frac{A-x\ln 3}{\ln 2}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập hàm số $f(X)=\frac{A-X\ln(3)}{\ln(2)}$.

Chọn Start $=-\frac{14}{4}$, End $=\frac{14}{4}$, Step $=\frac{1}{4}$.

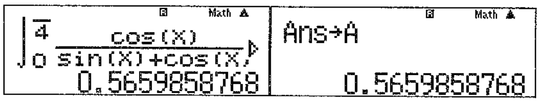


$\to X=\frac{3}{4},F(X)=-2\to a=\frac{3}{4},b=-2$. Vậy $S=\frac{73}{16}$.

Câu 51: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4.

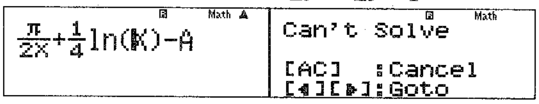
Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(X)}{\sin(X)+\cos(X)}dx\xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}}A$.



Khi đó ta có $a\pi+\frac{1}{4}\ln b=A$.

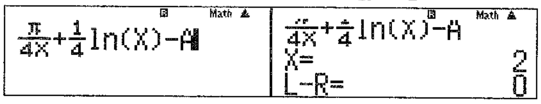
Cách 1: SHIFT CALC (SOLVE)

– *Phương án A:* $ab=\frac{1}{2}\to a=\frac{1}{2b}\to\frac{\pi}{2b}+\frac{1}{4}\ln b=A$.



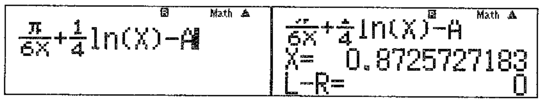
$\to$ Phương trình $\frac{\pi}{2b}+\frac{1}{4}\ln b=A$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Loại A.

– *Phương án B:* $ab=\frac{1}{4}\to a=\frac{1}{4b}\to\frac{\pi}{4b}+\frac{1}{4}\ln b=A$.



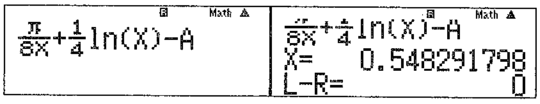
$\to b=2\to a=\frac{1}{8}\to a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $ab=\frac{1}{6}\to a=\frac{1}{6b}\to\frac{\pi}{6b}+\frac{1}{4}\ln b=A$.



$\to b=0,8725727183\to b\in\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $ab=\frac{1}{8}\to a=\frac{1}{8b}\to\frac{\pi}{8b}+\frac{1}{4}\ln b=A$



$\to b=0,548291798\to b\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

Cách 2: MODE 7 (TABLE)

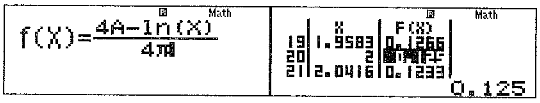
$a\pi+\frac{1}{4}\ln b=A\to a=\frac{4A-\ln b}{4\pi}\to f(x)=\frac{4A-\ln x}{4\pi}$

> Nhận xét: Ta thấy $ab\in\left\{\frac{12}{24};\frac{6}{24};\frac{4}{24};\frac{3}{24}\right\}\to$ Step $=\frac{1}{24}$. Mặt khác, do $x>0(b>0)$ nên ta chọn Start $=0$, End $=\frac{29}{24}$, Step $=\frac{1}{24}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1.

Nhập hàm số $f(X)=\frac{4A-\ln(X)}{4\pi}$ với Start $=0$, End $=\frac{29}{24}$, Step $=\frac{1}{24}$. Quan sát bảng giá trị, ta không thấy giá trị nào thỏa mãn $X\in\mathbb{Q},F(X)\in\mathbb{Q}$.

Nhập tiếp Start $=\frac{29}{24}$, End $=\frac{58}{24}$, Step $=\frac{1}{24}$. Ta tìm được $X=2,F(X)=0,125$ thỏa mãn.



$\to b=2,a=0,125=\frac{1}{8}$. Vậy $M=ab=\frac{1}{4}$.

Câu 52: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} X(1+\sin(2X))dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A.$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} X(1+\sin(2X))dx$	Ans→A
0.5584251375	0.5584251375

Khi đó ta có $A=\dfrac{\pi^2+a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Cách 1: MODE 5 (EQN) 1

Từ $A=\dfrac{\pi^2+a}{b}\to a-A.b=-\pi^2$.

– *Phương án A:* $\begin{cases}a-A.b=-\pi^2\\a+b=20\end{cases}\to\begin{cases}a=0,8334685564\\b=19,16653144\end{cases}$

X= 0.8334685564	Y= 19.16653144

$\to a,b\notin\mathbb{Z}$. Loại A.

– *Phương án B:* $\begin{cases}a-A.b=-\pi^2\\a+b=40\end{cases}\to\begin{cases}a=8\\b=32\end{cases}$

X= 8	Y= 32

$\to a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $\begin{cases}a-A.b=-\pi^2\\a+b=60\end{cases}\to\begin{cases}a=15,16653144\\b=44,83346856\end{cases}$

X= 15.16653144	Y= 44.83346856

$\to a,b\notin\mathbb{Z}$. Loại C.

– *Phương án D:* $\begin{cases}a-A.b=-\pi^2\\a+b=10\end{cases}\to\begin{cases}a=-2,749797165\\b=12,74979717\end{cases}$

X= -2.749797165	Y= 12.74979717

$\to a,b\in\mathbb{Z}$. Loại D.

Cách 2: SHIFT CALC (SOLVE)

– *Phương án A:* $a+b=20\to b=20-a\to A=\dfrac{\pi^2+a}{20-a}$.

$A-\frac{\pi^2+X}{20-X}$	X= 0.8334685564 L-R= 0

$\to a=0,8334685564\to a\notin\mathbb{Z}$. Loại A.

– *Phương án B:* $a+b=40\to b=40-a\to A=\dfrac{\pi^2+a}{40-a}$.

$A-\frac{\pi^2+X}{40-X}$	X= 8 L-R= 0

$\to a=8\to b=32\to a,b\in\mathbb{Z}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $a+b=60\to b=60-a\to A=\dfrac{\pi^2+a}{60-a}$.

$A-\frac{\pi^2+X}{60-X}$	X= 15.16653144 L-R= 0

$\to a=15,16653144\to a\notin\mathbb{Z}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a+b=10\to b=10-a\to A=\dfrac{\pi^2+a}{10-a}$.

$A-\frac{\pi^2+X}{10-X}$	X= -2.749797165 L-R= 0

$\to a=-2,749797165\to a\notin\mathbb{Z}$. Loại D.

Cách 3: MODE 7 (TABLE)

Từ $A=\dfrac{\pi^2+a}{b}\to b=\dfrac{\pi^2+a}{A}\to f(x)=\dfrac{\pi^2+x}{A}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{\pi^2+X}{A}$ với $X\in\mathbb{Z}$ và $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn Start $=-14$, End $=14$, Step $=1$. Quan sát bảng, ta tìm được cặp giá trị $X=8$ và $F(X)=32$ nguyên. Suy ra $a=8,b=32$.

$f(X)=\frac{\pi^2+X}{A}$	X = 8, F(X) = 32

Vậy $a+b=8+32=40$. Chọn B.

Câu 53: Đáp án B.

Tính $\int_1^2 \dfrac{1-X}{X^2}e^X dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A.$

$\int_1^2 \frac{1-X}{X^2}e^X dx$	Ans→A
-0.976246221	-0.976246221

Khi đó ta có $A=a.e^2+b.e$.

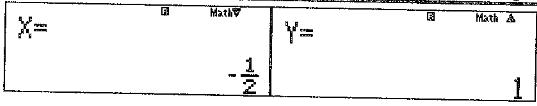
Cách 1: MODE 5 (EQN) 1

– *Phương án A:* $\begin{cases}a.e^2+b.e=A\\a+b=-1\end{cases}\to\begin{cases}a=0,3729650603\\b=-1,37296506\end{cases}$

X= 0.3729650603	Y= -1.37296506

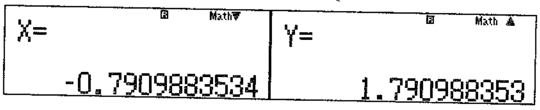
$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $\begin{cases}a.e^2+b.e=A\\a+b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=1\end{cases}$



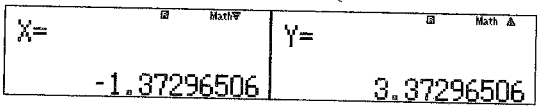
$\to a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $\begin{cases}a.e^2+b.e=A\\a+b=1\end{cases}\to\begin{cases}a=-0,790988353\\b=1,790988353\end{cases}$



$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

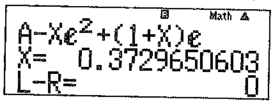
– *Phương án D:* $\begin{cases}a.e^2+b.e=A\\a+b=2\end{cases}\to\begin{cases}a=-1,37296506\\b=3,37296506\end{cases}$



$\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

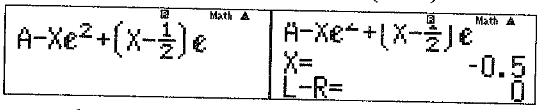
Cách 2: SHIFT CALC (SOLVE)

– *Phương án A:* $a+b=-1\to A=ae^2+(-1-a)e$



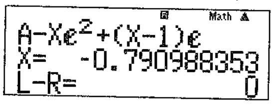
$\to a=0,3729650603\to a\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $a+b=\frac{1}{2}\to A=ae^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)e$



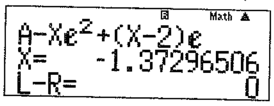
$\to a=-\frac{1}{2}\to b=1\to a,b\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $a+b=1\to A=ae^2+(1-a)e$



$\to a=-0,790988353\to a\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a+b=2\to A=ae^2+(2-a)e$



$\to a=-1,37296506\to a\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

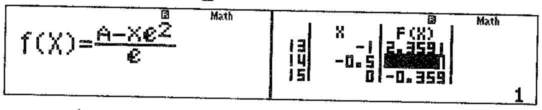
Cách 3: MODE 7 (TABLE)

> Nhận xét: $a+b\in\left\{-\frac{2}{2};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{4}{2}\right\}\to \text{Step}=\frac{1}{2}$. Từ đó ta chọn $\text{Start}=-7,\text{End}=7,\text{Step}=\frac{1}{2}$.

Từ $A=a.e^2+b.e\to b=\frac{A-ae^2}{e}\to f(x)=\frac{A-x.e^2}{e}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\frac{A-Xe^2}{e}$ với $\text{Start}=-7,\text{End}=7,\text{Step}=\frac{1}{2}$.

Ta tìm được $X=-\frac{1}{2},F(X)=1$ thỏa mãn.

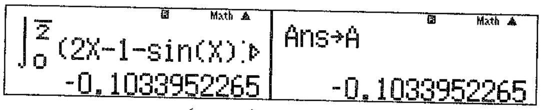


$\to a=-\frac{1}{2},b=1\to a+b=\frac{1}{2}$. Chọn B.

Câu 54: Đáp án D.

Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4.

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2X-1-\sin(X))dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.

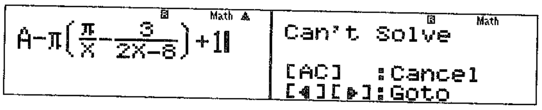


Khi đó ta có $A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$.

Cách 1: SHIFT CALC (SOLVE)

– *Phương án A:* $2a-3b=8\to b=\frac{2a-8}{3}$

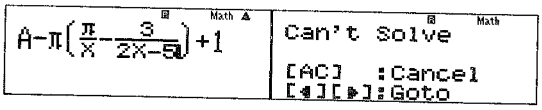
$\to A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{3}{2a-8}\right)-1$.



→ Không tồn tại a thỏa mãn. Loại A.

– *Phương án B:* $2a-3b=5\to b=\frac{2a-5}{3}$

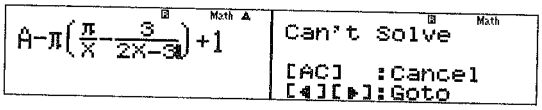
$\to A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{3}{2a-5}\right)-1$.



→ Không tồn tại a thỏa mãn. Loại B.

– *Phương án C:* $2a-3b=3\to b=\frac{2a-3}{3}$

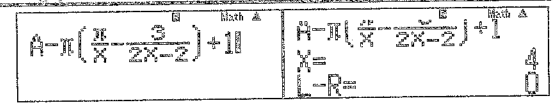
$\to A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{3}{2a-3}\right)-1$.



→ Không tồn tại a thỏa mãn. Loại C.

– *Phương án D:* $2a-3b=2\to b=\frac{2a-2}{3}$

$\to A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{3}{2a-2}\right)-1$.



$\rightarrow a = 4 \rightarrow b = \dfrac{2.4-2}{3} = 2 \rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn D.

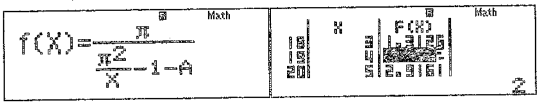
Cách 3: MODE 7 (TABLE)

Từ $A = \pi\left(\dfrac{\pi}{a} - \dfrac{1}{b}\right) - 1 \rightarrow b = \dfrac{\pi}{\dfrac{\pi^2}{a} - 1 - A}$

$\rightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{\dfrac{\pi^2}{x} - 1 - A}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{\pi}{\dfrac{\pi^2}{X} - 1 - A}$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Z}$.

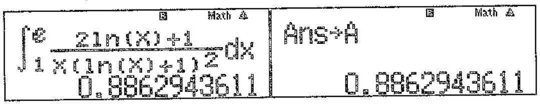
Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Ấn = bảng giá trị hiện ra. Quan sát bảng, ta tìm được cặp giá trị $(X; F(X)) = (4; 2)$ nguyên. Suy ra $a = 4, b = 2$.



Vậy $P = 2a - 3b = 2.4 - 3.2 = 2$. Chọn D.

Câu 55: Đáp án B.

Tính $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln(X)+1}{X(\ln(X)+1)^2}dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.



Khi đó ta có $A = a\ln 2 - \dfrac{b}{c}$.

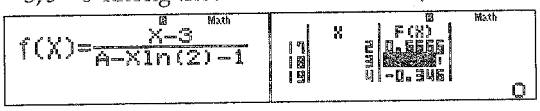
Cách 1:

– *Phương án A:* $a + b + c = 3 \rightarrow A = a\ln 2 - \dfrac{3-a-c}{c}$

$\rightarrow c = \dfrac{a-3}{A - a\ln 2 - 1} \rightarrow f(x) = \dfrac{x-3}{A - x\ln 2 - 1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{X-3}{A - X\ln(2) - 1}$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Z}$.

Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được cặp giá trị $(X; F(X)) = (3; 0)$. Suy ra $a = 3, c = 0$ không thỏa mãn do $c \neq 0$. Loại A.

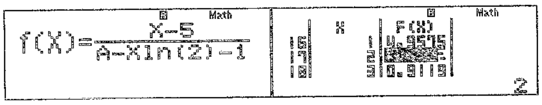


– *Phương án B:* $a + b + c = 5 \rightarrow A = a\ln 2 - \dfrac{5-a-c}{c}$

$\rightarrow c = \dfrac{a-5}{A - a\ln 2 - 1} \rightarrow f(x) = \dfrac{x-5}{A - x\ln 2 - 1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{X-5}{A - X\ln(2) - 1}$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Z}$.

Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $(X; F(X)) = (2; 2)$. Suy ra $a = c = 2 \rightarrow b = 1 \rightarrow a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chọn B.

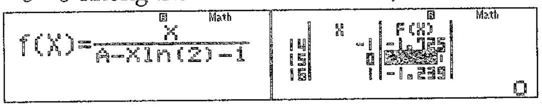


– *Phương án C:* $a + b + c = 0 \rightarrow A = a\ln 2 - \dfrac{-a-c}{c}$

$\rightarrow c = \dfrac{a}{A - a\ln 2 - 1} \rightarrow f(x) = \dfrac{x}{A - x\ln 2 - 1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{X}{A - X\ln(2) - 1}$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Z}$.

Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được cặp giá trị $(X; F(X)) = (0; 0)$. Suy ra $a = c = 0$ không thỏa mãn vì $c \neq 0$. Loại C.

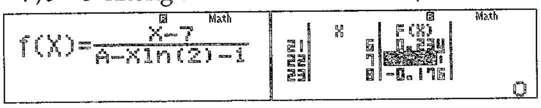


– *Phương án D:* $a + b + c = 7 \rightarrow A = a\ln 2 - \dfrac{7-a-c}{c}$

$\rightarrow c = \dfrac{a-7}{A - a\ln 2 - 1} \rightarrow f(x) = \dfrac{x-7}{A - x\ln 2 - 1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = \dfrac{X-7}{A - X\ln(2) - 1}$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Z}$.

Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được cặp giá trị $(X; F(X)) = (7; 0)$. Suy ra $a = 7, c = 0$ không thỏa mãn vì $c \neq 0$. Loại D.



Cách 2: Do $b, c \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ tối giản nên $\dfrac{b}{c} \in \mathbb{Q}$.

Từ $A = a\ln 2 - \dfrac{b}{c} \rightarrow \dfrac{b}{c} = a\ln 2 - A \rightarrow f(x) = x\ln 2 - A$

với $f(x) = \dfrac{b}{c}$ và $x = a$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▼ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = X\ln(2) - A$ với $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Q}$.

Chọn Start $= -14$, End $= 14$, Step $= 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $X = 2 \in \mathbb{Z}$ và $F(X) = 0{,}5 = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Suy ra $a = 2$ và $\dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = 1, c = 2$.

f(X)=Xln(2)−A	X / F(X): 1 −0.193…; 2 …; 3 1.1931 — 0.5

Vậy $S=a+b+c=2+1+2=5$. Chọn B.

Câu 56: Đáp án B.

Đưa máy về chế độ Rad, ấn SHIFT MODE 4.

Tính $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(X)-\cos(X)}{\sin(X)+\cos(X)}dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.

∫ π/4 … sin(X)+cos(X) — 0.3465735903	Ans→A — 0.3465735903

Khi đó $A=(a+b)\ln 3+c\ln 2$.

Cách 1: MODE 5 (EQN) 1

Do $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên $(a+b),c\in\mathbb{Q}$.

– *Phương án A:* $\begin{cases}(a+b)\ln 3+c\ln 2=A\\(a+b)+c=0\end{cases}$

X= 0.8547556457	Y= −0.8547556457

$\to\begin{cases}a+b=0,8547556457\\c=-0,8547556457\end{cases}\to(a+b),c\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $\begin{cases}(a+b)\ln 3+c\ln 2=A\\(a+b)+c=\frac{1}{2}\end{cases}$

X= 0	Y= 1/2

$\to\begin{cases}a+b=0\\c=\frac{1}{2}\end{cases}\to(a+b),c\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $\begin{cases}(a+b)\ln 3+c\ln 2=A\\(a+b)+c=\frac{1}{3}\end{cases}$

X= 0.2849185486	Y= 0.04841478477

$\to\begin{cases}a+b=0,2849185486\\c=0,04841478477\end{cases}\to(a+b),c\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $\begin{cases}(a+b)\ln 3+c\ln 2=A\\(a+b)+c=2\end{cases}$

X= −2.564266937	Y= 4.564266937

$\to\begin{cases}a+b=-2,564266937\\c=4,564266937\end{cases}\to(a+b),c\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

Cách 2: MODE 7 (TABLE)

> Nhận xét: Ta có $S=a+b+c\in\left\{0;\frac{2}{6};\frac{3}{6};\frac{12}{6}\right\}\to\text{Step}=\frac{1}{6}$
>
> Từ đó ta chọn $\text{Start}=-\frac{14}{6};\text{End}=\frac{14}{6}$ và $\text{Step}=\frac{1}{6}$.

– *Phương án A:* $a+b+c=0\to c=-a-b$

$\to A=a\ln 3+b\ln 3+(-a-b)\ln 2=a\ln\frac{3}{2}+b\ln\frac{3}{2}$

$\to b=\frac{A-a\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{3}{2}}\to f(x)=\frac{A-x\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{3}{2}}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\frac{A-X\ln(3\div 2)}{\ln(3\div 2)}$.

Chọn $\text{Start}=-\frac{14}{6};\text{End}=\frac{14}{6},\text{Step}=\frac{1}{6}$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ nào thỏa mãn $X\in\mathbb{Q}$ và $F(X)\in\mathbb{Q}\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại A.

– *Phương án B:* $a+b+c=\frac{1}{2}\to c=\frac{1}{2}-a-b$.

$\to A=a\ln 3+b\ln 3+\left(\frac{1}{2}-a-b\right)\ln 2=a\ln\frac{3}{2}+b\ln\frac{3}{2}+\frac{\ln 2}{2}$

$\to b=\frac{2A-2a\ln\frac{3}{2}-\ln 2}{2\ln\frac{3}{2}}\to f(x)=\frac{2A-2x\ln\frac{3}{2}-\ln 2}{2\ln\frac{3}{2}}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\frac{2A-2X\ln(3\div 2)-\ln(2)}{2\ln(3\div 2)}$.

Chọn $\text{Start}=-\frac{14}{6};\text{End}=\frac{14}{6},\text{Step}=\frac{1}{6}$. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $(X;F(X))=(-2;2)$ thỏa mãn

f(X)=(2A−2Xln(3÷…)/(2ln(…)	X / F(X): 2 −2.166 2.1666; 3 −2 2; 4 −1.833 1.8333 — 2

$\to a=-2,b=2\to c=\frac{1}{2}\to a,b,c\in\mathbb{Q}$. Chọn B.

– *Phương án C:* $a+b+c=\frac{1}{3}\to c=\frac{1}{3}-a-b$

$\to A=a\ln 3+b\ln 3+\left(\frac{1}{3}-a-b\right)\ln 2=a\ln\frac{3}{2}+b\ln\frac{3}{2}+\frac{\ln 2}{3}$

$\to b=\frac{3A-3a\ln\frac{3}{2}-\ln 2}{3\ln\frac{3}{2}}\to f(x)=\frac{3A-3x.\ln\frac{3}{2}-\ln 2}{3\ln\frac{3}{2}}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\frac{3A-3X\ln(3\div 2)-\ln(2)}{3\ln(3\div 2)}$.

Chọn $Start=-\frac{14}{6}; End=\frac{14}{6}, Step=\frac{1}{6}$. Quan sát bảng giá trị, ta không thấy cặp $(X;F(X))$ nào thỏa mãn $X;F(X)\in\mathbb{Q}\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a+b+c=2\to c=2-a-b$

$\to A=a\ln3+b\ln3+(2-a-b)\ln2=a\ln\frac{3}{2}+b\ln\frac{3}{2}+2\ln2$

$\to b=\dfrac{A-a\ln\frac{3}{2}-2\ln2}{\ln\frac{3}{2}}\to f(x)=\dfrac{A-x\ln\frac{3}{2}-2\ln2}{\ln\frac{3}{2}}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(3\div2)-2\ln2}{\ln(3\div2)}$.

Chọn $Start=-\frac{14}{6}; End=\frac{14}{6}, Step=\frac{1}{6}$. Quan sát bảng giá trị, ta không thấy cặp $(X;F(X))$ nào thỏa mãn $X;F(X)\in\mathbb{Q}\to a,b\notin\mathbb{Q}$. Loại D.

__Cách 3:__ MODE 7 (TABLE)

Từ $A=(a+b)\ln3+c\ln2\to c=\dfrac{A-(a+b)\ln3}{\ln2}$

$\to f(x)=\dfrac{A-x\ln3}{\ln2}$ với $f(x)=c$ và $x=a+b$.

> Nhận xét: Do $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên $(a+b),c\in\mathbb{Q}\to x\in\mathbb{Q}$ và $f(x)\in\mathbb{Q}$. Trên bảng giá trị, ta dò các cặp $(X;F(X))\equiv(a+b;c)$ thỏa mãn $X,F(X)\in\mathbb{Q}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(3)}{\ln(2)}$. Chọn $Start=-\frac{14}{6}; End=\frac{14}{6}$ và $Step=\frac{1}{6}$. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $(X;F(X))=\left(0;\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn $X,F(X)\in\mathbb{Q}$.

$f(X)=\dfrac{A-X\ln(3)}{\ln(2)}$	

	X	F(X)
14	-0.1666	0.7641
15	0	0.5
16	0.1666	0.2358

0.5

Suy ra $a+b=0, c=\frac{1}{2}$. Vậy $S=a+b+c=\frac{1}{2}$. Chọn B.

__Cách 4:__ $A=(a+b)\ln3+c\ln2=\ln3^{a+b}+\ln2^{c}$

$\to A=\ln(3^{a+b}.2^{c})\to3^{a+b}.2^{c}=e^{A}=\sqrt{2}$.

$e^{A}-\sqrt{2}$ → 0

$\to3^{a+b}.2^{c}=3^{0}.2^{\frac{1}{2}}\to\begin{cases}a+b=0\\c=\frac{1}{2}\end{cases}\to S=a+b+c=\frac{1}{2}$.

Câu 37: Đáp án D.

Tính $\int_1^4\frac{1}{2X^2+5X+3}dX \xrightarrow{\text{SHIFT STO A}} A$.

$\int_1^4\frac{1}{2X^2+5X+3}dX$ = 0.1278333715 | $\int_1^4\frac{1}{2X^2+5X+3}dX$ = 0.1278333715

Khi đó $A=a\ln2+b\ln5+c\ln11$.

__Cách 1:__ MODE 7 (TABLE)

– *Phương án A:* $a+b+c=1\to c=1-a-b$

$\to A=a\ln2+b\ln5+(1-a-b)\ln11$

$\to b=\dfrac{A-a\ln\frac{2}{11}-\ln11}{\ln\frac{5}{11}}\to f(x)=\dfrac{A-x\ln\frac{2}{11}-\ln11}{\ln\frac{5}{11}}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(2\div11)-\ln(11)}{\ln(5\div11)}, X\in\mathbb{Z}, F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $Start=-14, End=14, Step=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại A.

– *Phương án B:* $a+b+c=-3\to c=-3-a-b$

$\to A=a\ln2+b\ln5+(-3-a-b)\ln11$

$\to b=\dfrac{A-a\ln\frac{2}{11}+3\ln11}{\ln\frac{5}{11}}\to f(x)=\dfrac{A-x\ln\frac{2}{11}+3\ln11}{\ln\frac{5}{11}}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(2\div11)+3\ln(11)}{\ln(5\div11)}$, $X\in\mathbb{Z}, F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $Start=-14, End=14, Step=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại B.

– *Phương án C:* $a+b+c=2\to c=2-a-b$

$\to A=a\ln2+b\ln5+(2-a-b)\ln11$

$\to b=\dfrac{A-a\ln\frac{2}{11}-2\ln11}{\ln\frac{5}{11}}\to f(x)=\dfrac{A-x\ln\frac{2}{11}-2\ln11}{\ln\frac{5}{11}}$

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(2\div11)-2\ln(11)}{\ln(5\div11)}, X\in\mathbb{Z}, F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $Start=-14, End=14, Step=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại C.

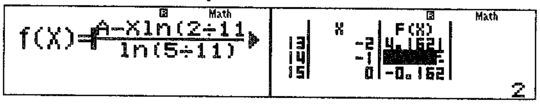
– *Phương án D:* $a+b+c=0\rightarrow c=-a-b$

$\rightarrow A=a\ln 2+b\ln 5+(-a-b)\ln 11$

$\rightarrow b=\dfrac{A-a\ln\dfrac{2}{11}}{\ln\dfrac{5}{11}}\rightarrow f(x)=\dfrac{A-x\ln\dfrac{2}{11}}{\ln\dfrac{5}{11}}$.

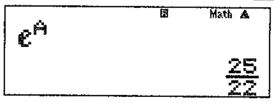
Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-X\ln(2\div 11)}{\ln(5\div 11)}$ với $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $\text{Start}=-14, \text{End}=14, \text{Step}=1$. Quan sát bảng, ta thấy $(X;F(X))=(-1;2)$ thỏa mãn. Suy ra $a=-1, b=2$ $\rightarrow c=-a-b=-1$. Vậy $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Chọn D.



Cách 2: $A=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11=\ln 2^a+\ln 5^b+\ln 11^c$

$\rightarrow A=\ln\left(2^a.5^b.11^c\right)\rightarrow 2^a.5^b.11^c=e^A=\dfrac{25}{22}$

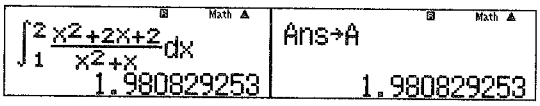


Suy ra $2^a.5^b.11^c=\dfrac{5^2}{2.11}=2^{-1}.5^2.11^{-1}\rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=-1\end{cases}$

Vậy $P=a+b+c=0$. Chọn D.

Câu 58: Đáp án A.

Tính $\int_1^2\dfrac{X^2+2X+2}{X^2+X}dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.



Khi đó ta có $A=a\ln 2+b\ln 3+c$.

Cách 1: MODE 7 (TABLE)

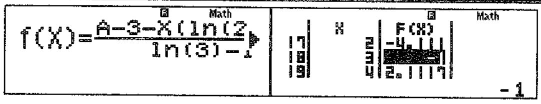
– *Phương án A:* $a+b+c=3\rightarrow c=3-a-b$

$\rightarrow A=a\ln 2+b\ln 3+3-a-b\rightarrow b=\dfrac{A-3-a(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$

$\rightarrow f(x)=\dfrac{A-3-x(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-3-X(\ln(2)-1)}{\ln(3)-1}$ với $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $\text{Start}=-14, \text{End}=14, \text{Step}=1$. Quan sát bảng giá trị, ta thấy $(X;F(X))=(3;-1)$ thỏa mãn. Suy ra $a=3, b=-1, c=1$. Vậy $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Chọn A.



– *Phương án B:* $a+b+c=-2\rightarrow c=-2-a-b$

$\rightarrow A=a\ln 2+b\ln 3-2-a-b\rightarrow b=\dfrac{A+2-a(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$

$\rightarrow f(x)=\dfrac{A+2-x(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A+2-X(\ln(2)-1)}{\ln(3)-1}$ với $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $\text{Start}=-14, \text{End}=14, \text{Step}=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại B.

– *Phương án C:* $a+b+c=4\rightarrow c=4-a-b$

$\rightarrow A=a\ln 2+b\ln 3+4-a-b\rightarrow b=\dfrac{A-4-a(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$

$\rightarrow f(x)=\dfrac{A-4-x(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A-4-X(\ln(2)-1)}{\ln(3)-1}$ với $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $\text{Start}=-14, \text{End}=14, \text{Step}=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a+b+c=-1\rightarrow c=-1-a-b$

$\rightarrow A=a\ln 2+b\ln 3-1-a-b\rightarrow b=\dfrac{A+1-a(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$

$\rightarrow f(x)=\dfrac{A+1-x(\ln 2-1)}{\ln 3-1}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=\dfrac{A+1-X(\ln(2)-1)}{\ln(3)-1}$ với $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$.

Chọn $\text{Start}=-14, \text{End}=14, \text{Step}=1$. Quan sát bảng giá trị, không có cặp $(X;F(X))$ thỏa mãn $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Z}$. Loại D.

Cách 2: Từ $A=a\ln 2+b\ln 3+c=\ln 2^a+\ln 3^b+\ln e^c$

$\rightarrow A=\ln\left(2^a.3^b.e^c\right)\rightarrow 2^a.3^b.e^c=e^A\rightarrow 2^a.3^b=e^{A-c}$

$\rightarrow f(x)=e^{A-x}$ với $f(x)=2^a.3^b$ và $x=c$.

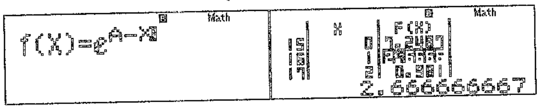
Do $a,b\in\mathbb{Z}$ nên $2^a.3^b\in\mathbb{Q}\rightarrow e^{A-c}\in\mathbb{Q}\rightarrow f(x)\in\mathbb{Q}$ và $c\in\mathbb{Z}\rightarrow x\in\mathbb{Z}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X)=e^{A-X}$, $X\in\mathbb{Z}$, $F(X)\in\mathbb{Q}$.

Chọn $Start = -14, End = 14, Step = 1$. Quan sát bảng giá trị, ta tìm được $\left(X;F(X)\right) = \left(1;\frac{8}{3}\right)$ thỏa mãn $X \in \mathbb{Z}$ và $F(X) \in \mathbb{Q}$.

Có nghĩa là $c = 1$ và $e^{A-c} = \frac{8}{3}$

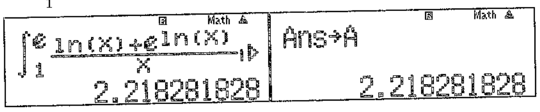
$\rightarrow 2^a.3^b = \frac{8}{3} = 2^3.3^{-1} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$



Vậy $P = a + b + c = 3 - 1 + 1 = 3$. Chọn A.

Câu 59: Đáp án B.

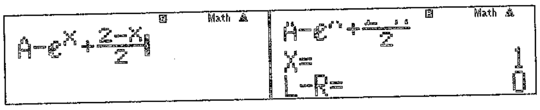
Tính $\int_1^e \frac{\ln(X) + e^{\ln(X)}}{X} dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.



Giả thiết trở thành $A = e^a - b$.

Cách 1: SHIFT CALC (SOLVE)

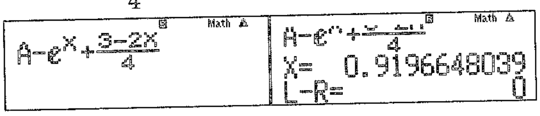
– *Phương án A:* $a + 2b = 2 \rightarrow b = \frac{2-a}{2} \rightarrow A = e^a - \frac{2-a}{2}$



$\rightarrow a = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$. Chọn A.

– *Phương án B:* $a + 2b = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{3-2a}{4}$

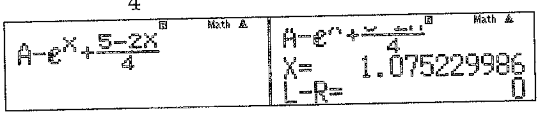
$\rightarrow A = e^a - \frac{3-2a}{4}$



$\rightarrow a = 0,9196648039 \rightarrow a \notin \mathbb{Q}$. Loại B.

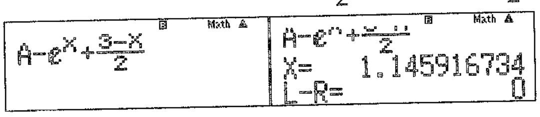
– *Phương án C:* $a + 2b = \frac{5}{2} \rightarrow b = \frac{5-2a}{4}$

$\rightarrow A = e^a - \frac{5-2a}{4}$.



$\rightarrow a = 1,075229986 \rightarrow a \notin \mathbb{Q}$. Loại C.

– *Phương án D:* $a + 2b = 3 \rightarrow b = \frac{3-a}{2} \rightarrow A = e^a - \frac{3-a}{2}$



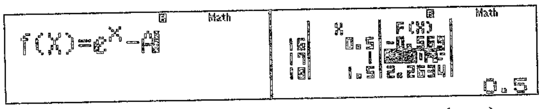
$\rightarrow a = 1,145916734 \rightarrow a \notin \mathbb{Q}$. Loại D.

Cách 2: MODE 7 (TABLE)

Nhận xét: Từ đáp án ta thấy $a + 2b \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \frac{6}{2}\right\}$ nên chọn $Step = \frac{1}{2} \rightarrow Start = -7, End = 7$.

Từ $A = e^a - b \rightarrow b = e^a - A \rightarrow f(x) = e^x - A$, trong đó $f(x) = b$ và $x = a \rightarrow x, f(x) \in \mathbb{Q}$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = e^X - A$. Chọn $Start = -7, End = 7, Step = \frac{1}{2}$.

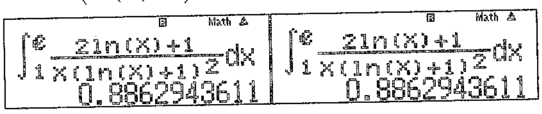


Quan sát bảng giá trị, ta thấy $\left(X;F(X)\right) = \left(1;\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn $X \in \mathbb{Q}$ và $F(X) \in \mathbb{Q}$.

Khi đó $a = 1, b = \frac{1}{2} \rightarrow a + 2b = 2$. Chọn A.

Câu 60: Đáp án B.

Tính $\int_1^e \frac{2\ln(X) + 1}{X(\ln(X) + 1)^2} dx \xrightarrow{\text{SHIFT RCL (-)}} A$.

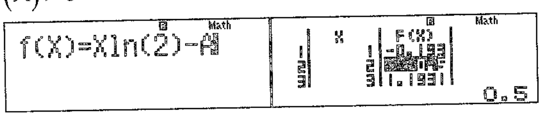


Giả thiết trở thành $A = a\ln 2 - \frac{b}{c} \rightarrow \frac{b}{c} = a\ln 2 - A$

$\rightarrow f(x) = x\ln 2 - A$ với $f(x) = \frac{b}{c}$ và $x = a$.

Nhận xét: Do $b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản nên $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q} \rightarrow f(x) \in \mathbb{Q}, f(x) > 0$. Mặt khác do $a \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \mathbb{N}^*$. Trên bảng giá trị, ta dò cặp $\left(X;F(X)\right) \equiv \left(a;\frac{b}{c}\right)$ thỏa mãn $X \in \mathbb{N}^*$ và $F(X) \in \mathbb{Q}$, $F(X) > 0$.

Ấn MODE 7 và SHIFT MODE ▽ 5 1, nhập vào máy hàm số $f(X) = X\ln(2) - A$. Chọn $Start = 1, End = 30$ và $Step = 1$. Quan sát bảng giá trị ta tìm được $\left(X;F(X)\right) = \left(2;\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn $X \in \mathbb{N}^*$ và $F(X) \in \mathbb{Q}$, $F(X) > 0$.



Khi đó $a = 2, \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2, b = 1, c = 2$.

Vậy $S = a + b + c = 5$. Chọn B.

CHỦ ĐỀ 7: SỐ PHỨC

1. Một số lý thuyết cơ bản về số phức

Mỗi số phức dạng $a+bi;(a;b\in\mathbb{R};i^2=-1)$ được gọi là một số phức.

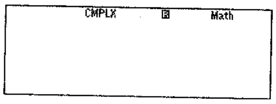
Đối với số phức $z=a+bi,\ (a;b\in\mathbb{R})$ ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z.

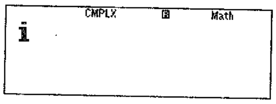
Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Điểm $M(a;b)$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi;(a;b\in\mathbb{R})$.



2. Chế độ làm việc với môi trường số phức





Để khởi động môi trường số phức ta thực hiện ấn MODE 2 (CMPLX).
Trong môi trường số phức, thành phần ảo hiện ra bằng cách thực hiện ấn nút ENG.

1. Tính môđun số phức. Sử dụng Abs (SHIFT hyp)	|□|
2. Tìm số phức liên hợp. Sử dụng Conjg (SHIFT 2 2)	Conjg(
3. Tìm argument số phức. Sử dụng arg (SHIFT 2 1)	arg(
4. Chuyển đổi số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác. Sử dụng $r\angle\theta$: SHIFT 2 3 hoặc SHIFT MODE ▽ 3 2 =	▶r∠θ
5. Chuyển đổi số phức từ dạng lượng giác sang dạng đại số. Sử dụng $a+bi$: SHIFT 2 4 hoặc SHIFT MODE ▽ 3 1	▶a+bi

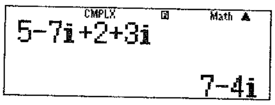
3. Các dạng toán về số phức

Dạng 1: Các dạng toán cộng trừ nhân chia số phức.

Ví dụ 1: Cho hai số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=7-4i$ B. $z=2+5i$ C. $z=-2+5i$ D. $z=3-10i$

Lời giải



* **Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $5-7i+2+3i$

Cách ấn: MODE 2 5 − 7 ENG + 2 + 3 ENG =.

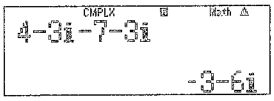
Vậy $z_1+z_2=7-4i$.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho hai số phức $z_1=4-3i;z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$

A. $z=11$ B. $z=3+6i$ C. $z=-1-10i$ D. $z=-3-6i$

Lời giải



***Bước 1:** Sử dụng [MODE] [2] (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $4-3i-7-3i$

Cách ấn: [MODE] [2] [4] [−] [3] [ENG] [−] [7] [−] [3] [ENG] [=].

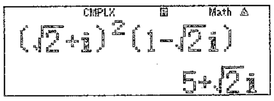
Vậy $z=-3-6i$.

Đáp án D.

Ví dụ 3: Tìm phần ảo của số phức z, biết $\overline{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$.

A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}i$ D. $-\sqrt{2}i$

Lời giải



STUDY TIPS

Trong bài toán này ta nên chú ý đề bài yêu cầu tìm phần ảo của số phức z chứ không phải số phức $\overline{z}$. Nên ta cần chú ý không chọn nhầm phương án.

***Bước 1:** Sử dụng [MODE] [2] (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$ và ấn [=]

Cách ấn [MODE] [2] [(] [√] [2] [▶] [+] [ENG] [)] [x²] [(] [1] [−] [√] [2] [▶] [ENG] [)] [=]

Do vậy số phức $z=5-\sqrt{2}i$. Vậy phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$.

Đáp án B.

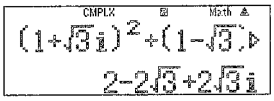
Ví dụ 4: Giá trị của biểu thức $P=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2$. bằng

A. $P=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ B. $P=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$

C. $P=2-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$ D. $P=2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$

Lời giải

***Bước 1:** Sử dụng [MODE] [2] (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.



* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $\left(1+\sqrt{3}i\right)^2+\left(1-\sqrt{3}i\right)^2$ và ấn [=] thì máy hiện kết quả $2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$. Từ đây ta chọn D.

Cách ấn:

[MODE] [2] [(] [1] [+] [√] [3] [▶] [ENG] [)] [x²] [+] [(] [1] [−] [√] [3] [▶] [)] [x²] [=]

Đáp án D.

Ví dụ 5: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$.

A. Số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là 2.

B. Số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là -2.

C. Số phức z có phần thực là 1 và phần ảo là -1.

D. Số phức z có phần ảo là -1 và phần thực là 1.

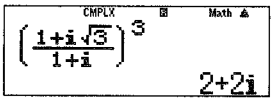
Lời giải

Với bài toán này ta sẽ giải bằng cách thông thường trước, sau đó sẽ so sánh với phương pháp sử dụng máy tính cầm tay.

Cách 1: Giải bằng phương pháp thông thường.

Ta có $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3=\dfrac{1+3\sqrt{3}i+3.\left(\sqrt{3}i\right)^2+\left(\sqrt{3}i\right)^3}{2i\left(1+i\right)}$

$=\dfrac{1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i}{-2+2i}=\dfrac{-8}{-2+2i}=2+2i.$



Vậy số phức z có phần thực là 2 và phần ảo là 2.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

* **Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$ và ấn =

Cách ấn: MODE 2 (▭ 1 + ENG √ 3 ▽ 1 + ENG ▷) x^n 3 =.

Đáp án A.

Ví dụ 6: Tất cả các giá trị của k để bình phương của số phức $z=\frac{k+9i}{1-i}$ là số thực là

A. $k=9;k=1$. B. $k=9;k=-9$. C. $k=-9;k=2$. D. $k=2;k=1$.

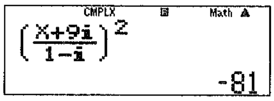
Lời giải

1. Giải bằng máy tính cầm tay.

***Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

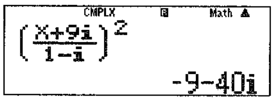
* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $\left(\frac{X+9i}{1-i}\right)^2$

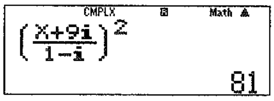
Cách ấn MODE 2 (▭ ALPHA) + 9 ENG ▽ 1 − ENG ▷) x^2



* **Bước 3:** Sử dụng CALC để thử từng phương án.

Với A: Ấn CALC 9 = máy hiện –81, thỏa mãn. Từ đây ta có thể loại được phương án D do đề bài hỏi tất cả các giá trị của m thỏa mãn, mà phương án D không có 9 nên loại.





Tiếp theo ta lần lượt thử $k=1;k=-9;k=2$.

Thực hiện ấn CALC tương tự như trên thì khi $k=1$ máy hiện $-9-40i$ không phải là số thực nên loại, khi $k=-9$ thì máy hiện 81, do vậy từ đây ta chọn B.

2. Giải bằng phương pháp thông thường.

Ta có $z^2=\left(\frac{k+9i}{1-i}\right)^2=\frac{(k+9i)^2}{(1-i)^2}=\frac{1}{4}.(k+9i)^2.(1+i)^2$

$=\frac{1}{4}\left(k^2+18ki-81\right).2i=\frac{1}{2}.i\left(k^2-81+18ki\right)$

Để z^2 là số thực thì $k^2-81=0\Leftrightarrow k=\pm 9$ (do khi đó $\frac{1}{2}.i.18ki=-\frac{1}{2}.18.(-1)k=-9k$ là một số thực).

Đáp án B.

STUDY TIPS

Trong bài toán này ta thấy rõ ràng việc thực hiện bấm máy tính giúp ta tìm được phương án nhanh hơn hay vì bình phương rồi giải tự luận mất nhiều thời gian.

Dạng 2: Các bài toán liên quan đến số phức liên hợp.

GHI NHỚ

Để tính số phức liên hợp ta thực hiện chức năng Conjg(SHIFT 2 2).

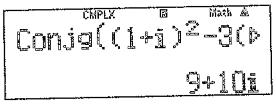
Ví dụ 1: Số phức liên hợp với số phức $z=(1+i)^2-3(1+2i)^2$ là

A. $-9-10i$ B. $9+10i$ C. $9-10i$ D. $-9+10i$

Lời giải

* **Bước 1:** Sử dụng dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Sử dụng lệnh Conjg(SHIFT 2 2)



Cách ấn

MODE 2 SHIFT 2 2 (1 + ENG) x² − 3 (1 + 2 ENG) x²) =.

Vậy số phức liên hợp của z là $9+10i$.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Cho số phức $z=-1+3i$. Phần thực và phần ảo của số phức $w=2i-3\overline{z}$ lần lượt là

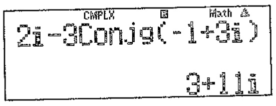
A. -3 và -7 B. 3 và -11 C. 3 và -7 D. C và 11

Lời giải

Tương tự như bài toán trên ta sẽ sử dụng lệnh Conjg(SHIFT 2 2) cùng với các tính toán cộng trừ nhân chia số phức.

* **Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Sử dụng lệnh Conjg(SHIFT 2 2)



Cách ấn MODE 2 2 ENG − 3 SHIFT 2 2 (−) 1 + 3 ENG) =

Vậy số phức w có phần thực và phần ảo lần lượt là 3 và 11.

Đáp án D.

Ví dụ 3: Tìm số phức z biết rằng $(1+i)z-2\overline{z}=-5+11i$.

A. $z=5-7i$ B. $z=2+3i$ C. $z=1+3i$ D. $z=2-4i$

Lời giải

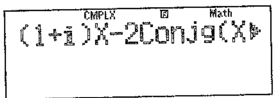
STUDY TIPS

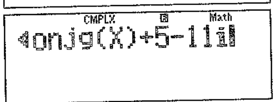
Với các bài toán xuất hiện cả z và $\overline{z}$ thì ta nên sử dụng CALC để thử đáp án thay vì đặt $z=a+bi$.

Trong bài toán này, do có sự xuất hiện của cả z và $\overline{z}$ nên ta sẽ khó tính trực tiếp được ngay z. Nếu làm theo cách thông thường thì ta phải đặt $z=a+bi,(a;b\in\mathbb{R})$ tuy nhiên cách làm đó khá lâu. Do vậy ta sẽ nhập biểu thức vào màn hình máy tính và sử dụng CALC để thử từng đáp án.

* **Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Sử dụng lệnh Conjg(SHIFT 2 2)

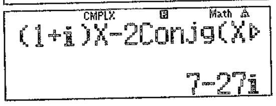




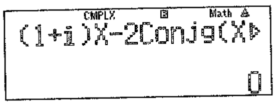
Nhập vào màn hình biểu thức $(1+i)X-2\text{Conjg}(X)+5-11i$ bằng cách ấn

MODE 2 (1 + ENG) ALPHA) − 2 SHIFT 2 2 ALPHA)) + 5 − 1 1 ENG

* **Bước 3:** Sử dụng CALC để thử từng phương án. Nếu phương án nào ra kết quả bằng 0 thì phương án đó chính là đáp án cuối cùng.



Với A: Ta tiếp tục ấn CALC 5 − 7 ENG = thì màn hình hiện $7-27i$ nên ta loại A.



Với B: Ta tiếp tục ấn CALC 2 + 3 ENG = kết quả hiện 0. Vậy B là đáp án cần chọn.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Số phức z thỏa mãn điều kiện $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$ là

A. $1+\sqrt{3}i$ và $2-\sqrt{3}i$ B. $-1+\sqrt{3}i$ và $2+\sqrt{3}i$

C. $-1-\sqrt{3}i$ và $2-\sqrt{3}i$ D. $-1+\sqrt{3}i$ và $2-\sqrt{3}i$

Lời giải

Tương tự như bài toán trên ta sử dụng [CALC] để thử từng phương án.

Nhập vào màn hình $\text{Conjg}(X)-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{X}-1$

[SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [▭/▭] [5] [+] [ENG] [√▭] [3] [▼] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1]

[CALC] [1] [+] [√▭] [3] [)] [ENG] [=] Từ đây ta loại A.	$\text{Conj}g(X)-\frac{5+i\sqrt{3}}{X}\triangleright$ -2
[CALC] [(−)] [1] [+] [√▭] [3] [)] [ENG] [=] Từ đây ta loại B.	$\text{Conj}g(X)-\frac{5+i\sqrt{3}}{X}\triangleright$ $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
[CALC] [(−)] [1] [−] [√▭] [3] [)] [ENG] [=]	$\text{Conj}g(X)-\frac{5+i\sqrt{3}}{X}\triangleright$ 0
[CALC] [2] [−] [√▭] [3] [)] [ENG] [=]	$\text{Conj}g(X)-\frac{5+i\sqrt{3}}{X}\triangleright$ 0

Từ bảng trên ta chọn C.

Đáp án C.

CHÚ Ý

Để tính môđun của số phức ta thực hiện chức năng Abs ([SHIFT] [hyp]).

Dạng 3: Các bài toán liên quan đến môđun số phức.

Ví dụ 1: Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$ B. $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$ C. $|z_1+z_2|=1$ D. $|z_1+z_2|=5$

Lời giải

* **Bước 1:** Sử dụng [MODE] [2] (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $|1+i+2-3i|$

Sử dụng Abs bằng cách ấn [SHIFT] [hyp]

Cách ấn: [MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [1] [+] [ENG] [+] [2] [−] [3] [ENG] [=].

Vậy $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$.

$|1+i+2-3i|$

$\sqrt{13}$

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tìm môđun của số phức $z=2+3i-\dfrac{1+5i}{3-i}$.

A. $|z|=\dfrac{\sqrt{170}}{3}$. B. $|z|=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$. C. $|z|=\dfrac{\sqrt{171}}{5}$. D. $|z|=\dfrac{\sqrt{170}}{4}$.

Lời giải

* **Bước 1:** Sử dụng [MODE] [2] (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình biểu thức $\left|2+3i-\dfrac{1+5i}{3-i}\right|$

Sử dụng Abs bằng cách ấn [SHIFT] [hyp]

Cách ấn [MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [2] [+] [3] [ENG] [−] [▭/▭] [1] [+] [5] [ENG] [▼] [3] [−] [ENG] [=]

Vậy $|z|=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$.

$\left|2+3i-\frac{1+5i}{3-i}\right|$

$\frac{\sqrt{170}}{5}$

Đáp án B.

Trong bài toán này ta sẽ sử dụng chức năng lưu trữ kết quả SHIFT RCL (STO) được giới thiệu ở phía trước.

Ví dụ 3: Cho số phức $z^2-6z+13=0$. Tất cả các giá trị của $P=\left|z+\frac{6}{z+i}\right|$ là

A. $P=\sqrt{17}$ hoặc $P=5$. B. $P=\frac{3\sqrt{65}}{5}$.

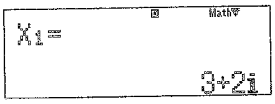
C. $P=\frac{3\sqrt{65}}{5}$ hoặc $P=5$. D. $P=\sqrt{17}$.

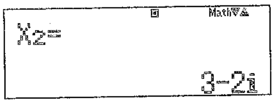
Lời giải

Để tính được P ta cần tìm được z. Ta sẽ sử dụng chế độ MODE 5 (EQN) để giải phương trình tìm z. Từ đó thay vào P.

*** Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

*** Bước 2:** Sử dụng MODE 5 (EQN) để giải phương trình tìm z.





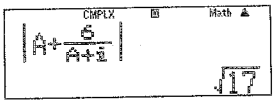
Cách ấn: MODE 5 3 1 = − 6 = 1 3 = = =

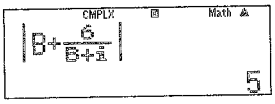
Lúc này máy hiện hai nghiệm như hình bên. Ta tiếp tục sử dụng lệnh SHIFT RCL (SHIFT STO) để gán hai giá trị nghiệm vào các biến, sau đó chỉ sử dụng các biến đã được gán đó để tìm P.

Khi máy hiện x_1 như hình trên ta ấn SHIFT RCL (−) để gán x_1 vào biến A.

Tiếp tục ấn ▼ SHIFT RCL ° ' " để gán x_2 vào biến B.

*** Bước 3:** Ấn MODE 2 (CMPLX) để trở về môi trường số phức thực hiện tìm P.





Với $z=x_1$ ta ấn SHIFT hyp ALPHA (−) + 6 ▭ ALPHA (−) + ENG =. Vậy $P=\sqrt{17}$.

Với $z=x_2$ ta ấn SHIFT hyp ALPHA ° ' " + 6 ▭ ALPHA ° ' " + ENG =. Vậy $P=5$.

Đáp án A.

STUDY TIPS

Sau khi sử dụng chức năng giải phương trình và gán giá trị nghiệm vào A; B, trong bài toán này tôi hướng dẫn ấn luôn MODE 2 (CMPLX) để trở về môi trường số phức bởi ta ấn luôn MODE 2 (CMPLX) để giá trị của A; B vẫn giữ nguyên dạng số phức.

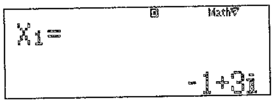
Ví dụ 4: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

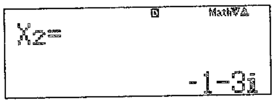
A. 20 B. 100 C. 10 D. 17

Lời giải

*** Bước 1:** Sử dụng MODE 2 (CMPLX) để vào chế độ tính toán với môi trường số phức.

*** Bước 2:** Tương tự như bài toán trên ta sử dụng MODE 5 (EQN) để giải phương trình tìm z.

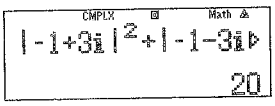




Cách ấn: MODE 5 3 1 = 2 = 1 0 = = =

*** Bước 3:** Tìm giá trị của A. Ta ấn

SHIFT hyp (−) 1 + 3 ENG ▶ x² + SHIFT hyp (−) 1 − 3 ENG ▶ x² =



Ta được kết quả $A=20$. Chọn A.

Đáp án A.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Môđun của số phức $w=z+i+1$ bằng

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Lời giải

Ta có $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i \Leftrightarrow z=\left[7+8i-\frac{2(1+2i)}{1+i}\right]:(2+i)$

Lúc này để tìm môđun của w ta thực hiện nhập vào màn hình

$$\left|\left[7+8i-\frac{2(1+2i)}{1+i}\right]:(2+i)+i+1\right|=$$

Màn hình: $\left|\left(7+8i-\frac{2(1+2i)}{1+i}\right)\right.$ ▷ → 5

Cách ấn

[SHIFT] [hyp] [(] [7] [+] [8] [ENG] [−] [▭/▭] [2] [(] [1] [+] [2] [ENG] [)] [▽] [1] [+] [ENG] [▷] [)] [÷] [(] [2] [+] [ENG] [)] [+] [ENG] [+] [1] [=]

Đáp án C.

> **Ví dụ 6:** Cho hai số phức $z_1=2+3i; z_2=1+i$. Khi đó giá trị của $\left|\frac{z_1^3+z_2}{z_1+z_2}\right|$ bằng
>
> A. $\sqrt{85}$ B. $\frac{61}{5}$ C. 85 D. $\sqrt{\frac{85}{25}}$

Lời giải

Ta thực hiện chuyển máy tính sang môi trường số phức bằng cách ấn [MODE] [2] (CMPLX).

Gán $z_1=2+3i\rightarrow A$: [2] [+] [3] [ENG] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Gán $z_2=1+i\rightarrow B$: [1] [+] [ENG] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Màn hình: $2+3i\rightarrow A$ → $2+3i$; $1+i\rightarrow B$ → $1+i$

Tính giá trị của $\left|\frac{z_1^3+z_2}{z_1+z_2}\right|$ ta ấn

[SHIFT] [hyp] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [$x^■$] [3] [▷] [+] [ALPHA] [°'"] [▽] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'"] [=]

Màn hình: $\left|\frac{A^3+B}{A+B}\right|$ → $\sqrt{85}$

Đáp án A.

> **Ví dụ 7:** Số phức z thỏa mãn hệ $\begin{cases}\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\\ \left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1\end{cases}$ là
>
> A. $z=-1-i$ B. $z=1+i$ C. $z=1-i$ D. $z=-1+i$

Lời giải

Ta sẽ thực hiện thử từng phương án bằng nút lệnh [CALC].

* **Bước 1:** Chuyển máy tính sang môi trường số phức bằng cách ấn [MODE] [2] (CMPLX).

* **Bước 2:** Thực hiện thử cho vế một của hệ. Nhập vào màn hình $\left|\frac{A-1}{A-i}\right|-1$, sau đó sử dụng nút lệnh [CALC] để thử từng phương án.

Cách ấn: [SHIFT] [hyp] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [−] [1] [▽] [ALPHA] [(−)] [−] [ENG] [▷] [▷] [−] [1]

	Màn hình
Với A: [CALC] [(−)] [1] [−] [ENG] [=]	$\left|\frac{A-1}{A-i}\right|-1$ → 0
Với B: [CALC] [1] [+] [ENG] [=]	$\left|\frac{A-1}{A-i}\right|-1$ → 0
Với C: [CALC] [1] [−] [ENG] [=]	$\left|\frac{A-1}{A-i}\right|-1$ → $\frac{-5+\sqrt{5}}{5}$
Với D: [CALC] [(−)] [1] [+] [ENG] [=]	$\left|\frac{A-1}{A-i}\right|-1$ → $-1+\sqrt{5}$

STUDY TIPS

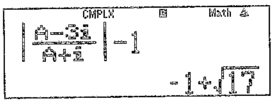
Trong bài toán này, việc thực hiện gán $z_1;z_2$ cho A; B mục đích giúp cho việc ấn máy tính toán ngắn gọn, tránh khỏi nhầm lẫn sai sót.

STUDY TIPS

1. Nếu thực hiện giải thông thường mà không sử dụng máy tính thử sẽ mất rất nhiều thời gian. Khi đó ta phải đặt $z=a+bi$, sau đó phải rút gọn và giải hệ.
2. Khi lựa chọn cách thử bằng máy tính thì ta cần chọn cách thử sao cho nhanh nhất. Nếu thử mỗi phương án một lần thì việc lặp đi lặp lại ấn từng đẳng thức của hệ sẽ mất rất nhiều thời gian. Do vậy, nếu sử dụng [CALC] một lần cho từng đẳng thức của hệ như lời giải sẽ tiết kiệm thời gian.

Từ bảng trên ta loại C và D.

* **Bước 3:** Thực hiện thử cho vế còn lại của hệ với hai phương án A và B, sau đó sử dụng nút lệnh CALC để thử từng phương án.



Cách ấn: SHIFT hyp ... ALPHA (−) ... 3 ENG ... ALPHA (−) + ENG ... − 1

Với A: CALC (−) 1 − ENG =. Vậy ta chọn B.

Đáp án B.

Phân tích: Với bài toán này, do A là một hằng số nên với bất kì cặp số (z_1, z_2, z_3) thỏa mãn hai đẳng thức đã cho thì $A = const$ do vậy ta có thể chọn (z_1, z_2, z_3) bất kì rồi thay vào A.

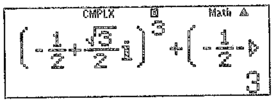
Ví dụ 8: Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính $A = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$.

A. 0　　B. 3　　C. $1+i$　　D. 1

Lời giải

Ta chọn một trong các cặp số (z_1, z_2, z_3) thỏa mãn đó là $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; 1\right)$.

Khi đó ta thực hiện bấm máy tính tìm A.



Cách ấn:

MODE 2 ((−) 1 ÷ 2 ▶ + √ 3 ▼ 2 ▶ ENG) x³ 3 ▶ + ((−) 1 ÷ 2 ▶ − √ 3 ▼ 2 ▶ ENG) x³ 3 ▶ + 1 x³ 3 =

Vậy $A = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3$.

Đáp án B.

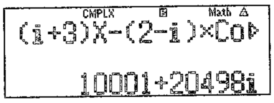
Ví dụ 9: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z + \frac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z}$. Môđun của số phức $w = z - i$ là

A. $\frac{\sqrt{26}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{26}}{25}$

Lời giải

Ta có $(i+3)z + \frac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z} \Leftrightarrow (i+3)z - (2-i)\bar{z} + 1 - 2i = 0$

Nhập biểu thức VT vào máy và sử dụng CALC thay $z = 10000 + 100i$, tức là ta thay $z = x + yi$ với $x = 10000; y = 100$.



Cách nhập MODE 2 (ENG + 3) ALPHA) − (2 − ENG)
× SHIFT 2 2 ALPHA)) + 1 − 2 ENG
CALC 1 0 0 0 0 + 1 0 0 ENG =

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} 10001 = 10000 + 1 = x + 1 \\ 20498 = 2.10000 + 5.100 - 2 = 2x + 5y - 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = -1 + \frac{4}{5}i - i = -1 - \frac{1}{5}i \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Đáp án A.

STUDY TIPS

Việc biến đổi hệ phương trình dựa trên thuật toán khai triển đa thức bằng máy tính cầm tay đã giới thiệu ở phần chức năng phía trên.

Ví dụ 10: Số phức z thỏa mãn $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = -(2+i)z$. Môđun của z là

A. $\sqrt{3}$.　　B. $\sqrt{5}$.　　C. $2\sqrt{2}$.　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Ta có $(3-2i)\overline{z}-4(1-i)=-(2+i)z \Leftrightarrow (3-2i)\overline{z}+(2+i)z-4(1-i)=0.$

Nhập biểu thức VT vào máy và sử dụng CALC thay $z=10000+100i$, tức là ta thay $z=x+yi$ với $x=10000; y=100.$

[MODE] [2] [(] [3] [−] [2] [ENG] [)] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [(] [2] [+] [ENG] [)] [ALPHA] [)] [−] [4] [(] [1] [−] [ENG] [)] [CALC] [1] [0] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]

CMPLX Math ▲
(3-2i)Conjg(X)+▷
49696-10096i

Máy hiện kết quả $49696-10096i.$

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} 49696=50000-300-4=5x-3y-4 \\ 10096=10000+100-4=x+y-4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x-3y-4=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow z=2+2i \Rightarrow |z|=2\sqrt{2}.$

Đáp án C.

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là

A. $20x-16y-47=0.$ B. $20x+16y-47=0.$

C. $20x+16y+47=0.$ D. $20x-16y+47=0.$

Lời giải

1. Giải bằng máy tính cầm tay.

Ta có $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}| \Leftrightarrow |2i-1-2\overline{z}|^2-4|z-2+3i|^2=0\ (*)$

Đặt $|2i-1-2\overline{z}|^2-4|z-2+3i|^2=f(z)$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng có dạng $ax+by+c=0.$

Ta thực hiện tìm $f(0); f(i); f(1)$. Lúc này $\begin{cases} f(0)=-47 \\ f(i)=-63 \\ f(1)=-27 \end{cases}$

Cách ấn:

[MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [2] [ENG] [−] [1] [−] [2] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [▶] [x^2] [−] [4] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [−] [2] [+] [3] [ENG] [▶] [x^2]

[CALC] [0] [=]		CMPLX Math▼ |2i-1-2Conjg(X)▷ -47
[CALC] [ENG] [=]		CMPLX Math▼▲ |2i-1-2Conjg(X)▷ -63
[CALC] [1] [=]		CMPLX Math ▲ |2i-1-2Conjg(X)▷ -27

$\begin{cases} f(0)=-47 \\ f(i)=-63 \\ f(1)=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-47 \\ b+c=-63 \\ a+c=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-47 \\ b=-16 \\ a=20 \end{cases} \Rightarrow$ Tập hợp biểu diễn số phức là đường thẳng có phương trình $20x-16y-47=0.$

2. Giải bằng phương pháp thông thường.

Đặt $z=x+yi, (x; y\in\mathbb{R}).$

STUDY TIPS

1. Dấu hiệu sử dụng cách giải toán này. Thường áp dụng cho các bài toán có dạng $|f(z)|=|g(z)|$ ($f(z); g(z)$ thường là hai hàm số có bậc một).

2. Lí giải việc thực hiện tìm $f(0); f(i); f(1)$.

Nhìn vào cách 2 ở phía dưới, khi thực hiện đặt z và rút gọn thì VT của $(*)$ sẽ trở về dạng $ax+by+c=0\ (1)$.

a. Do vậy nếu ta thay $z=0$ vào $f(z)$ tức là ta thay $x=0; y=0$ vào VT của $(1) \Leftrightarrow c=0$.

b. Tương tự $z=i \Leftrightarrow x=0; y=1 \Leftrightarrow b+c=0$.

c. Tương tự với trường hợp $z=1$.

Tuy nhìn cách 2 có vẻ ngắn hơn cách 1, tuy nhiên việc biến đổi phức tạp, khai triển bình phương chuyển vế khiến cho thao tác giải bài toán tốn nhiều thời gian hơn.

Theo đề bài ta có $2|x+yi-2+3i|=|2i-1-2(x-yi)|$

$\Leftrightarrow 4.\left[(x-2)^2+(y+3)^2\right]=(-2x-1)^2+4(y+1)^2$

$\Leftrightarrow 4(x^2-4x+4+y^2+6y+9)=4x^2+4x+1+4y^2+8y+4$

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0.$

Đáp án A.

Ví dụ 12: Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $3|z+1-i|=|4i-3-3\bar{z}|$ là

A. đường thẳng $3x+4y+1=0.$ B. đường thẳng $6x+1=0.$

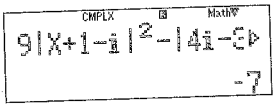
C. đường thẳng $6y+1=0.$ D. đường thẳng $3x-4y+1=0.$

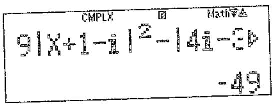
Lời giải

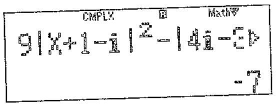
Tương tự như ví dụ 11 ta có

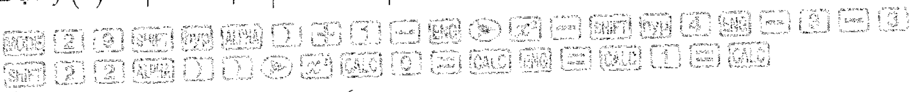
$3|z+1-i|=|4i-3-3\bar{z}|\Leftrightarrow 9|z+1-i|^2-|4i-3-3\bar{z}|^2=0.$

Đặt $f(z)=9|z+1-i|^2-|4i-3-3\bar{z}|^2$.









$\begin{cases} f(0)=-7 \\ f(i)=-49 \\ f(1)=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-7 \\ b+c=-49 \\ a+c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-42 \\ c=-7 \end{cases} \Rightarrow \quad -42y-7=0 \Leftrightarrow 6y+1=0$ là phương trình đường thẳng là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

Đáp án C.

Ví dụ 13: Mô đun của số phức $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+i\sqrt{2xy}}{x-y+2i\sqrt{xy}}$ bằng

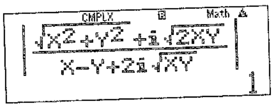
A. $\sqrt{x^2+8y^2-xy}$ B. $\sqrt{x^2+y^2}$ C. 1 D. $\sqrt{2x^2+2y^2-3xy}$

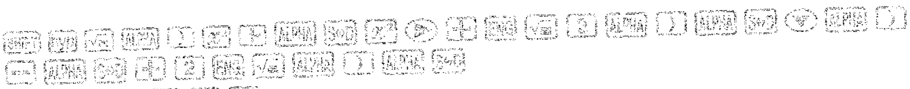
Lời giải

Với bài toán này ta sẽ sử dụng thử trường hợp đặc biệt.

Nhập vào máy tính $\left|\dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}+i\sqrt{2XY}}{X-Y+2i\sqrt{XY}}\right|$ sau đó ấn CALC thử các trường hợp.

Cách ấn:





Thử CALC 1 = 2 =

Máy hiện kết quả 1, thử thêm các trường hợp khác đều ra 1. Do vậy ta chọn C.

Đáp án C

Dạng 4: Căn bậc hai của số phức và phương trình số phức.

Để tính căn bậc hai của số phức ta thực hiện chuyển máy sang môi trường số phức bằng cách ấn MODE 2, thực hiện tìm căn bậc hai của số phức z bằng cách ấn

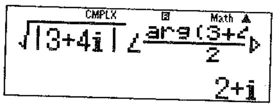
$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\angle\dfrac{\arg(z)}{2}.$

Tìm căn bậc n của số phức z ta thực hiện tìm theo công thức $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\angle\frac{\arg(z)}{n}$.

Ví dụ 1: Các căn bậc hai của số phức $z=3+4i$ là

A. $2-i$ B. $2-i$ và $i-2$ C. $2+i$ D. $2+i$ và $-2-i$

Lời giải



Ta thực hiện nhập vào màn hình $\sqrt{|3+4i|}\angle\frac{\arg(3+4i)}{2}$

Cách ấn

MODE 2 √ SHIFT hyp 3 + 4 ENG ▶ ▶ SHIFT (−) ▭ SHIFT 2 1 3 + 4 ENG) ▼ 2 =

Lúc này máy hiện $2+i$. Như vậy đáp án là $\pm(2+i)$.

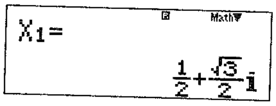
Vậy ta chọn D.

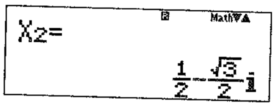
Đáp án D.

Ví dụ 2: Giải phương trình $z^2-z+1=0$ trên tập số phức.

A. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$. B. $z=\sqrt{3}\pm i$. C. $z=1\pm\sqrt{3}i$. D. $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải





Để giải phương trình bậc hai trên tập số phức ta chỉ cần đơn giản sử dụng lệnh MODE 5 3

Cách nhập: MODE 5 3 1 = − 1 = 1 = =

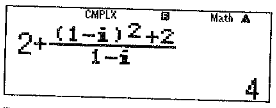
Máy hiện hai nghiệm của phương trình là $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

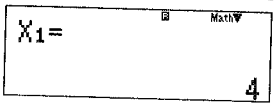
Đáp án D.

Ví dụ 3: Tìm số thực m để phương trình $z^2+(2-m)z+2=0$ có một nghiệm là $z=1-i$.

A. 6 B. 4 C. −2 D. 2

Lời giải





Để tìm được m ta chỉ cần thay $z=1-i$ vào phương trình.

$(1-i)^2+(2-m)(1-i)+2=0\Leftrightarrow m=2+\frac{(1-i)^2+2}{1-i}$.

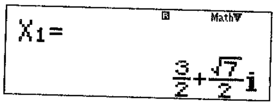
Cách ấn: MODE 2 2 + ▭ (1 − ENG) x² + 2 ▼ 1 − ENG =

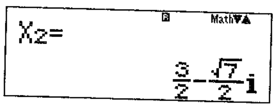
Đáp án B.

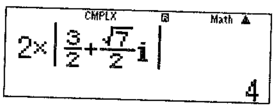
Ví dụ 4: Biết hai số phức có tổng bằng 3 và tích bằng 4. Tổng môđun của hai số phức đó bằng

A. 7. B. 4. C. 8. D. 12.

Lời giải







Áp dụng định lý Vi-et thì ta có hai số phức cần tìm là nghiệm của phương trình $z^2-3z+4=0$.

Sử dụng MODE 5 3 để giải phương trình

Cách ấn: MODE 5 3 1 = − 3 = 4 = =

Tìm tổng mô đun hai số phức

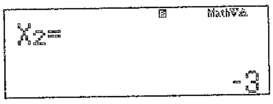
MODE 2 2 × SHIFT hyp ▭ 3 ▼ 2 ▶ + ▭ √ 7 ▼ 2 ▶ ENG.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Kí hiệu $z_1;z_2;z_3$ và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$.

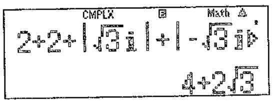
A. $T=4$. B. $T=2\sqrt{3}$. C. $T=4+2\sqrt{3}$. D. $T=2+2\sqrt{3}$.

Lời giải



Đây là dạng toán phương trình trùng phương bậc bốn, ta sử dụng [MODE] [5] [3].

Cách nhập: [5] [3] [1] [=] [–] [1] [=] [–] [1] [2] [=] [=]



Lúc này ta có phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=4 \\ z^2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z_2=-2 \\ z_3=\sqrt{3}i \\ z_4=-\sqrt{3}i \end{array}\right. \Rightarrow T=4+2\sqrt{3}$

Cách nhập:

[2] [+] [2] [+] [SHIFT] [hyp] [√] [3] [▶] [ENG] [▶] [+] [SHIFT] [hyp] [(–)] [√] [3] [▶] [ENG] [=]

Đáp án C.

Ví dụ 6: Kí hiệu $z_1;z_2;z_3$ và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-2z^3+5z^2-4z+3=0$. Lúc này $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ có giá trị là

A. 2. B. $2+2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $2-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Do máy tính không có chức năng giải phương trình bậc bốn và chức năng SOLVE khi qua chế độ số phức ta không thực hiện được. Do vậy ta cần đến sự trợ giúp của thuật giải Newton – Raphson.

STUDY TIPS

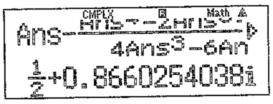
Thuật giải Newton – Raphson sử dụng để tìm nhân tử cho các phương trình bậc cao. Mấu chốt của thuật giải này là tìm được kết quả hội tụ từ công thức lặp nghiệm.

Ta có công thức lặp để tìm nghiệm $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

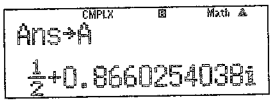
Bước 1: Chuyển máy tính sang môi trường số phức [MODE] [2], sau đó nhập i, bấm [=] để lưu kết quả trong Ans.

Bước 2: Nhập lên màn hình

$$\text{Ans}-\frac{\text{Ans}^4-2\text{Ans}^3+5\text{Ans}^2-4\text{Ans}+3}{4\text{Ans}^3-6\text{Ans}^2+10\text{Ans}-4}$$

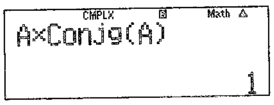


Bấm [=] liên tục để nhận được một dãy hội tụ. Kết quả như hình bên.



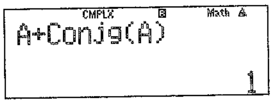
Bước 3: Lưu kết quả vào ô nhớ A. Thực hiện ấn [SHIFT] [RCL] [(–)].

Bước 4: Thực hiện nhân số phức liên hợp.



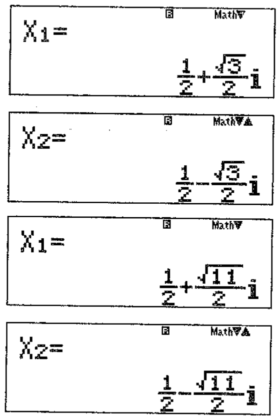
Áp dụng định lý Viet đảo tìm: $A\times\text{Conjg}(A)$ và $A+\text{Conjg}(A)$

Tìm $A\times\text{Conjg}(A)$ cách ấn: [ALPHA] [(–)] [×] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [(–)] [)] [=]



Tìm $A+\text{Conjg}(A)$ cách ấn: [ALPHA] [(–)] [+] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [(–)] [)] [=]

Từ kết quả trên ta thu được nhân tử của phương trình đã cho là z^2-z+1. Chia đa thức ta tìm được nhân tử còn lại là z^2-z+3.

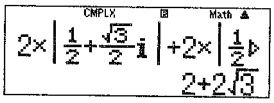


Vậy $z^4-2z^3+5z^2-4z+3=0 \Leftrightarrow (z^2-z+1)(z^2-z+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$

Sử dụng lệnh MODE 5 3 để tìm ra bốn nghiệm trên.

Thực hiện tìm

$$T=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|=2.\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+2.\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|$$



Cách ấn

MODE 2 2 × SHIFT hyp ▭ 1 ▽ 2 ▷ + ▭ √ 3 ▽ 2 ▷ ENG ▷ + 2 × SHIFT hyp 1 ▭ 2 ▷ − ▭ √ 1 1 ▽ 2 ▷ ENG =

Vậy $T=2+2\sqrt{3}$.

Đáp án B.

Dạng 5: Các bài toán cực trị liên quan đến số phức.

* Một số công thức tính nhanh số phức vận dụng vào bài toán tìm min max số phức

1. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.
2. $z.\bar{z}=|z|^2$; $\overline{az_1+bz_2}=a\overline{z_1}+b\overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$; $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$; $\overline{z_1}.\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$; $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.
4. $|z_1|-|z_2|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$
5. $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$
6. $|z_1|+|z_2|+|z_3|\le|z_1+z_2-z_3|+|z_1-z_2+z_3|+|-z_1+z_2+z_3|$
7. Cho $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k$.

   Ta có $|z_1-z_2||z_2-z_3|+|z_2-z_3||z_3-z_1|+|z_3-z_1||z_1-z_2|\le 9k^2$
8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=k$ thì $\begin{cases}\max|z|=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\\ \min|z|=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\end{cases}$
9. Cho $|z+a|=1$. Khi đó $|z^2+a^2|\ge\frac{\left|1-2|a|\right|}{\sqrt{2}}$.
10. Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_0|=R$. Lúc này tập hợp các điểm diễn số phức z là đường tròn có tâm là điểm I là điểm biểu diễn số phức z_0. Lúc này $\begin{cases}\max|z|=|z_0|+R\\ \min|z|=\left||z_0|-R\right|\end{cases}$

11. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1z-z_2|=r$. Khi đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_3|$ là $\begin{cases}\max P=\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\dfrac{r}{|z_1|}\\ \min P=\left|\dfrac{r}{|z_1|}-\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|\end{cases}$

Ví dụ 1: Trong số phức z thỏa mãn $|z|=|\bar{z}-3+4i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là

A. $z=3+4i$. B. $z=-3-4i$. C. $z=\dfrac{3}{2}-2i$. D. $z=\dfrac{3}{2}+2i$.

Lời giải

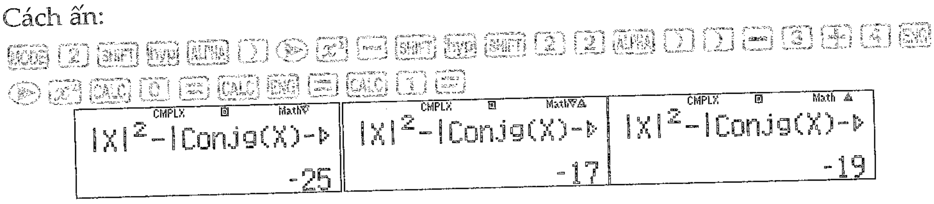
Phân tích: Với bài toán này, để tìm được số phức có môđun nhỏ nhất tức là tìm $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$ sao cho $\sqrt{x^2+y^2}$ nhỏ nhất. Ta cần sử dụng dữ kiện đề bài để tìm mối liên hệ giữa x; y từ đó tìm được số phức cần tìm.

Tương tự như bài toán ở ví dụ 11 dạng 3, ta sẽ tìm mối quan hệ giữa $x;\ y$ bằng cách tìm phương trình đường thẳng là tập hợp biểu diễn số phức z.

$f(z)=|z|^2-|\bar{z}-3+4i|^2$

Sử dụng máy tính tìm $f(0);f(i);f(1)$.

Cách ấn:



$\Rightarrow\begin{cases}c=-25\\ b+c=-17\\ a+c=-19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-25\\ b=8\\ a=6\end{cases}\Leftrightarrow$ đường thẳng $6x+8y-25=0$ là tập hợp biểu diễn số phức z.

Ta có $6x+8y-25=0\Leftrightarrow 6x+8y=25$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $\sqrt{6^2+8^2}.\sqrt{x^2+y^2}\ge 6x+8y$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\dfrac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{8}\\ 6x+8y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=2\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{3}{2}+2i.$

Đáp án D.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|=|\bar{z}+3i|$. Môđun nhỏ nhất của số phức z là

A. $|z|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $|z|_{\min}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. C. $|z|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. D. $|z|_{\min}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

STUDY TIPS

Bài toán hỏi $|z|_{\min}$ do vậy ta không cần tìm dấu bằng xảy ra như ở ví dụ 1 để tiết kiệm thời gian trong quá trình làm bài trắc nghiệm.

Ta có $|z+1|=|\bar{z}+3i|\Leftrightarrow|z+1|^2-|\bar{z}+3i|^2=0$. Đặt $f(z)=|z+1|^2-|\bar{z}+3i|^2$

$\begin{cases}f(0)=-8\\ f(i)=-2\\ f(1)=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-8\\ b=6\\ a=2\end{cases}\Rightarrow 2x+6y-8=0\Leftrightarrow x+3y-4=0$ là mối liên hệ giữa $x;\ y$ trong đó $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$.

$x+3y-4=0 \Leftrightarrow x+3y=4.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $\sqrt{1^2+3^2}.\sqrt{x^2+y^2} \ge |x+3y|$

$\Leftrightarrow |z| \ge \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của môđun số phức $w=z-1+i$.

A. $|w|_{\min}=\frac{1}{4}$. B. $|w|_{\min}=\frac{1}{2}$. C. $|w|_{\min}=1$. D. $|w|_{\min}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

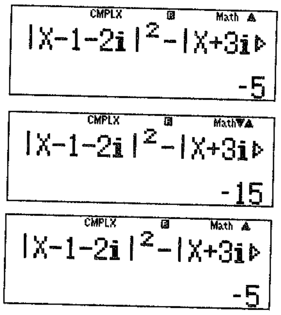
Do vế phải của phương trình đã cho là dạng nhân tử, do vậy ta sẽ phân tích vế trái bằng lệnh MODE 5 3

Cách ấn: MODE 5 3 1 = − 2 = 5 = =

Ta thu được $|z^2-2z+5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow |(z-1-2i)(z-1+2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z-1+2i|=0 \Rightarrow w=-i \Rightarrow |w|=1. \\ |z-1-2i|=|z+3i-1| \Leftrightarrow |z-1-2i|^2-|z+3i-1|^2=0\ (*) \end{array}\right.$



Đặt $|z-1-2i|^2-|z+3i-1|^2=0$

Bài toán trở về giống ví dụ 1 và ví dụ 2.

Ta có $\begin{cases} f(0)=-5 \\ f(i)=-15 \\ f(1)=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-10 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow -10y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-1}{2}$

MODE 2 SHIFT hyp ALPHA) − 1 − 2 ENG ▶ x^2 − SHIFT hyp ALPHA) + 3 ENG − 1 ▶ x^2 CALC 0 = CALC ENG = CALC 1 =

Vậy $w=x-1+\frac{1}{2}i.$

Ta có $|w|^2=\left|(x-1)+\frac{1}{2}i\right|^2=(x-1)^2+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{4}\Rightarrow |w|_{\min}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow z=1+\frac{1}{2}i.$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $|w|_{\min}=\frac{1}{2}.$

STUDY TIPS

Trường hợp của ví dụ 3 là một bài điển hình của việc sử dụng hình biểu diễn giải quyết bài toán nhanh hơn thay vì sử dụng cách đại số thông thường.

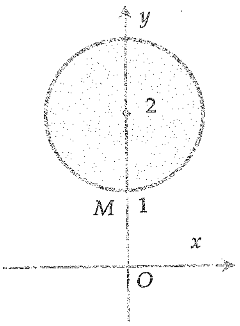
Đáp án B.

Ví dụ 4: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)}{1-i}z+2\right|=1$, z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất. Vậy môđun của z_0 bằng

A. 1. B. 4. C. $\sqrt{10}$. D. 9.

Lời giải

Ta có $\left|\frac{(1+i)}{1-i}z+2\right|=1 \Leftrightarrow |iz+2|=1 \Leftrightarrow |(-y+2)+ix|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=1$



Do vậy tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_0. Mặt khác z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất, do vậy $\overline{OM}$ phải nhỏ nhất. Nhìn vào hình vẽ ta thấy $\overline{OM}_{min}=1 \Leftrightarrow M(0;1)$. Vậy $|z_0|=1 \Leftrightarrow z_0=1$.

Đáp án A.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=1$. Môđun lớn nhất của số phức z là

A. $|z|_{max}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.
B. $|z|_{max}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.
C. $|z|_{max}=\sqrt{7+2\sqrt{5}}$.
D. $|z|_{max}=\sqrt{7-2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Áp dụng công thức số 10 phía trên ta có

$|z|_{max}=|z_0+R|=|1+2i|+1=1+\sqrt{5}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Đáp án B.

Dạng 6: Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên quan đến đường tròn

Một số công thức tính nhanh:

1. Cho $z_1 \in \mathbb{C}$, số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=R$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(I_1;R)$, trong đó I_1 là điểm biểu diễn của số phức z_1 trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

2. Cho $z_1,z_2 \in \mathbb{C}; z_2 \neq 0$ và số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=R$. Khi đó ta có các kết quả sau:

– Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w_1=z.z_2$ là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của $z_1.z_2$, bán kính bằng $R.|z_2|$.

– Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w_2=\frac{z}{z_2}$ là đường tròn, tâm là điểm biểu diễ của số phức $\frac{z_1}{z_2}$, bán kính bằng $\frac{R}{|z_2|}$.

– Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w_3=z+z_2$ là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của z_1+z_2, bán kính bằng R.

– Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w_4=z-z_2$ là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của z_1+z_2, bán kính bằng R.

3. Cho $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$ và số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=R$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=z_2.z+z_3$ là một đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của số phức $z_2.z_1+z_3$, bán kính bằng $|z_2|.R$

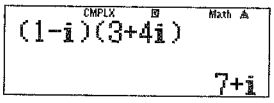
NHẬN XÉT

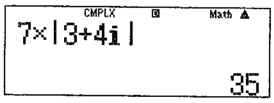
Dễ thấy kết quả 3 tổng quát cho cả hai kết quả 1 và 2. Vậy nên ta chỉ cần nhớ được kết quả 3, từ đó suy ra được các kết quả 1 và 2.

Ví dụ 1: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=7$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(3+4i)z$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó

A. $I(7;1), r=\sqrt{35}$
B. $I(1;7), r=35$
C. $I(7;1), r=35$
D. $I(1;7), r=\sqrt{35}$

Lời giải





Từ $|z-1+i|=7 \Leftrightarrow |z-(1-i)|=7=|z-z_1| \to z_1=1-i, R=7$.

Từ $w=(3+4i)z=z.z_2 \to z_2=3+4i \to z_1.z_2=(1-i)(3+4i)=7+i$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là $I(7;1)$, bán kính $r=R.|z_2|=7.|3+4i|=35$.

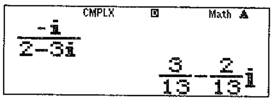
Đáp án C.

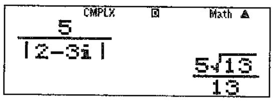
Ví dụ 2: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+i|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{z}{2-3i}$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính r của đường tròn đó

A. $I\left(\dfrac{3}{13};-\dfrac{2}{13}\right), r=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$ B. $I\left(\dfrac{3}{13};\dfrac{2}{13}\right), r=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

C. $I\left(-\dfrac{3}{13};-\dfrac{2}{13}\right), r=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$ D. $I\left(-\dfrac{3}{13};\dfrac{2}{13}\right), r=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$

Lời giải





Từ $|z+i|=5 \Leftrightarrow |z-(-i)|=5 \to z_1=-i, R=5$.

Từ $w=\dfrac{z}{2-3i}=\dfrac{z}{z_2} \to z_2=2-3i \to \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-i}{2-3i}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{3}{13};-\dfrac{2}{13}\right)$, bán kính $r=\dfrac{R}{|z_2|}=\dfrac{5}{|2-3i|}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$.

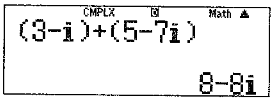
Đáp án A.

Ví dụ 3: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-3+i|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z+5-7i$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính r của đường tròn đó

A. $I(-8;8), r=2$ B. $I(8;-8), r=4$

C. $I(-8;8), r=4$ D. $I(8;-8), r=2$

Lời giải



Từ $|z-3+i|=4 \Leftrightarrow |z-(3-i)|=4=|z-z_1| \to z_1=3-i; R=4$.

Từ $w=z+5-7i=z+z_2 \to z_2=5-7i \to z_1+z_2=(3-i)+(5-7i)=8-8i$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(8;-8)$, bán kính $r=R=4$.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Cho các số phức z thỏa mãn $|z-6+i|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+3i)z-5-2i$ là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính r của đường tròn đó

A. $I(4;15), r=4$ B. $I(-4;15), r=\sqrt{10}$

C. $I(-4;15), r=4$ D. $I(4;15), r=4\sqrt{10}$

Lời giải

Từ $|z-6+i|=4 \Leftrightarrow |z-(6-i)|=4=|z-z_1| \Leftrightarrow z_1=6-i; R=4$.

Từ $w=(1+3i)z-5-2i=z_2.z+z_3 \to z_2=1+3i; z_3=-5-2i$

$\to z_2.z_1+z_3=(1+3i)(6-i)-5-2i=4+15i$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(4;15)$, bán kính $r=|z_2|.R=|1+3i|.4=4\sqrt{10}$.

CMPLX Math
(1+3i)(6-i)-5-2i
4+15i

CMPLX Math
|1+3i|×4
4√10

Đáp án D.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là

A. $\sqrt{13}+2$ B. 4 C. 6 D. $\sqrt{13}+1$

Lời giải

$|z-(2+3i)|=1 \Leftrightarrow |\overline{z-(2+3i)}|=1 \Leftrightarrow |\bar{z}-\overline{2+3i}|=1 \Leftrightarrow |\bar{z}-(2-3i)|=1 \to \begin{cases} z_1=2-3i \\ R=1 \end{cases}$

Đặt $w=\bar{z}+1+i=\bar{z}+(1+i) \to z_2=1+i \to z_1+z_2=(2-3i)+(1+i)=3-2i$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\bar{z}+1+i$ là đường tròn có tâm $I(3;-2)$, bán kính $r=R=1$.

Áp dụng công thức số 10 dạng 5, ta có $|w|_{max}=OI+r=\sqrt{3^2+(-2)^2}+1=\sqrt{13}+1$.

Đáp án D.

STUDY TIPS

Với hai số phức z_1, z_2 ta luôn có:

$|z_1-z_2|=|\overline{z_1-z_2}|=|\bar{z_1}-\bar{z_2}|$

CMPLX Math
(2-3i)+(1+i)
3-2i

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i+1)$.

A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$.
C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Câu 2: Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

A. $(\sqrt{3}+2i)+(\sqrt{3}-2i)$. B. $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$.
C. $(2+2i)^2$. D. $\dfrac{2+3i}{2-3i}$.

Câu 3: Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

A. $(1+i)^8 = -16$. B. $(1+i)^8 = 16i$.
C. $(1+i)^8 = 16$. D. $(1+i)^8 = -16i$.

Câu 4: Số nào trong các số sau là số thực?

A. $(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)$. B. $(2+i\sqrt{5})+(2-i\sqrt{5})$.
C. $(2+2i)^2$. D. $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$.

Câu 5: Số $\dfrac{1}{1+i}$ bằng

A. $1+i$. B. $\dfrac{1}{2}(1-i)$. C. $1-i$. D. i.

Câu 6: Tập hợp các nghiệm của phương trình $z = \dfrac{z}{z+i}$ là

A. $\{0;1;-i\}$. B. $\{0\}$.
C. $\{1-i\}$. D. $\{0;1\}$.

Câu 7: Với mọi số phức z, ta có $|z+1|^2$ bằng

A. $|z|^2 + 2|z| + 1$. B. $z.\bar{z} + 1$.
C. $z + \bar{z} + 1$. D. $z.\bar{z} + z + \bar{z} + 1$.

Câu 8: Tập hợp các nghiệm của phương tình $z^2 + |z|^2 = 0$ là

A. tập hợp mọi số ảo. B. $\{0;i;-i\}$.
C. $\{-i;0\}$. D. $\{0\}$.

Câu 9: Nghiệm thực lớn nhất của phương trình $z^3 - (3+i)z^2 + (3i-1)z + i = 0$ trên $\mathbb{C}$ là

A. $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. B. $\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$.
C. $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. D. $\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$.

Câu 10: Biến đổi rút gọn $z_1 = i^{2016} + (1+i)^4 + 1$ ta được

A. $z_1 = 4i$. B. $z_1 = 2$. C. $z_1 = -4i$. D. $z_1 = -2$.

Câu 11: Môđun của số phức $2i(1+3i)$ không bằng môđun của số phức nào sau đây?

A. $2i(1-3i)$. B. $\sqrt{40} + i$.
C. $\sqrt{3} + \sqrt{37}i$. D. $-2i(1-3i)$.

Câu 12: Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 - i$ là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}i}$. B. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.
C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$. D. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Câu 13: Căn bậc hai của số phức $i^3 + 3i$ là

A. $1-i$ và $1+i$. B. $1-i$ và $-1+i$.
C. $1+i$ và $-1-i$. D. $\sqrt{3}i$ và $-\sqrt{3}i$.

Câu 14: Cho số phức tùy ý $z \neq 1$. Xét các số phức $\alpha = \dfrac{i^{2005} - i}{z - 1} - z^2 + (\bar{z})^2$ và $\beta = \dfrac{z^3 - z}{z-1} + (\bar{z})^2 + \bar{z}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. α là số thực, β là số thực.
B. α là số thực, β là số ảo.
C. α là số ảo, β là số thực.
D. α là số ảo, β là số ảo.

Câu 15: Nếu môđun của số phức z bằng r $(r > 0)$ thì môđun của số phức $(1-i)^2 z$ bằng

A. $4r$. B. $2r$. C. $r\sqrt{2}$. D. r.

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $(10i)z + 2i\bar{z} = 5 + 3i$. Môđun của $w = 2(z+1) - \bar{z}$ là

A. $|w| = 9$. B. $|w| = \dfrac{3\sqrt{61}}{8}$. C. $|w| = 5$. D. $|w| = \dfrac{11}{\sqrt{2}}$.

Câu 17: Các phương trình được xét trên tập số phức. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình $x^2 - 4x + 5 = 0$ vô nghiệm.
B. Phương trình $x^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
C. Phương trình $x^2 = -3$ có hai nghiệm $\pm i\sqrt{3}$.
D. Phương trình $x^4 - 4x^2 = 5$ có 4 nghiệm.

Câu 18: Nếu số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $|z| = 1$ thì phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. 2. D. 3.

Câu 19: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị $\dfrac{1}{|z_1|} + \dfrac{1}{|z_2|}$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 20: Cho số phức $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{z-2+i}{i^{2016}}=(2+i)(1-i)^2$. Giá trị $a+2b$ bằng

A. −6. B. −1. C. 0. D. 1.

Câu 21: Tổng các môđun các nghiệm phức của phương trình $x^4-6x^2-16=0$ là

A. $S=2\sqrt{2}$. B. $S=6\sqrt{2}$.
C. $S=-4\sqrt{2}$. D. $S=2\sqrt{3}$.

Câu 22: Các số thực $x;y$ thỏa mãn $(2x+3y+1)+(-x+2y)i=(3x-2y+2)+(4x-y-3)i$ là

A. $(x;y)=\left(\dfrac{9}{11};\dfrac{4}{11}\right)$. B. $(x;y)=\left(-\dfrac{9}{11};-\dfrac{4}{11}\right)$.
C. $(x;y)=\left(\dfrac{9}{11};-\dfrac{4}{11}\right)$. D. $(x;y)=\left(-\dfrac{9}{11};\dfrac{4}{11}\right)$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Môđun lớn nhất của số phức $w=z-2i$ là

A. $|w|_{max}=\sqrt{26+6\sqrt{17}}$.
B. $|w|_{max}=\sqrt{26-6\sqrt{17}}$.
C. $|w|_{max}=\sqrt{26+8\sqrt{17}}$.
D. $|w|_{max}=\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z+3i|$. Môđun nhỏ nhất của số phức z là

A. $|z|_{min}=\dfrac{7}{68}$. B. $|z|_{min}=\dfrac{7}{\sqrt{68}}$.
C. $|z|_{min}=\dfrac{7\sqrt{68}}{136}$. D. $|z|_{min}=\dfrac{\sqrt{68}}{7}$.

Câu 25: Số phức z thỏa mãn $\dfrac{|z|^2}{z}+2iz+\dfrac{2(z+i)}{1-i}=0$ có dạng $a+bi$ khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{5}$. B. −5. C. 5 D. $-\dfrac{3}{5}$.

Câu 26: Cho số phức z thỏa mãn:

$$(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i.$$

Số phức z có phần ảo bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. B. −1. C. $-\dfrac{1}{3}$. D. 1.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z+\dfrac{2+i}{i}=(2-i)\bar{z}$. Môđun của số phức $w=z-i$ là

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{5}$. B. $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\dfrac{\sqrt{26}}{25}$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn:

$$\left|z+\frac{5}{2}-2i\right|=\left|z+\frac{3}{2}+2i\right|.$$

Biết biểu thức $Q=|z-2-4i|+|z-4-6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z=a+bi;\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$. Tính $P=a-4b$.

A. $P=-2$. B. $P=-1$.
C. $P=\dfrac{1333}{272}$. D. $P=\dfrac{691}{272}$.

Câu 29: Trong các số phức z thỏa mãn $|z|=|\bar{z}-3+4i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là

A. $z=3+4i$. B. $z=-3-4i$.
C. $z=\dfrac{3}{2}-2i$. D. $z=\dfrac{3}{2}+2i$.

Câu 30: Số phức z thỏa mãn $(3-2i)\bar{z}-4(1-i)=(2+i)z$. Môđun của z là

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 31: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{(1+i)}{1-i}z+2\right|=1$, z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất. Môđun của z_0 bằng

A. 1. B. 4. C. $\sqrt{10}$. D. 9.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $2z+\bar{z}+4i=9$. Khi đó môđun của z^2 là

A. 25. B. 4. C. 16. D. 9.

Câu 33: Tìm môđun của số phức z biết $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$.

A. $|z|=4$. B. $|z|=1$. C. $|z|=\dfrac{1}{2}$. D. $|z|=2$.

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2z+\bar{z}=4i-20$. Môđun của z là

A. 4. B. 5. C. 10. D. 6.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Môđun của số phức $w=z+i+1$ là

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$. Môđun của số phức $w=z+2i+1$ là

A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{10}$. D. 5.

Câu 37: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là

A. $1-2i$. B. $-1+2i$.
C. $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$. D. $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

Câu 38: Các căn bậc hai của số phức $-117+44i$ là

A. $\pm(2+11i)$. B. $\pm(2-11i)$.
C. $\pm(7+4i)$. D. $\pm(7-4i)$.

Câu 39: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=2+i$. B. $z=3+i$.
C. $z=2+2i$. D. $z=1+3i$.

Câu 40: Cho phương trình $(1+i)z-(2-i)\bar{z}=3$.

Môđun của số phức $w=\dfrac{i-2z}{1-i}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{122}}{4}$. B. $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{122}}{5}$. D. $\dfrac{\sqrt{110}}{3}$.

Câu 41: Gọi z là số phức thỏa mãn $z+2\bar{z}=2-4i$. Môđun của z là

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{2\sqrt{37}}{3}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\dfrac{2\sqrt{51}}{3}$.

Câu 42: Môđun của số phức z thỏa mãn phương trình $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$ là

A. $|z|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
C. $|z|=\sqrt{2}$. D. $|z|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)(z-i)-3\bar{z}+3i=0$. Môđun của số phức $w=\dfrac{2\bar{z}+z+3i}{z^2}$ là $\dfrac{m\sqrt{106}}{26}$. Giá trị của m là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 44: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i-1|=|\bar{z}-2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=|z-2+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$.
B. đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.
C. đường thẳng có phương trình $x-3y+6=0$.
D. đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

Câu 46: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+2-3i}{\bar{z}-4+i}\right|=1$ là

A. đường tròn tâm $I(-2;3)$ bán kính $r=1$.
B. đường thẳng $3x-y-1=0$.
C. đường thẳng $3x+y-1=0$.
D. đường tròn tâm $I(-4;1)$ bán kính $r=1$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn:

$$(3+i)\bar{z}+(2i+1)z+4i=3.$$

Khi đó phần thực của số phức $\bar{z}$ bằng

A. 5. B. –2. C. 2 D. –5.

Câu 48: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-i|=|\bar{z}-3i+2|$ là

A. đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
B. đường thẳng $d: x+2y+3=0$.
C. đường tròn tâm $I(-2;-3)$, bán kính $R=3$.
D. đường thẳng $d: y=0$.

Câu 49: Cho số phức $z=a+bi,(a;b\in\mathbb{R};a\ge 0;b\ge 0)$. Đặt đa thức $f(x)=ax^2+bx-2$.

Biết $f(-1)\le 0; f\left(\dfrac{1}{4}\right)\le\dfrac{-5}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $|z|_{max}=2\sqrt{5}$. B. $|z|_{max}=3\sqrt{2}$.
C. $|z|_{max}=5$. D. $|z|_{max}=2\sqrt{6}$.

Câu 50: Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w=\dfrac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=|z+1-i|$ là

A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. 8.

Câu 51: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó

A. $r=4$ B. $r=5$
C. $r=20$ D. $r=22$

Câu 52: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích bằng

A. $S=9\pi$ B. $S=12\pi$
C. $S=16\pi$ D. $S=25\pi$

Câu 53: Biết rằng $|z-1|=2$ và tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn. Xác định bán kính của đường tròn đó

A. $r=4$ B. $r=9$
C. $r=16$ D. $r=25$

Câu 54: Cho số phức z thay đổi luôn có $|z|=2$. Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1-2i)\bar{z}+3i$ là

A. Đường tròn $x^2+(y-3)^2=20$

B. Đường tròn $x^2+(y-3)^2=2\sqrt{5}$

C. Đường tròn $x^2+(y+3)^2=20$

D. Đường tròn $(x-3)^2+y^2=2\sqrt{5}$

Câu 55: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z-i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó

A. $I(-1;-2)$ B. $I(1;2)$

C. $I(-1;-3)$ D. $I(1;3)$

Câu 56: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ B. $\max|z|=3$

C. $\max|z|=7$ D. $\max|z|=6$

Câu 57: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $M=|z+1|$ lần lượt bằng

A. $\max M=5+\sqrt{5}; \min M=5-\sqrt{5}$

B. $\max M=5+\sqrt{5}; \min M=5$

C. $\max M=5; \min M=\sqrt{5}$

D. $\max M=5; \min M=5-\sqrt{5}$

Câu 58: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $M=|z-1-i|$ là

A. $3-\sqrt{5}$ B. $3+\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{5}$

Câu 59: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-2i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $M=|(2+i)z+1-i|$ là

A. $\dfrac{\sqrt{26}+\sqrt{10}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{26}-\sqrt{10}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Câu 60: Biết số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1-4i|$ là

A. $\sqrt{10}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{10}$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đáp án D.

Cách ấn:

[MODE] [2] [SHIFT] [2] [2] [ENG] [(] [3] [ENG] [+] [1] [)] [)] [=]

```
Conjg(i(3i+1))
                -3-i
```

Câu 2: Đáp án C.

Với A: $\left(\sqrt{3}+2i\right)+\left(\sqrt{3}-2i\right)=2\sqrt{3}$ là số thực, loại.

Với B:

[MODE] [2] [(] [√■] [2] [▶] [+] [3] [ENG] [)] [(] [√■] [2] [▶] [−] [3] [ENG] [)] [=]

```
(√2+3i)(√2-3i)
                  11
```

Loại

Với C: [(] [2] [+] [2] [ENG] [)] [x^2] [=]

```
(2+2i)^2
                  8i
```

Vậy ta chọn C.

Câu 3: Đáp án C.

Ta có [MODE] [2] [(] [1] [+] [ENG] [)] [x^■] [8] [=]

```
(1+i)^8
                  16
```

Câu 4: Đáp án B.

Câu 5: Đáp án B.

Ta có [MODE] [2] [1] [□/□] [1] [+] [ENG] [=]

```
  1
 ---
 1+i
              1/2-1/2 i
```

Câu 6: Đáp án B.

Ta có $z\neq -i$.

$$z=\frac{z}{z+i}\Leftrightarrow z^2+iz=z\Leftrightarrow z^2+iz-z=0.$$

Do $z\neq -i$ nên ta sẽ thử ba phương án còn lại.

Sử dụng CALC để thử phương án.

Nhập vào màn hình vế trái của phương trình trên rồi CALC cho ba phương án B; C; D.

[MODE] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [ENG] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [CALC] [0] [=] [CALC] [1] [−] [ENG] [=] [CALC] [1] [=]

X^2-iX-X	X^2-iX-X	X^2-iX-X
0	-2-2i	-i

Từ đây ta thấy chỉ có $z=0$ là thỏa mãn phương trình.

Câu 7: Đáp án D.

Ta thực hiện gán z với một số phức bất kì, ở đây ta chọn $z=1+i$. Nhập [MODE] [2] [1] [+] [ENG] [SHIFT] [RCL] [)]

```
1+i→X
                 1+i
```

Với A: Ta nhập vào màn hình $|X+1|^2-|X|^2-2|X|-1$

[SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [x^2] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [x^2] [−] [2] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [=]

```
|X+1|^2-|X|^2-2|X▶
              2-2√2
```

Kết quả khác 0 nên ta loại A.

Với B: ta nhập

[SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [x^2] [−] [ALPHA] [)] [×] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [1] [=]

```
|X+1|^2-X×Conjg(▶
                   2
```

Với C: ta nhập

[SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [x^2] [−] [ALPHA] [)] [−] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [1] [=]

```
|X+1|^2-X-Conjg(▶
                   2
```

Từ đây ta loại B;C. Vậy ta chọn D.

Câu 8: Đáp án A.

Ta có thể nhẩm nhanh được $z=0$ luôn là một nghiệm của phương trình $z^2+|z|^2=0$.

Vậy ta sẽ thử với $z=i; z=-i$ và $z=2i$ (vì phương án A là tập hợp mọi số ảo).

Ta nhập vào màn hình vế trái của phương trình và sử dụng CALC.

[ALPHA] [)] [x^2] [+] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [x^2] [CALC] [ENG] [=] [CALC] [(−)] [ENG] [=] [CALC] [2] [ENG] [=]

Tất cả các trường hợp ta vừa thử đều ra kết quả là 0.

Do vậy phương trình thỏa mãn với mọi số ảo.

```
X^2+|X|^2
                   0
```

Câu 9: Đáp án C.

Do các hệ số của phương trình là các số phức, do vậy ta không sử dụng được chức năng giải hệ phương trình [MODE] [5].

Từ đây ta sẽ sử dụng CALC. Nhập vế trái của phương trình vào máy tính và sử dụng CALC cho các phương án.

[MODE] [2] [ALPHA] [)] [x^■] [3] [▶] [−] [(] [3] [+] [ENG] [)] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [(] [3] [ENG] [−] [1] [)] [ALPHA] [)] [+] [ENG] [CALC] [(] [3] [−] [√■] [1] [3] [)] [)] [□/□] [2] [=] [CALC] [(] [4] [+] [√■] [1] [3] [)] [)] [□/□] [3] [=] [CALC] [(] [3] [+] [√■] [1] [3] [)] [)] [□/□] [2] [=] [CALC] [(] [4] [−] [√■] [1] [3] [)] [)] [□/□] [2] [=]

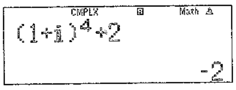
X^3-(3+i)X^2+(3i-▶	X^3-(3+i)X^2+(3i-▶
0	-5.522630574+1€▶
X^3-(3+i)X^2+(3i-▶	X^3-(3+i)X^2+(3i-▶
0	(30-9√13)/8 + (-1+2√13)/4 ▶

Từ kết quả hiển thị trên màn hình ta chọn C. Do $\frac{3+\sqrt{13}}{2} > \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Câu 10: Đáp án D.

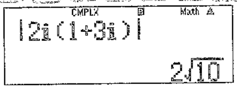
Trong sách Công phá toán 3 trang 323 tôi có đề cập về cách rút gọn i^n. Do trong bài $n = 2016 = 504.4$ nên $i^{2016} = 1$. Vậy $z_1 = (1+i)^4 + 2$.

Ta nhập



Câu 11: Đáp án B.

Ta nhập



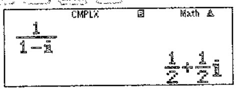
Ta loại A và D do A là số phức liên hợp của số đề cho nên có cùng môđun. Với D thì ta luôn có $|z| = |-z|$.

Với B ta có thể nhẩm nhanh $\left|\sqrt{40} + i\right| = \sqrt{41} \neq 2\sqrt{10}$.

Ta chọn B.

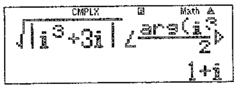
Câu 12: Đáp án B.

Ta nhập vào màn hình $\frac{1}{1-i} =$



Câu 13: Đáp án C.

Trong phần lí thuyết tôi có giới thiệu cho quý độc giả cách bấm căn bậc hai của số phức. Do vậy ở đây ta nhập luôn.

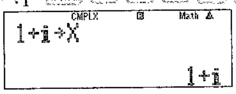


Vậy các căn bậc hai của số phức đã cho là $1+i$ và $-1-i$.

Câu 14: Đáp án C.

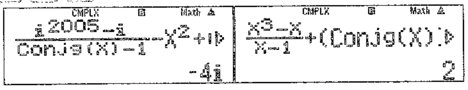
Ta thực hiện nhập hai số phức vào máy tính và thử với một trường hợp $z \neq 1$ bất kì. Ở đây ta thử $z = 1+i$.

Gán $z = 1+i$. Nhập



Ta tính α.

Tính β.



Lúc này ta có thể kết luận α là số ảo, β là số thực.

Câu 15: Đáp án B.

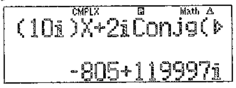
Ta có $\left|(1-i)^2\right| = 2 \Rightarrow \left|(1-i)^2 z\right| = 2r$.

Câu 16: Đáp án B.

Ta có $(10i)z + 2i\bar{z} = 5+3i \Leftrightarrow (10i)z + 2i\bar{z} - 5 - 3i = 0$.

Nhập VT của phương trình vào máy tính và CALC $z = 10000 + 100i$.

Ta nhập



Ta có hệ $\begin{cases} 805 = 8.100 + 5 = 8y + 5 \\ 119997 = 10.10000 + 2.10000 - 3 = 12x - 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{-5}{8} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}i \Rightarrow w = \frac{9}{4} - \frac{15}{8}i \Rightarrow |w| = \frac{3\sqrt{61}}{8}.$$

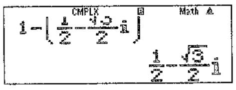
Câu 17: Đáp án A.

Do xét trên tập số phức nên phương trình $x^2 - 4x + 5 = 0$ luôn có nghiệm. Vậy A sai, ta chọn A.

Câu 18: Đáp án A.

Ta sẽ chọn $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z| = 1$

Lúc này ta nhập vào máy tính và tìm được $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

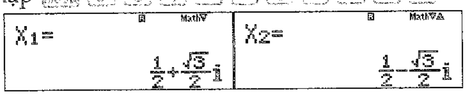


Ta chọn A.

Câu 19: Đáp án C.

Ta sử dụng MODE 5 3 rồi gán nghiệm sau đó tìm $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$.

Ta nhập



Ta nhẩm nhanh được $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$.

Do vậy $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=1+1=2.$

Câu 20: Đáp án A.

Ta có $2016=4.504$. Do vậy $i^{2016}=1$.

Phương trình trở thành $z-2+i=(2+i)(1-i)^2$

$\Leftrightarrow z=(2+i)(1-i)^2+2-i.$

Ta tìm z bằng máy tính bằng cách nhập

[MODE] [2] [(] [2] [+] [ENG] [)] [(] [1] [−] [ENG] [)] [x²] [+] [2] [−] [ENG] [=]

```
(2+i)(1-i)²+2-i
             4-5i
```

Vậy $a+2b=4-2.5=-6.$

Câu 21: Đáp án B.

Ta sử dụng [MODE] [5] [3] để tìm nghiệm của phương trình.

[MODE] [5] [3] [1] [=] [−] [6] [=] [−] [1] [6] [=] [=] [▽]

```
X1=          8  |  X2=         -2
```

Ta có $\left[\begin{array}{l} z^2=8\Leftrightarrow z=\pm 2\sqrt{2} \\ z^2=-2\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2.2\sqrt{2}+2.\left|\sqrt{2}i\right|=6\sqrt{2}.$

Câu 22: Đáp án A.

$(2x+3y+1)+(-x+2y)i=(3x-2y+2)+(4x-y-3)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+1=3x-2y+2 \\ -x+2y=4x-y-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y+1=0 \\ 5x-3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=\frac{4}{11} \end{cases}$

Ngoài ra ta có thể sử dụng CALC thử các phương án.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có $|z-1+2i|=|(z-2i)+(-1+4i)|$

Đặt $A=|z-2i|$.

$-3+|-1+4i|\le A\le 3+|-1+4i|$

$\Leftrightarrow -3+\sqrt{17}\le A\le 3+\sqrt{17}.$

Như vậy môđun lớn nhất của số phức $z-2i$ là

$A=3+\sqrt{17}=\sqrt{26+6\sqrt{17}}.$

Câu 24: Đáp án B.

Ta có $|z+1-i|=|z+3i|\Leftrightarrow |z+1-i|^2-|z+3i|^2=0$

[MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [1] [−] [ENG] [▷] [x²] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [3] [ENG] [▷] [x²] [CALC] [0] [=] [CALC] [ENG] [=] [CALC] [1] [=]

Ta có $\begin{cases} f(0)=-7 \\ f(i)=-15 \\ f(1)=-5 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} c=-7 \\ b=-8 \\ a=2 \end{cases}\Rightarrow 2x-8y=7$ là mối quan hệ giữa $x;y$ trong đó $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$|2x-8y|\le\sqrt{2^2+(-8)^2}.\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\frac{7}{\sqrt{2^2+(-8)^2}}$

$\Leftrightarrow |z|\ge\frac{7}{\sqrt{68}}$. Vậy $|z|_{\min}=\frac{7}{\sqrt{68}}$.

Câu 25: Đáp án A.

$\frac{|z|^2}{z}+2iz+\frac{2(z+i)}{1-i}=0$

Nhập vế trái vào màn hình và CALC cho $z=10000+100i=x+yi$; ở đây $x=10000;y=100$.

[▤] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▷] [x²] [▽] [ALPHA] [)] [▷] [+] [2] [ENG] [ALPHA] [)] [+] [▤] [2] [×] [(] [ALPHA] [)] [+] [ENG] [)] [▽] [1] [−] [ENG] [CALC] [1] [0] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]

```
|X|²/X+2iX+2×(X+i)/(1-i)▷
            19699+30001i
```

Ta có hệ $\begin{cases} 19699=2.10000-3.100-1=2x-3y-1 \\ 30001=3.10000+1=3x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{5}{9} \end{cases}\Rightarrow z=-\frac{1}{3}-\frac{5}{9}i\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{5}.$

Câu 26: Đáp án C.

Tương tự như câu 25, ta thực hiện chuyển vế và nhập vế trái vào màn hình CALC cho $z=10000+100i$ ta được kết quả $29698+10100i$.

```
(2X-1)×(1+i)+(C▷
      29698+10100i
```

Ta có $\begin{cases} 3.10000-3.100-2=3x-3y-2 \\ 10100=10000+100=x+y \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} 3x-3y=2 \\ x+y=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}\Rightarrow z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i.$

Vậy phần ảo của số phức z là $-\frac{1}{3}$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có

$(i+3)z+\frac{2+i}{i}=(2-i)\bar{z}\Leftrightarrow(i+3)z-(2-i)\bar{z}+1-2i=0$

Nhập biểu thức VT vào máy và sử dụng CALC thay $z=10000+100i$, tức là ta thay $z=x+yi$ với $x=10000;y=100$.

Cách nhập [MODE] [2]

[(] [ENG] [+] [3] [)] [ALPHA] [)] [−] [(] [2] [−] [ENG] [)] [×] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [−] [2] [ENG] [CALC] [1] [0] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]

```
(i+3)X-(2-i)×Co▷
     10001+20498i
```

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 10001 = 10000 + 1 = x + 1 \\ 20498 = 2.10000 + 5.100 - 2 = 2x + 5y - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = -1 + \frac{4}{5}i - i = -1 - \frac{1}{5}i \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{26}}{5}.$$

Câu 28: Đáp án A.

Ta sẽ tìm mối liên hệ giữa $x; y$ với $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có $pt \Leftrightarrow \left|z + \frac{5}{2} - 2i\right|^2 - \left|z + \frac{3}{2} + 2i\right|^2 = 0$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(i) = -4 \\ f(1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -8 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow x - 4y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4y - 2.$

[MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [5] [⊟] [2] [▶] [−] [2] [ENG] [▶] [x²] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [+] [3] [⊟] [2] [▶] [+] [2] [ENG] [▶] [x²] [CALC] [0] [=] [CALC] [ENG] [=] [−] [4] [CALC] [1] [=]

Ta có

$Q = |z - 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$

$= |4y - 2 + yi - 2 - 4i| + |4y - 2 + yi - 4 - 6i|$

$= \sqrt{(4y-4)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(4y-6)^2 + (y-6)^2}$

Đặt $\vec{u}(4y - 4; y - 4); \vec{v}(-4y + 6; -y + 6)$.

Suy ra $Q = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Áp dụng bất đẳng thức vectơ ta có

$|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow Q \ge \sqrt{(4y - 4 - 4y + 6)^2 + (y - 4 - y + 6)^2}$

$\Leftrightarrow Q \ge \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}; \vec{v}$ cùng phương

$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = -2$

$\Rightarrow z = -2 \Rightarrow P = -2.$

Câu 29: Đáp án D.

$f(z) = |z|^2 - |\bar{z} - 3 + 4i|^2$

Sử dụng máy tính tìm $f(0); f(i); f(1)$.

Cách ấn:

[MODE] [2] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [x²] [−] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [+] [4] [ENG] [▶] [x²] [CALC] [0] [=] [CALC] [ENG] [=] [CALC] [1] [=]

```
CMPLX            Math▽
|X|²-|Conjg(X)-▷
                   -25
```

```
CMPLX            Math▽△
|X|²-|Conjg(X)-▷
                   -17
```

```
CMPLX            Math △
|X|²-|Conjg(X)-▷
                   -19
```

$$\Rightarrow \begin{cases} c = -25 \\ b + c = -17 \\ a + c = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -25 \\ b = 8 \\ a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ đường thẳng}$$

$6x + 8y - 25 = 0$ là tập hợp biểu diễn số phức z.

$6x + 8y - 25 = 0 \Leftrightarrow 6x + 8y = 25.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$\sqrt{6^2 + 8^2}.\sqrt{x^2 + y^2} \ge |6x + 8y| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \ge \frac{5}{2}.$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \\ 6x + 8y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{2} + 2i.$$

Câu 30: Đáp án C.

$(3 - 2i)\bar{z} - 4(1 - i) = (2 + i)z$

$\Leftrightarrow (3 - 2i)\bar{z} - 4(1 - i) - (2 + i)z = 0$

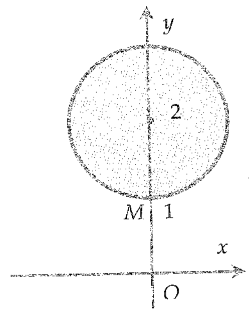
Nhập vế trái và CALC $z = 10000 + 100i$ ta được

```
CMPLX            Math △
(3-2i)×Conjg(X)▷
          9896-30496i
```

Ta có $\begin{cases} 9896 = 10000 - 100 - 4 = x - y - 4 \\ 30496 = 3.10000 + 5.100 - 4 = 3x + 5y - 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow |z| = \sqrt{10}.$$

Câu 31: Đáp án A.



Ta có $\left|\frac{(1+i)}{1-i}z + 2\right| = 1 \Leftrightarrow |iz + 2| = 1$

$\Leftrightarrow |(-y + 2) + ix| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 1$

Do vậy tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;2)$, bán kính $R = 1$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_0. Mặt khác z_0 là số phức có môđun nhỏ nhất, do vậy $\overline{OM}$ phải nhỏ nhất. Nhìn vào hình vẽ ta thấy $\overline{OM}_{\min} = 1 \Leftrightarrow M(0;1)$.

Vậy $|z_0| = 1 \Leftrightarrow z_0 = 1$.

Câu 32: Đáp án A.

Trong bài toán này ta nhẩm thông thường nhanh hơn là dùng máy tính.

Ta có $2z + \bar{z} + 4i = 9 \Leftrightarrow 2(x + yi) + x - yi + 4i = 9$

$\Leftrightarrow 3x-9+(y+4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow z=3-4i.$

Tìm môđun của z^2 ta bấm

MODE 2 SHIFT hyp (3 − 4 ENG) x^2 =

|(3-4i)²|
25

Câu 33: Đáp án D.

$$z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow z=\frac{4-4i+(1+i)|z|}{1+3i}$$

$$\Leftrightarrow |z|=\left|\frac{4-4i+(1+i)|z|}{1+3i}\right|$$

Ta sẽ CALC từng phương án để thử.

Ta nhập vào màn hình $|X|-\left|\frac{4-4i+(1+i)|X|}{1+3i}\right|$ rồi thực hiện CALC.

MODE 2 SHIFT hyp ALPHA) ▶ − SHIFT hyp ▭/▭ 4 − 4 ENG + (1 + ENG) × SHIFT hyp ALPHA) ▼ 1 + 3 ENG CALC 4 = CALC 1 = CALC 1 ▭/▭ 2 = CALC 2 =

$\lvert X\rvert-\lvert\frac{4-4i+(1+i)...}{1+3i}$ ▷ $\frac{20-4\sqrt{10}}{5}$	$\lvert X\rvert-\lvert\frac{4-4i+(1+i)...}{1+3i}$ ▷ $\frac{5-\sqrt{85}}{5}$
$\lvert X\rvert-\lvert\frac{4-4i+(1+i)...}{1+3i}$ ▷ $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	$\lvert X\rvert-\lvert\frac{4-4i+(1+i)...}{1+3i}$ ▷ 0

Ta thấy chỉ có trường hợp $|z|=2$ thỏa mãn, do vậy ta chọn D.

Câu 34: Đáp án B.

Ta nhập $(1+2i)^2 X+Conjg(X)-4i+20$ CALC với $X=10000+100i$ ta được kết quả

(1+2i)²X+Conjg(▷
-20380+39596i

$$\text{Ta có } \begin{cases} 20380=2.10000+4.100-20=2x+4y-20 \\ 39596=4.10000-4.100-4=4x-4y-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=20 \\ 4x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow |z|=5.$$

Câu 35: Đáp án C.

$$(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$$

$$\Leftrightarrow z=\left[7+8i-\frac{2(1+2i)}{1+i}\right]:(2+i)$$

$$\Rightarrow w=\left[7+8i-\frac{2(1+2i)}{1+i}\right]:(2+i)+i+1$$

Nhập vào máy tính tìm môđun của w ta được

|(7+8i−2(1+2i)/(1+i))▷
5

Câu 36: Đáp án C.

Ta nhập $X-(2+3i).\text{Conjg}(X)-1+9i$ CALC với $X=10000+100i$ ta được

X-(2+3i)Conjg(X▷
-10301-29691i

$$\begin{cases} 10301=10000+3.100+1=x+3y+1 \\ 29691=3.10000-300-9=3x-3y-9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y+1=0 \\ 3x-3y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow z=2-i$$

$\Rightarrow w=3+i \Rightarrow |w|=\sqrt{10}.$

Câu 37: Đáp án D.

Ta sẽ sử dụng CALC để thử xem trường hợp nào thỏa mãn, từ đó so sánh môđun của các số phức thỏa mãn.

Ta nhập vào màn hình $|X+3i|-|X+2-i|$ và CALC

MODE 2 SHIFT hyp ALPHA) + 3 ENG ▶ − SHIFT hyp ALPHA) + 2 − ENG CALC 1 − 2 ENG = CALC (−) 1 + 2 ENG = CALC (−) 1 ▭/▭ 5 + 2 ▭/▭ 5 ENG = CALC 1 ▭/▭ 5 − 2 ▭/▭ 5 ENG =

|X+3i|-|X+2-i| $-2\sqrt{2}$	|X+3i|-|X+2-i| $\sqrt{26}-\sqrt{2}$
|X+3i|-|X+2-i| $\frac{\sqrt{290}-3\sqrt{10}}{5}$	|X+3i|-|X+2-i| 0

Ta thấy chỉ có $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ thỏa mãn nên ta chọn D.

Câu 38: Đáp án A.

Ta nhập $\sqrt{|-117+44i|}\angle\frac{\arg(-117+44i)}{2}$ =

MODE 2 √▭ SHIFT hyp (−) 1 1 7 + 4 4 ENG ▶ ▶ SHIFT (−) ▭/▭ SHIFT 2 1 (−) 1 1 7 + 4 4 ENG) ▼ 2 =

Ta thu được

√|-117+44i|∠arg▷
2+11i

Vậy ta chọn A.

Câu 39: Đáp án C.

Tương tự câu 37 ta sẽ CALC từng phương án và thu được kết quả sau

MODE 2 SHIFT hyp ALPHA (−) − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp ALPHA) − 2 ENG CALC 2 + ENG = CALC 3 + ENG = CALC 2 + 2 ENG = CALC 1 + 3 ENG =

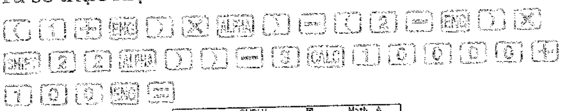
|X-2-4i|-|X-2i| $3-\sqrt{5}$	|X-2-4i|-|X-2i| 0
|X-2-4i|-|X-2i| 0	|X-2-4i|-|X-2i| 0

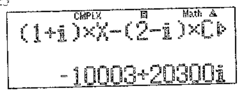
Ta thấy chỉ có trường hợp A không thỏa mãn, do vậy ta so sánh môđun của ba số phức còn lại.

Môđun của B và D bằng nhau, do vậy ta chọn C.

Câu 40: Đáp án B.

Ta sẽ thực hiện CALC cho $z = 10000 + 100i$.





Ta có $\begin{cases} 10003 = 10000 + 3 = x + 3 \\ 20300 = 2.10000 + 3.100 = 2x + 3y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow w = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i.$

$\Rightarrow |w| = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$

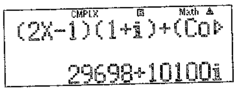
Câu 41: Đáp án B.

Ta có $x + yi + 2(x - yi) = 2 - 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{2}{3} + 4i \Rightarrow |z| = \frac{2\sqrt{37}}{3}.$

Câu 42: Đáp án B.

Tương tự câu 40 ta CALC cho $z = 10000 + 100i$ ta được

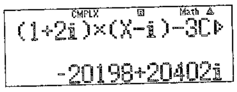


$\begin{cases} 29698 = 3.10000 - 3.100 - 2 = 3x - 3y - 2 \\ 10100 = 10000 + 100 = x + y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Câu 43: Đáp án B.

CALC cho $z = 10000 + 100i$ ta được



$\begin{cases} 20198 = 2.10000 + 2.100 - 2 = 2x + 2y - 2 \\ 20402 = 2.10000 + 4.100 + 2 = 2x + 4y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 2i.$

$\Rightarrow w = -\frac{15}{169} + \frac{133}{169}i \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{106}}{13} = \frac{2\sqrt{106}}{26}$

$\Rightarrow m = 2.$

Câu 44: Đáp án A.

Ta có $|z + i - 1| = |\bar{z} - 2i| \Leftrightarrow |z + i - 1|^2 - |\bar{z} - 2i|^2 = 0$

Ta có $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(i) = -4 \\ f(1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = -2 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y + 1 = 0$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$|x + y| \le \sqrt{(x^2 + y^2)(1^2 + 1^2)} \Leftrightarrow |z| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 45: Đáp án D.

$|z - 1| = |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow |z - 1|^2 - |z - 2 + 3i|^2 = 0$

$\begin{cases} f(0) = -12 \\ f(i) = -18 \\ f(1) = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -12 \\ b = -6 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0.$

Câu 46: Đáp án B.

$\left|\frac{z + 2 - 3i}{\bar{z} - 4 + i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i|$

$\Leftrightarrow |z + 2 - 3i|^2 - |\bar{z} - 4 + i|^2 = 0$

$\begin{cases} f(0) = -4 \\ f(i) = -8 \\ f(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4 \\ b = -4 \\ a = 12 \end{cases} \Rightarrow 12x - 4y - 4 = 0$

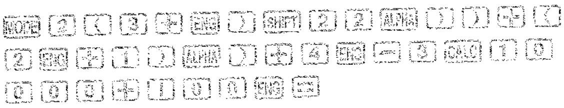
$\Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0.$

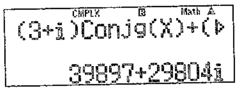
Câu 47: Đáp án C.

$(3 + i)\bar{z} + (2i + 1)z + 4i = 3$

$\Leftrightarrow (3 + i)\bar{z} + (2i + 1)z + 4i - 3 = 0$

Nhập VT vào màn hình và CALC cho $z = 10000 + 100i$.





$\begin{cases} 39897 = 4.10000 - 100 - 3 = 4x - y - 3 \\ 29804 = 3.10000 - 2.100 + 4 = 3x - 2y + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow$ phần thực của $\bar{z}$ là 2.

Câu 48: Đáp án B.

$|z - i| = |\bar{z} - 3i + 2| \Leftrightarrow |z - i|^2 - |\bar{z} - 3i + 2|^2 = 0.$

$\begin{cases} f(0) = -12 \\ f(i) = -20 \\ f(1) = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -12 \\ b = -8 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow -4x - 8y - 12 = 0.$

$\Leftrightarrow x + 2y + 3 = 0.$

Câu 49: Đáp án A.

Ta có

$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) \le \frac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b - 2 \le 0 \\ \frac{a}{16} + \frac{b}{4} - 2 \le \frac{-5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le b + 2 \\ \frac{a}{16} + \frac{b}{4} - 2 \le \frac{-5}{4} \end{cases}$

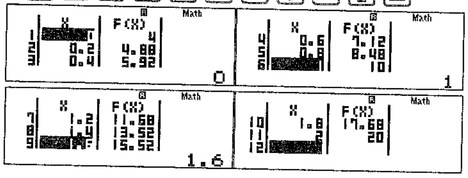
Ta thử $\frac{b+2}{16}+\frac{b}{4}-2\le\frac{-5}{4}\Rightarrow b\le 2$

$|z|^2\le|b+2|^2+|b|$.

Ta sử dụng TABLE để tìm Max với

$f(x)=|x+2|^2+|x|^2$ trên $[0;2]$.

MODE 7 SHIFT hyp ALPHA) + 2 ▶ x^2 + SHIFT hyp ALPHA) ▶ x^2 = = 0 = 2 = 0 . 2 =



Vậy $\max|z|^2=20\Rightarrow\max|z|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow b=2;a=4.$

Câu 50: Đáp án B.

Ta đặt $\frac{z}{2+z^2}=a\Leftrightarrow az^2-z+2a=0.$

Với $a=0\Rightarrow z=0\Rightarrow|z|=0.$

Với $a=1\Rightarrow z^2-z+2=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i\Rightarrow|z|=\sqrt{2}.$

...

Ta thấy với các trường hợp $a\ne 0$ thì $|z|=const=\sqrt{2}.$

Đặt $u=z+1-i\Rightarrow|u-1+i|=\sqrt{2}$

Bài toán trở thành tìm $|u|_{\max}$ biết $|u-1+i|=\sqrt{2}$

Áp dụng công thức số 10 trong phần lý thuyết cực trị ta có $|u|_{\max}=|1-i|+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

Câu 51: Đáp án C.

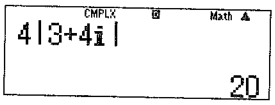
Từ $|z|=4\Leftrightarrow|z-0|=4=|z-z_1|\to z_1=0;R=4$.

Từ $w=(3+4i)z+i=z_2.z+z_3\to z_2=3+4i;z_3=i$

$\to z_2.z_1+z_3=(3+4i).0+i=i$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(0;1)$, bán kính $r=R.|z_2|=4.|3+4i|=20$

.



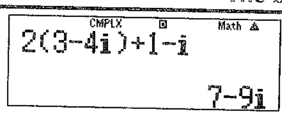
Câu 52: Đáp án C.

Từ $|z-3+4i|\le 2\Leftrightarrow|z-(3-4i)|\le 2\to z_1=3-4i;R=2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$.

Từ $w=2z+1-i=z_2.z+z_3\to z_2=2;z_3=1-i$

$\to z_2.z_1+z_3=2(3-4i)+1-i=7-9i$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I_1(7;-9)$, bán kính $r=R.|z_2|=2.|2|=4$.



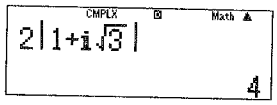
Diện tích hình tròn đó là $S=\pi R^2=\pi.4^2=16\pi$ (đvdt).

Câu 53: Đáp án A.

Từ $|z-1|=2=|z-z_1|\to z_1=1;R=2$.

Từ $w=(1+i\sqrt{3})z+2=z_2.z+z_3\to z_2=1+i\sqrt{3};z_3=2$.

$\to z_2.z_1+z_3=(1+i\sqrt{3}).1+2=3+i\sqrt{3}$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;\sqrt{3})$, bán kính $r=R.|z_2|=2.|1+i\sqrt{3}|=4$.

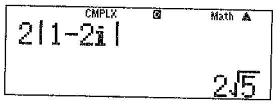


Câu 54: Đáp án A.

Ta có $|z|=2=|\bar{z}|\Leftrightarrow|\bar{z}-0|=2\to z_1=0;R=2$.

Từ $w=(1-2i).\bar{z}+3i=z_2.\bar{z}+z_3\to z_2=1-2i;z_3=3i$

$\to z_2.z_1+z_3=(1-2i).0+3i=3i$. Vật tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;3)$, bán kính $r=R.|1-2i|=2.|1-2i|=2\sqrt{5}$.



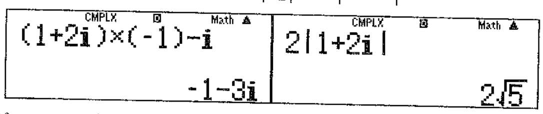
Phương trình đường tròn đó là $x^2+(y-3)^2=20$.

Câu 55: Đáp án C.

Từ $|z+1|=2=|z-z_1|\to z_1=-1;R=2$.

Từ $w=(1+2i)z-i=z_2.z+z_3\to z_2=1+2i;z_3=-i$

Ta có $z_2.z_1+z_3=(1+2i)(-1)+(-i)=-1-3i$. Vạy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;-3)$, bán kính $r=R.|z_2|=2.|1+2i|=2\sqrt{5}$.



Câu 56: Đáp án D.

Đặt $w=(1+i)z+1-7i\to z=\frac{w-(1-7i)}{1+i}$

$\to z=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)w+3+4i$.

Bài toán trở thành: Cho số phức w thỏa mãn $|w|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ với $z=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)w+3+4i$.

Từ giả thiết ta có $|w|=\sqrt{2}=|w-w_1|\to w_1=0;R=\sqrt{2}$.

Từ $z=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)w+3+4i=w_2.w+w_3\rightarrow w_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$;

$w_3=3+4i$

Ta có $w_2.w_1+w_3=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right).0+3+4i=3+4i$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $r=R.|w_2|=\sqrt{2}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=1$.

$\sqrt{2}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|$ → 1

Vậy $\max|z|=OI+r=\sqrt{3^2+4^2}+1=6$.

Câu 57: Đáp án A.

Từ $|z-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|z-(2+4i)|=\sqrt{5}=|z-z_1|$

$\rightarrow z_1=2+4i; R=\sqrt{5}$.

Đặt $w=z+1=1.z+1=z_2.z+z_3\rightarrow z_2=z_3=1$.

> **Bài toán trở thành:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|w|$, biết $w=z+1$.

Ta có $z_2.z_1+z_3=1.(2+4i)+1=3+4i$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(3;4)$ và bán kính $r=R.|z_2|=\sqrt{5}$.

$$M=|w|\rightarrow\begin{cases}\max M=\max|w|=OI+r=5+\sqrt{5}\\ \min M=\min|w|=|OI-r|=5-\sqrt{5}\end{cases}$$

Câu 58: Đáp án A.

Từ $|z-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|z-(1-2i)|=\sqrt{5}=|z-z_1|$

$\rightarrow z_1=1-2i; R=\sqrt{5}$.

Đặt $w=z-1-i=z_2.z+z_3\rightarrow z_2=1; z_3=-1-i$.

> **Bài toán trở thành:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$, biết $w=z-1-i$.

Ta có $z_2.z_1+z_3=1.(1-2i)+(-1-i)=-3i$.

$1\times(1-2i)-1-i$ → $-3i$

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;-3)$, bán kính $r=R.|z_2|=\sqrt{5}$.

Vậy $M_{\min}=|w|_{\min}=|OI-r|=|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$.

Câu 59: Đáp án B.

Từ $|(1+i)z+1-2i|=1\Leftrightarrow\left|\frac{(1+i)z+1-2i}{1+i}\right|=\frac{1}{|1+i|}$

$\Leftrightarrow\left|z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Đặt $w=(2+i)z+1-i$.

> **Bài toán trở thành:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$, biết $w=(2+i)z+1-i$.

Từ $\left|z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=|z-z_1|\rightarrow z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i; R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Từ $w=(2+i)z+1-i=z_2.z+z_3\rightarrow z_2=2+i; z_3=1-i$.

Ta có $z_2.z_1+z_3=(2+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+1-i=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$.

$(2+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+1-i$ → $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\times|2+i|$ → $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, bán kính

$r=R.|z_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}.|2+i|\rightarrow r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Vậy $M_{\min}=|w|_{\min}=|OI-r|=\left|\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right|$

$\rightarrow M_{\min}=\frac{\sqrt{26}-\sqrt{10}}{2}$.

Câu 60: Đáp án C.

> **Bài toán trở thành:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=\sqrt{10}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|w|$, biết $w=z+1-4i$.

Từ $|z-1+2i|=\sqrt{10}=|z-z_1|\rightarrow z_1=1-2i; R=\sqrt{10}$.

Từ $w=z+1-4i=z_2.z+z_3\rightarrow z_2=1; z_3=1-4i$.

Ta có $z_2.z_1+z_3=1.(1-2i)+1-4i=2-6i$.

$1-2i+1-4i$ → $2-6i$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(2;-6)$, bán kính

$r=R.|z_2|=\sqrt{10}$.

Vậy $|w|_{\max}=r+OI=\sqrt{10}+\sqrt{2^2+(-6)^2}=3\sqrt{10}$.

CHỦ ĐỀ 8: PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Các chế độ làm việc trên máy tính

1. Lệnh CALC dùng để kiểm tra xem x_0 có là nghiệm của phương trình, hệ phương trình hay bất phương trình hay không.	
2. Lệnh SOLVE: SHIFT CALC để tìm nghiệm của một phương trình bất kì.	
3. Phương thức EQN: MODE 5 để giải các hệ phương trình và phương trình cơ bản.	1: anX+bnY=cn 2: anX+bnY+cnZ=dn 3: aX2+bX+c=0 4: aX3+bX2+cX+d=0
4. Phương thức INEQ: MODE ▽ 1 để giải các bất phương trình cơ bản (bất phương trình bậc hai, bậc ba).	1: aX2+bX+c 2: aX3+bX2+cX+d

2. Các dạng toán liên quan

Dạng 1: Kiểm tra xem một số có phải là nghiệm của phương trình hay không

Bài toán: Kiểm tra xem x_0 có là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ hay không.

Quy trình bấm máy:

– **Bước 1:** Nhập vào màn hình $f(X)$.

– **Bước 2:** Ấn CALC, máy hỏi X? Nhập x_0 $(X=x_0)$.

– **Bước 3:** Ấn =, quan sát kết quả. Nếu kết quả bằng 0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$. Ngược lại, nếu kết quả khác 0 thì x_0 không là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2+6x+3}=2x+1$

A. $\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\}$ B. $\{1-\sqrt{3}\}$ C. $\{1+\sqrt{3}\}$ D. $\varnothing$

Lời giải

Nhập vào màn hình $\sqrt{3X^2+6X+3}-2X-1$:

√■ 3 ALPHA) x² + 6 ALPHA) + 3 ▶ − 2 ALPHA) − 1

Ấn CALC, máy hỏi X? Ấn 1 − √■ 3) $(X=1-\sqrt{3})$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,9282032303\neq 0$. Loại A và B.

$\sqrt{3X^2+6X+3}-2X-1$
0.9282032303

Ấn CALC tiếp, máy hỏi X? Ấn 1 + √■ 3) $(X=1+\sqrt{3})$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

$\sqrt{3X^2+6X+3}-2X-1$
0

Đáp án C.

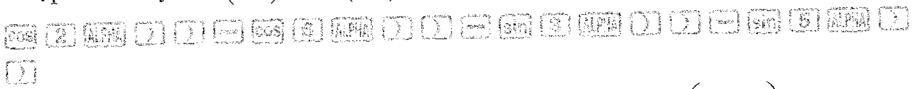
Ví dụ 2: Phương trình $\cos 2x-\cos 6x=\sin 3x+\sin 5x$ có nghiệm là:

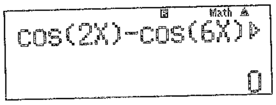
A. $x=\frac{\pi}{6}$ B. $x=\frac{\pi}{3}$ C. $x=-\frac{\pi}{3}$ D. $x=-\frac{\pi}{6}$

Lời giải

Đưa máy tính về chế độ radian: SHIFT MODE 4 (Rad).

Nhập vào máy $\cos(2X)-\cos(6X)-\sin(3X)-\sin(5X)$:





– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [SHIFT] [×10ˣ] (π) [÷] [6] $\left(X=\frac{\pi}{6}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

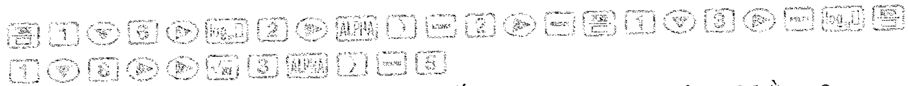
Đáp án A.

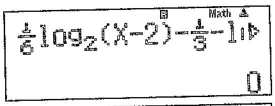
> Ví dụ 3: Giải phương trình $\frac{1}{6}\log_2(x-2)-\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$ ta được tập nghiệm là:
>
> A. $\{2\}$ B. $\{2;4\}$ C. $\{3;4\}$ D. $\{3\}$

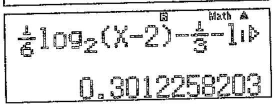
Lời giải

Điều kiện: $x>2$. Như vậy loại ngay A và B.

Nhập vào màn hình $\frac{1}{6}\log_2(X-2)-\frac{1}{3}-\log_{\frac{1}{8}}\left(\sqrt{3X-5}\right)$:







Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $0{,}3012258203\neq 0$. Loại C.

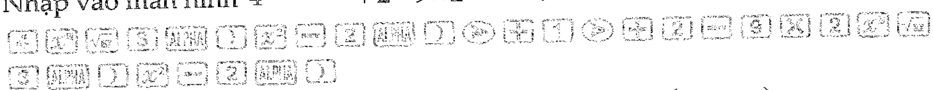
Đáp án D.

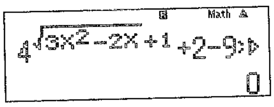
> Ví dụ 4: Phương trình $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}}+2=9.2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ có nghiệm là
>
> A. $x=-\frac{1}{3},x=1$ B. $x=-1,x=\frac{1}{3}$ C. $x=-\frac{2}{3},x=2$ D. $x=-2,x=\frac{2}{3}$

Lời giải

Điều kiện: $3x^2-2x\geq 0\Leftrightarrow x(3x-2)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\frac{2}{3}\\x\leq 0\end{array}\right.$. Loại B.

Nhập vào màn hình $4^{\sqrt{3X^2-2X+1}}+2-9\times 2^{\sqrt{3X^2-2X}}$:





– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [(-)] [1] [÷] [3] $\left(X=-\frac{1}{3}\right)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

Đáp án A.

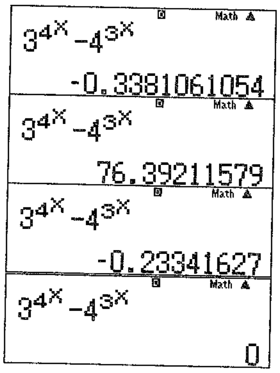
> Ví dụ 5: Tập nghiệm của phương trình $3^{4^x}=4^{3^x}$ là
>
> A. $\left\{\log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4)\right\}$ B. $\left\{\log_{\frac{2}{3}}(\log_3 2)\right\}$
>
> C. $\left\{\log_{\frac{3}{2}}(\log_3 2)\right\}$ D. $\left\{\log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)\right\}$

Lời giải

Để dễ dang kiểm tra nghiệm, ta gán $\log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4) \to A$, $\log_{\frac{2}{3}}(\log_3 2) \to B$, $\log_{\frac{3}{2}}(\log_3 2) \to C$ và $\log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4) \to D$.

Nhập vào màn hình $3^{4^X} - 4^{3^X}$:

[3] [$x^■$] [4] [$x^■$] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [−] [4] [$x^■$] [3] [$x^■$] [ALPHA] [)]



– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [ALPHA] [(−)] $(X = A)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,3381061054 \neq 0$. Loại A.

– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [ALPHA] [°'''] $(X = B)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $76,39211579 \neq 0$. Loại B.

– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [ALPHA] [hyp] $(X = C)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,23341627 \neq 0$. Loại C.

– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [ALPHA] [sin] $(X = D)$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

Đáp án D.

Dạng 2: Kiểm tra nghiệm, tập nghiệm của hệ phương trình

> **CHÚ Ý**
>
> Cách làm bên cũng đúng trong trường hợp hệ gồm 3, hay 4 phương trình. Sử dụng kí tự đa câu lệnh (:) để ngăn cách các biểu thức (vế trái) và sau đó dùng CALC để kiểm tra nghiệm.

Bài toán: Kiểm tra xem cặp số $x_0; y_0$ có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f\ x;y\ = 0 \\ g\ x;y\ = 0 \end{cases}$ hay không.

Quy trình bấm máy:

– **Bước 1:** Nhập vào màn hình hai biểu thức f X và g X ngăn cách nhau bởi kí tự đa câu lệnh (:): [ALPHA] [∫□] **(đã được đề cập đến tại chủ đề 3).** Có nghĩa là nhập vào màn hình f X : g X .

– **Bước 2:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập x_0 $X = x_0$. Ấn [=] máy hỏi Y? Nhập y_0 $Y = y_0$.

– **Bước 3:** Ấn [=], máy hiện giá trị của f X;Y (khi $X = x_0, Y = y_0$). Ấn [=] tiếp máy hiện giá trị của g X (khi $X = x_0, Y = y_0$). Nếu f X;Y và g X;Y đều bằng 0 thì $x_0; y_0$ là nghiệm của hệ. Nếu một trong hai giá trị f X;Y và g X;Y (hoặc cả hai) khác 0 thì $x_0; y_0$ không là nghiệm.

Ví dụ 1: Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ có nghiệm là:

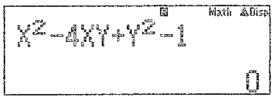
A. $(1;4)$ hoặc $(-1;-4)$ B. $(1;4)$ hoặc $(4;1)$

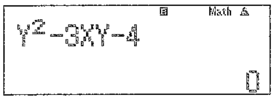
C. $(-1;-4)$ hoặc $(-4;-1)$ D. $(4;-4)$ hoặc $(-4;4)$

Lời giải

Nhập vào màn hình $X^2 - 4XY + Y^2 - 1 : Y^2 - 3XY - 4$:

[ALPHA] [)] [x^2] [−] [4] [ALPHA] [)] [ALPHA] [S⇔D] [+] [ALPHA] [S⇔D] [x^2] [−] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [S⇔D] [x^2] [−] [3] [ALPHA] [)] [ALPHA] [S⇔D] [−] [4]





– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hiện $X^2-4XY+Y^2-1=0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Y^2-3XY-4=0$.

Ấn [CALC] tiếp, máy hỏi X? Ấn [(−)] [1] $(X=-1)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [(−)] [4] $(Y=-4)$. Ấn [=], máy hiện $X^2-4XY+Y^2-1=0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện $Y^2-3XY-4=0$. Vậy $(-1;-4)$ là một nghiệm của hệ.

Chọn ngay đáp án A và không cần kiểm tra tiếp các đáp án B, C, D.

Đáp án A.

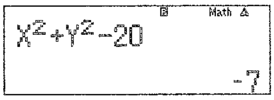
Ví dụ 2: Hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \log_2 x+\log_2 y=3 \end{cases}$ với $x \ge y$ có nghiệm là:

A. $(3;2)$ B. $(4;2)$ C. $\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ D. Kết quả khác

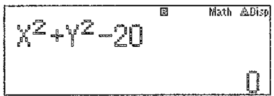
Lời giải

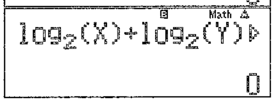
Nhập vào màn hình $X^2+Y^2-20:\log_2(X)+\log_2(Y)-3$

[ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [−] [2] [0] [ALPHA] [∫] [log□□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [+] [log□□] [2] [▶] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [−] [3]



– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $X^2+Y^2-20=-7\ne 0$. Vậy $(3;2)$ không là nghiệm của hệ phương trình.





– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [4] $(X=4)$. Ấn [=], máy hỏi Y? Ấn [2] $(Y=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $X^2+Y^2-20=0$. Ấn [=], máy hiện kết quả $\log_2(X)+\log_2(Y)-3=0$. Vậy $(4;2)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Đáp án B.

STUDY TIPS

Ở ví dụ bên, khi ấn [CALC], máy hỏi Y đầu tiên là do trong biểu thức nhập vào màn hình, biến nhớ Y được nhập trước biến nhớ X. Vậy nên, bạn đọc cần quan sát kĩ để tránh nhầm lẫn không đáng có trong thứ tự nhập X,Y.

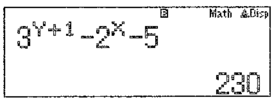
Ví dụ 3: Hệ phương trình $\begin{cases} 3^{y+1}-2^x=5 \\ 4^x-6.3^y+2=0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(3;4)$ B. $(1;3)$ C. $(2;1)$ D. $(4;4)$

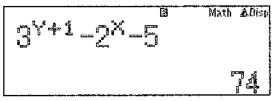
Lời giải

Nhập vào máy $3^{Y+1}-2^X-5:4^X-6\times 3^Y+2$:

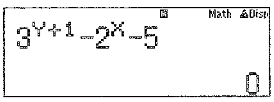
[3] [x■] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [▶] [−] [2] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [5] [ALPHA] [∫] [4] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [6] [×] [3] [x■] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [+] [2]

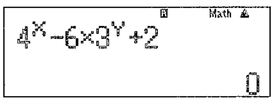


– *Phương án A:* Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [4] $(Y=4)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=], máy hiện $3^{Y+1}-2^X-5=230\ne 0$. Vậy $(3;4)$ không là nghiệm của hệ phương trình.



– *Phương án B:* Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [3] $(Y=3)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=], máy hiện $3^{Y+1}-2^X-5=74\ne 0$. Vậy $(1;3)$ không là nghiệm của hệ phương trình.





– *Phương án C:* Ấn [CALC], máy hỏi Y? Ấn [1] $(Y=1)$. Ấn [=], máy hỏi X? Ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=], máy hiện kết quả $3^{Y+1}-2^X-5=0$. Ấn [=] tiếp, máy hiện kết quả $4^X-6\times 3^Y+2=0$. Vậy $(2;1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Đáp án C.

Dạng 3: Kiểm tra tập nghiệm của bất phương trình

ĐIỂM TỚI HẠN

Điểm tới hạn của hàm số $f(x)$ là điểm làm $f(x)=0$ hoặc $f(x)$ không xác định. Khi [CALC] cho $f(X)$ tại $X=x_0$ mà máy hiện kết quả bằng 0, hoặc máy hiện Math ERROR thì x_0 chính là điểm tới hạn của $f(x)$.

Quy trình bấm máy:

– **Bước 1:** Biến đổi bất phương trình về một trong các dạng sau: $f\;x\ \geq 0$, $f\;x\ \leq 0, f\;x\ >0, f\;x\ <0$.

– **Bước 2:** Nhập vào máy biểu thức f X .

– **Bước 3:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Nhập x_i $X=x_i$, trong đó x_i $i=\overline{1,n}$ thường là các giá trị tại đầu mút của các tập nghiệm đã cho trước trong 4 đáp án A, B, C, D.

⟶ Kiểm tra xem x_i có phải là điểm tới hạn của $f\;x$ hay không?

Nếu tất cả x_i đều là điểm tới hạn thì dấu của $f\;x$ trong mỗi khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2),...,(x_{n-1};x_n),(x_n;+\infty)$ (với $x_1<x_2<...<x_n$) là không thay đổi.

– **Bước 4:** Ấn [CALC], máy hỏi X? Chọn $X\in(-\infty;x_1)$ là một giá trị đại diện để xét dấu của $f(x)$. Ấn [=] quan sát kết quả xem là dương hay âm, ta xác định được dấu của $f(x)$ trên khoảng $(-\infty;x_1)$. Từ đó ta có thể suy ra được dấu của $f\;x$ trên mỗi khoảng còn lại nhờ vào quy tắc đan xen dấu.

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2-|x-2|}{x^2-1}\geq 0$ là:

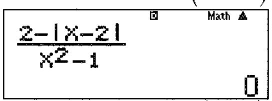
A. $S=(-1;0)\cup(1;4)$ B. $S=[-1;0]\cup(1;4]$

C. $S=(-1;0]\cup(1;4]$ D. $S=(-1;2]\cup(1;4]$

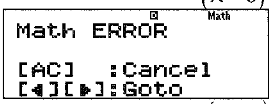
Lời giải



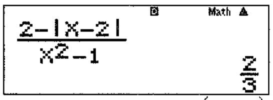
$(X=-1)$



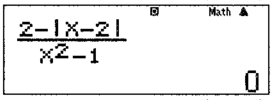
$(X=0)$



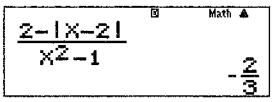
$(X=1)$



$(X=2)$



$(X=4)$



Nhận xét: Điều kiện $x\neq\pm1$ nên loại ngay đáp án B vì trong tập nghiệm có chứa $x=-1$.

Đáp án xuất hiện các giá trị –1, 0, 1, 2, 4 nên ta sẽ CALC biểu thức $\dfrac{2-|x-2|}{x^2-1}$ với các giá trị này để tìm giá trị tới hạn.

Nhập vào màn hình $\dfrac{2-|X-2|}{X^2-1}$:

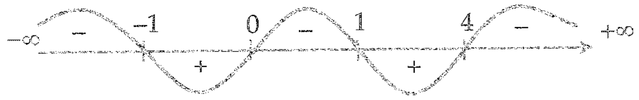
[⊟] [2] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [−] [2] [▼] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Lần lượt CALC với các giá trị $X=-1, X=0, X=1, X=2$, $X=4$ thì màn hình hiện kết quả tương ứng là: Math ERROR, 0, Math ERROR, $\dfrac{2}{3}$ và 0.

Vậy có bốn giá trị –1, 0, 1, 4 là giá trị tới hạn của $\dfrac{2-|x-2|}{x^2-1}$. Khi đó, dấu của $\dfrac{2-|x-2|}{x^2-1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0),(0;1),(1;4),(4;+\infty)$ không đổi.

Xét khoảng $(-\infty;-1)$ chứa điểm $x=-2$. Dùng CALC cho biểu thức $\dfrac{2-|X-2|}{X^2-1}$ với $X=-2$, ta được kết quả $-\dfrac{2}{3}<0$. Suy ra $\dfrac{2-|X-2|}{X^2-1}<0, \forall x\in(-\infty;-1)$.

Từ đó, ta xác định được dấu các khoảng còn lại của biểu thức $\dfrac{2-|X-2|}{X^2-1}$ như sau:



Quan sát, ta thấy trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;4)$ thì $\dfrac{2-|X-2|}{X^2-1}>0$. Do biểu thức này bằng 0 tại $X=0$ và $X=4$ và do bất phương trình có lấy dấu "=" (dấu bất phương trình là "$\geq$") nên: $\dfrac{2-|x-2|}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\leq 0\\ 1<x\leq 4\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm $S=(-1;0]\cup(1;4]$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Bất phương trình $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$ có tập nghiệm là:

A. $S=(1;2)\cup(3;+\infty)$ B. $S=(1;2)\cap(3;+\infty)$

C. $S=(-\infty;1)\cap(2;3)$ D. $S=(-\infty;1)\cup(2;3)$

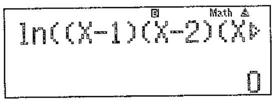
Lời giải

Loại ngay đáp án B và C vì hai tập nghiệm này không tồn tại.

Nhận xét: Đáp án xuất hiện các giá trị 1, 2, 3 nên ta sẽ sử dụng CALC biểu thức $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]$ với $x=1$, $x=2$, $x=3$ để tìm điểm tới hạn.

Nhập vào màn hình $\ln\left((X-1)(X-2)(X-3)+1\right)$

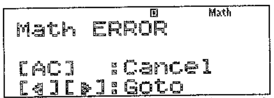
[ln] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [(] [ALPHA] [)] [−] [3] [)] [+] [1] [)].



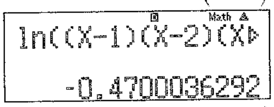
$(X=1;X=2;X=3)$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Lần lượt CALC với các giá trị $X=1, X=2, X=3$ thì màn hình đều hiện kết quả bằng 0.

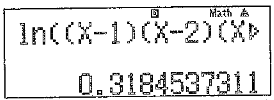
Vậy 1, 2, 3 đều là các giá trị tới hạn của biểu thức $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]$. Khi đó, ba giá trị này chia thành 4 khoảng $(-\infty;1),(1;2),(2;3),(3;+\infty)$ và dấu của biểu thức $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]$ trên mỗi khoảng đó không đổi.



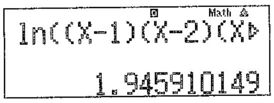
$(X=0)$



$(X=5/2)$



$(X=3/2)$



$(X=4)$

Chọn 4 giá trị đại diện cho mỗi khoảng là: $0\in(-\infty;1)$, $\dfrac{3}{2}\in(1;2)$, $\dfrac{5}{2}\in(2;3)$, $4\in(3;+\infty)$.

Dùng CALC cho biểu thức $\ln\left((X-1)(X-2)(X-3)+1\right)$ lần lượt với $X=0, X=\dfrac{3}{2}, X=\dfrac{5}{2}, X=4$ ta nhận được kết quả tương ứng là Math ERROR, $0,3184537311>0$, $-0,4700036292<0$, $1,945910149>0$.

Như vậy, trên mỗi khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$ thì $\ln\left[(x-1)(x-2)(x-3)+1\right]>0$.

Bất phương trình lấy dấu dương (dấu bất phương trình là "$>$") nên tập nghiệm là $S=(1;2)\cup(3;+\infty)$.

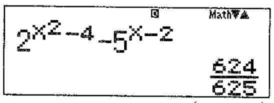
Đáp án A.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-4} \ge 5^{x-2}$ là:

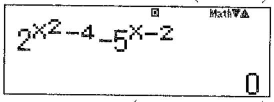
A. $x \in (-\infty;-2) \cup (\log_2 5;+\infty)$		B. $x \in (-\infty;-2] \cup [\log_2 5;+\infty)$

C. $x \in (-\infty;\log_2 5-2) \cup (2;+\infty)$		D. $x \in (-\infty;\log_2 5-2] \cup [2;+\infty)$

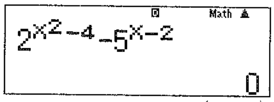
Lời giải



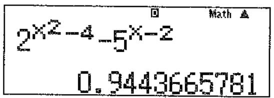
$(X=-2)$



$(X=\log_2 5-2)$



$(X=2)$



$(X=\log_2 5)$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-4}-5^{x-2} \ge 0$.

Nhận xét: Đáp án xuất hiện các giá trị –2, $\log_2 5-2$, 2 và $\log_2 5$ nên ta sẽ CALC biểu thức $2^{x^2-4}-5^{x-2}$ với $x=-2$, $x=\log_2 5-2$, $x=2$ và $x=\log_2 5$ để tìm điểm tới hạn.

Nhập vào màn hình $2^{X^2-4}-5^{X-2}$:

[2] [$x^■$] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [4] [▶] [−] [5] [$x^■$] [ALPHA] [)] [−] [2].

Ấn [CALC], máy hỏi X? Lần lượt CALC với các giá trị $X=-2$, $X=\log_2 5-2$, $X=2$, $X=\log_2 5$ ta nhận được kết quả tương ứng là $\frac{624}{625}$, 0, 0 và 0,9443665781.

Vậy biểu thức $2^{x^2-4}-5^{x-2}$ có hai giá trị tới hạn là $x=\log_2 5-2$ và $x=2$. Như vậy đáp số chỉ có thể là C hoặc D (Loại A và B).

Do bất phương trình có lấy dấu "=" (dấu bất phương trình là "≤") nên cả hai giá trị $x=\log_2 5-2$ và $x=2$ đều thỏa mãn bất phương trình. Loại C.

Đáp án D.

Dạng 4: Tìm số nghiệm của phương trình. Tính giá trị của biểu thức liên quan đến các nghiệm

Bài toán: Tìm số nghiệm của phương trình $f\ x\ =0$

Quy trình bấm máy:

– **Bước 1:** Nhập vào màn hình f X . Dùng SOLVE: [SHIFT] [CALC] ta tìm được một nghiệm của phương trình là $x=\alpha$.

– **Bước 2:** Sau khi tìm được một nghiệm $x=\alpha$. Sửa biểu thức đã nhập thành $f(X) \div (X-\alpha)$. Tiếp tục dùng SOLVE: [SHIFT] [CALC] để tìm nghiệm.

+ Nếu màn hình báo Can't Solve thì có nghĩa là phương trình đã hết nghiệm.

+ Nếu màn hình hiện thêm một nghiệm $x=\beta$ thì ta sửa biểu thức đã nhập thành $f\ X\ \div\ X-\alpha\ \div\ X-\beta$. Quá trình SOLVE: [SHIFT] [CALC] vẫn tiếp tục như vậy cho đến khi màn hình báo Can't Solve thì phương trình đã hết nghiệm.

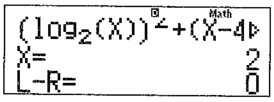
CHÚ Ý

Nếu trong quá trình SOLVE xuất hiện nghiệm lẻ, ta có thể gán nghiệm đó vào các biến nhớ A, B, C, ... rồi sau đó thực hiện nhập vào máy $f(X) \div (X-A) \div (X-B)$

Ví dụ 1: Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-4)\log_2 x-x+3=0$ là

A. 2		B. 1		C. 3		D. 4

Lời giải

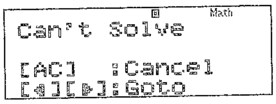


Nhập vào màn hình $(\log_2(X))^2+(X-4)\log_2(X)-X+3$:

[(] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [)] [−] [4] [)] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [)] [+] [3]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] màn hình hiển thị nghiệm $x=2$.

Sửa biểu thức vừa nhập thành $\left(\left(\log_2(X)\right)^2+(X-4)\log_2(X)-X+3\right)\div(X-2)$:



[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [5] [=] màn hình hiện Can't Solve.

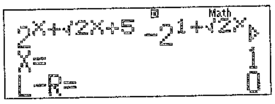
Vậy phương trình có đúng một nghiệm là $x=2$.

Đáp án B.

> **Ví dụ 2:** Số nghiệm của phương trình $2^{x+\sqrt{2x+5}}-2^{1+\sqrt{2x+5}}+2^{6-x}-32=0$ là
>
> A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

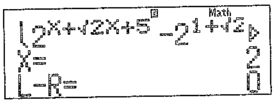
Nhập vào màn hình $2^{X+\sqrt{2X+5}}-2^{1+\sqrt{2X+5}}+2^{6-X}-32$:



[2] [x■] [ALPHA] [)] [+] [√■] [2] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [▶] [−] [2] [x■] [1] [+] [√■] [2] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [▶] [+] [2] [x■] [6] [−] [ALPHA] [)] [▶] [−] [3] [2]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] ta tìm được một nghiệm là $x=1$.

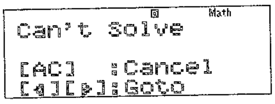
Sửa biểu thức vừa nhập ở trên thành $\left(2^{X+\sqrt{2X+5}}-2^{1+\sqrt{2X+5}}+2^{6-X}-32\right)\div(X-1)$:



[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [5] [=] ta tìm được một nghiệm là $x=2$.

Sửa biểu thức vừa nhập thành $\left(2^{X+\sqrt{2X+5}}-2^{1+\sqrt{2X+5}}+2^{6-X}-32\right)\div(X-1)\div(X-2)$:



[◀] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)]

Sử dụng [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [1] [0] [=] màn hình hiện Can't Solve.

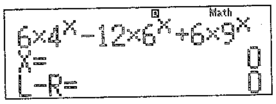
Vậy phương trình chỉ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Đáp án B.

> **Ví dụ 3:** Số nghiệm của phương trình $6.4^x-12.6^x+6.9^x=0$ là
>
> A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

Lời giải

Nhập vào màn hình $6\times4^X-12\times6^X+6\times9^X$:

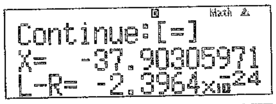


[6] [×] [4] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [1] [2] [×] [6] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [6] [×] [9] [x■] [ALPHA] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] ta tìm được một nghiệm là $x=0$.

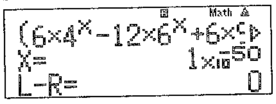
Sửa biểu thức vừa nhập ở trên thành $\left(6\times4^X-12\times6^X+6\times9^X\right)\div X$:

[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [ALPHA] [)]



Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [(−)] [1] [0] [=] máy yêu cầu Continue:[=]

Ấn [=] liên tục cho đến khi máy hiện kết quả $x=1\times10^{-50}\approx0$.



Sửa biểu thức đã nhập vào màn hình thành $\left(6\times4^X-12\times6^X+6\times9^X\right)\div X\div X$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [1] [0] [=] máy yêu cầu Continue:[=]. Ấn [=] liên tục cho thì máy hiện kết quả $x=1\times10^{-50}\approx0$.

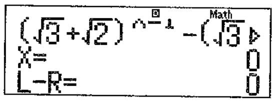
Vậy phương trình có một nghiệm là $x=0$.

Đáp án B.

> **Ví dụ 4:** Phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3x}{x-1}}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x$ có số nghiệm âm là
>
> A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

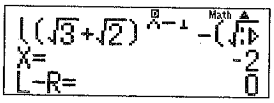
Nhập vào màn hình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3X}{X-1}}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{X}$:



[(] [√■] [3] [▶] [+] [√■] [2] [▶] [)] [x■] [3] [ALPHA] [)] [■/■] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [▶] [−] [(] [√■] [3] [▶] [−] [√■] [2] [▶] [)] [x■] [ALPHA] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] ta tìm được nghiệm là $x=0$.

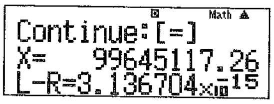
Sửa biểu thức vừa nhập ở trên thành $\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3X}{X-1}}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{X}\right)\div X$:



[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [ALPHA] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [(−)] [1] [0] [=] ta tìm được một nghiệm là $x=-2$.

Sửa biểu thức vừa nhập ở trên thành $\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{3X}{X-1}}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{X}\right)\div X\div(X+2)$:



[÷] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [1] [0] [=] màn hình hiện Continue:[=].

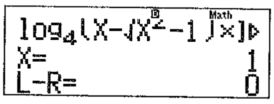
Vậy phương trình có nghiệm âm là $x=-2$.

Đáp án C.

> **Ví dụ 5:** Phương trình $\log_4\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?
>
> A. 0   B. 1   C. 2   D. 3

Lời giải

Nhập vào màn hình $\log_4\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\times\log_5\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)-\log_{20}\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)$:

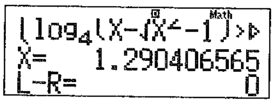


[log■□] [4] [▶] [ALPHA] [)] [−] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [▶] [▶] [×] [log■□] [5] [▶] [ALPHA] [)] [+] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [▶] [▶] [−] [log■□] [2] [0] [▶] [ALPHA] [)] [−] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] máy hiện nghiệm $x=1$.

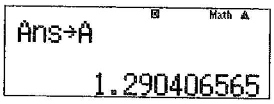
Sửa biểu thức vừa nhập thành

$$\left(\log_4\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\times\log_5\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)-\log_{20}\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\right)\div(X-1)$$



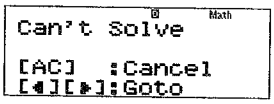
[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [3] [=] màn hình hiện nghiệm $x=1,290406565$. Ấn [SHIFT] [RCL] [(−)] để gán nghiệm này vào biến nhớ A.



Nhập vào màn hình

$$\left(\log_4\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\times\log_5\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)-\log_{20}\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\right)\div(X-1)\div(X-A)$$



Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [=] màn hình hiện Can't Solve.

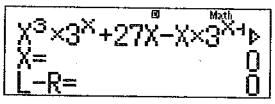
Vậy phương trình có hai nghiệm.

Đáp án C.

> **Ví dụ 6:** Cho phương trình $x^3.3^x+27x=x.3^{x+1}+9x^3$. Tính tổng các nghiệm của phương trình
>
> A. 2   B. 1   C. 3   D. 4

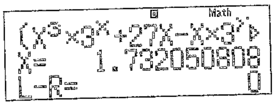
Lời giải

Nhập vào màn hình $X^3\times3^X+27X-X\times3^{X+1}-9X^3$:



[ALPHA] [)] [SHIFT] [x²] [×] [3] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [7] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [×] [3] [x■] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [−] [9] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x²]

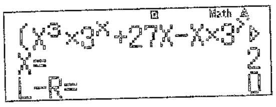
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] máy hiện nghiệm $x=0$.



Sửa biểu thức đã nhập thành $\left(X^3\times3^X+27X-X\times3^{X+1}-9X^3\right)\div X$:

[▶] [(] [◀] [◀] [)] [÷] [ALPHA] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [1] [=] máy hiện nghiệm $x=1{,}732050808$ gán vào A.

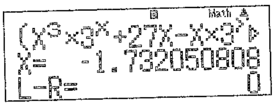


Sửa biểu thức đã nhập thành $\left(X^3\times3^X+27X-X\times3^{X+1}-9X^3\right)\div X\div(X-A)$:

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [2] [=] máy hiện nghiệm $x=2$.

Sửa biểu thức đã nhập thành

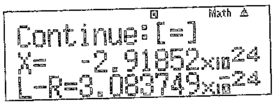
$$\left(X^3\times3^X+27X-X\times3^{X+1}-9X^3\right)\div X\div(X-A)\div(X-2)$$



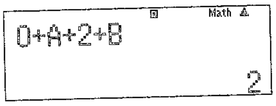
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [=] máy hiện nghiệm $x=-1{,}732050808$ gán vào B.

Sửa biểu thức thành

$$\left(X^3\times3^X+27X-X\times3^{X+1}-9X^3\right)\div X\div(X-A)\div(X-2)\div(X-B)$$



Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [=] [=] máy hiện Continue: [=]



Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x=0, x=A, x=2, x=B$.

Tổng các nghiệm là $0+A+2+B=2$.

Đáp án A.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Kiểm tra nghiệm của phương trình

Câu 1: Nếu $\log_x 243 = 5$ thì x bằng:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 2: Nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$ là:

A. $\{-2;3\}$ B. $\{-3;-2\}$

C. $\{-3;2\}$ D. $\{2;3\}$

Câu 3: Phương trình $2^{x^2-4x+1} = 8^{x-1}$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{2;\frac{5}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{5}{2};2\right\}$

C. $\left\{\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}\right\}$ D. Nghiệm khác

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình
$\log_2 x.\log_4 x.\log_6 x$
$= \log_2 x.\log_4 x + \log_4 x.\log_6 x + \log_6 x.\log_2 x$ là:

A. $\{1\}$ B. $\{2;4;6\}$

C. $\{1;12\}$ D. $\{1;48\}$

Câu 5: Phương trình $\log_2 x + \log_2 x^2 = \log_2(4x)$ có tập nghiệm là:

A. $\{0;-2;2\}$ B. $\{0;2\}$

C. $\{-2;2\}$ D. $\{2\}$

Câu 6: Phương trình $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26$ có tập nghiệm là:

A. $\{3;5\}$ B. $\{1;3\}$ C. $\{2;4\}$ D. $\varnothing$

Câu 7: Phương trình $\frac{1}{4-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1$ có tập nghiệm là:

A. $\{10;100\}$ B. $\{1;20\}$

C. $\left\{\frac{1}{10};10\right\}$ D. $\varnothing$

Câu 8: Phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ có nghiệm là:

A. $x=6$ B. $x=729$

C. $x=\frac{1}{8}$ D. $x>0$

Câu 9: Phương trình $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$ có nghiệm là:

A. $x=1$ B. $x=-1, x=1$

C. $x=2$ D. Vô nghiệm

Câu 10: Nghiệm của phương trình $2^{\sin^2 x} + 5.2^{\cos^2 x} = 7$ là:

A. $\frac{2\pi}{3}$ B. -3π C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

Dạng 2: Kiểm tra nghiệm, tập nghiệm của hệ phương trình

Câu 11: Hệ phương trình $\begin{cases}\log(xy)=5\\ \log x.\log y = 6\end{cases}$ với $x \ge y$ có nghiệm là:

A. $(100;10)$ B. $(500;4)$

C. $(100;100)$ D. Kết quả khác

Câu 12: Hệ phương trình $\begin{cases}3\log x - 2\log y = 5\\ 4\log x + 3\log y = 18\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(100;1000)$ B. $(1000;100)$

C. $(50;40)$ D. Kết quả khác.

Câu 13: Hệ phương trình $\begin{cases}x+y=7\\ \log x + \log y = 1\end{cases}$ với $x \ge y$ có nghiệm là:

A. $(4;3)$ B. $(6;1)$ C. $(5;2)$ D. $(3;4)$

Câu 14: Hệ phương trình $\begin{cases}3\log x - 2\log y = 5\\ 4\log x + 3\log y = 18\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(100;1000)$ B. $(1000;100)$

C. $(50;40)$ D. Kết quả khác.

Câu 15: Hệ phương trình $\begin{cases}x-y=6\\ \ln x + \ln y = 3\ln 6\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(20;14)$ B. $(12;6)$ C. $(8;2)$ D. $(18;12)$

Câu 16: Hệ phương trình $\begin{cases}2(\log_y x + \log_x y) = 5\\ xy = 8\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(2;4),(4;2)$ B. $(4;16),(2;4)$

C. $(2;4),(4;3)$ D. $(1;4),(4;2)$

Dạng 3: Kiểm tra tập nghiệm của bất phương trình

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $2.2^x + 3.3^x - 6^x + 1 > 0$ là:

A. $S=(2;+\infty)$ B. $S=(0;2)$

C. $S=(-\infty;2)$ D. $S=\mathbb{R}$

Câu 18: Bất phương trình $\log_{x-1}(x^2+x-6) > 1$ có tập nghiệm là:

A. $(1;+\infty)$ B. $(\sqrt{5};+\infty)$

C. $(1;+\infty)\setminus\{2\}$ D. $(1;\sqrt{5})\setminus\{2\}$

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9} \le \left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$ là:

A. $(-\infty;-2]$ B. $[4;+\infty)$

C. $[-2;4]$ D. $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$

Câu 20. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{2x+1}{x-1}\right)>0$ có tập nghiệm là:

A. $(-\infty;-2)$ B. $(4;+\infty)$

C. $(-2;1)\cup(1;4)$ D. $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(4^x+4\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2x+1}-3.2^x\right)$ là:

A. $[2;+\infty)$ B. $(-\infty;2)$

C. $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$ D. $[-1;2]$

Dạng 4: Tìm số nghiệm của phương trình. Tính giá trị của biểu thức liên quan đến các nghiệm.

Câu 22: Số nghiệm của phương trình

$$\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{13}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 23: Số nghiệm của phương trình

$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=-\log_4(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$ là:

A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 24: Số nghiệm của phương trình

$$2\log_9^2 x=\log_3 x\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$$

là:

A. 8 B. 1 C. 4 D. 2

Câu 25: Số nghiệm của phương trình $27^x+2=3\sqrt[3]{3^{x+1}-2}$ là:

A. 0 B. 1 C. 4 D. 3

Câu 26: Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x}.3^x=\frac{3}{2}$ là:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 27: Số nghiệm của phương trình

$$2^{2x+1}+2^{3-2x}=\frac{8}{\log_3\left(4x^2-4x+4\right)}$$

là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 28: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_3\frac{3}{x}.\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$ bằng

A. 5 B. $\frac{33}{32}$ C. $\frac{5}{64}$ D. $\frac{67}{64}$

Câu 29: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x+\log_{3x}\frac{3}{x}=1$ là:

A. $\frac{10}{9}$ B. $\frac{28}{9}$ C. $\frac{37}{9}$ D. 4

Câu 30: Tích các nghiệm của phương trình

$$2\log_9^2 x=\log_3 x\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$$ là:

A. 8 B. 1 C. 4 D. 2

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Kiểm tra nghiệm của phương trình

Câu 1: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $\log_X(243)-5$:

– *Phương án A:* Ấn [CALC], ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $2,924812504\neq 0$. Loại A.

$$\log_X(243)-5 \qquad 2.924812504$$

– *Phương án B:* Ấn [CALC], ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

$$\log_X(243)-5 \qquad 0$$

Câu 2: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $2^{X^2-X+8}=4^{1-3X}$:

Ấn [CALC], ấn [(−)] [2] $(X=-2)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Loại C và D.

$$2^{X^2-X+8}-4^{1-3X} \qquad 0$$

Ấn [CALC], ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $16383,99998\neq 0$. Loại A.

$$2^{X^2-X+8}-4^{1-3X} \qquad 16383.99998$$

Ấn [CALC], ấn [(−)] [3] $(X=-3)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

$$2^{X^2-X+8}-4^{1-3X} \qquad 0$$

Câu 3: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $2^{X^2-4X+1}-8^{X-1}$:

Ấn [CALC], ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-\frac{63}{8}\neq 0$. Loại A,B.

$$2^{X^2-4X+1}-8^{X-1} \qquad -\frac{63}{8}$$

Ấn [CALC], ấn [(] [7] [−] [√] [1] [7] [)] [)] [÷] [4] $\left(X=\frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-0,1680552378\neq 0$. Loại C.

$$2^{X^2-4X+1}-8^{X-1} \qquad -0.1680552378$$

Câu 4: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $\log_2(X)\log_4(X)\log_6(X)-\log_2(X)\log_4(X)-\log_4(X)\log_6(X)-\log_6(X)\log_2(X)$

Ấn [CALC], ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Loại B.

$$\log_2(X)\log_4(X)1\triangleright \qquad 0$$

Ấn [CALC], ấn [1] [2] $(X=12)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-4,971815308\neq 0$. Loại C.

$$\log_2(X)\log_4(X)1\triangleright \qquad -4.971815308$$

Ấn [CALC], ấn [4] [8] $(X=48)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn D.

$$\log_2(X)\log_4(X)1\triangleright \qquad 0$$

Câu 5: Đáp án D.

Điều kiện $x>0$ nên loại ngay A, B và C.

Nhập vào màn hình $\log_2(X)+\log_2(X^2)-\log_2(4X)$

Ấn [CALC], ấn [2] $(X=2)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0.

$$\log_2(X)+\log_2(X^2\triangleright \qquad 0$$

Câu 6: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $5^{X-1}+5^{3-X}-26$.

Ấn [CALC], ấn [3] $(X=3)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Loại C và D.

$$5^{X-1}+5^{3-X}-26 \qquad 0$$

Ấn [CALC], ấn [5] $(X=5)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{14976}{25}\neq 0$. Loại A.

$$5^{X-1}+5^{3-X}-26 \qquad \frac{14976}{25}$$

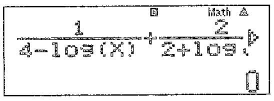
Ấn [CALC], ấn [1] $(X=1)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.

$$5^{X-1}+5^{3-X}-26 \qquad 0$$

Câu 7: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $\frac{1}{4-\log(X)}+\frac{2}{2+\log(X)}-1$

Ấn CALC, ấn 1 0 $(X=10)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Loại B và D.

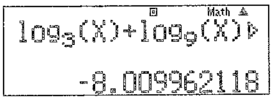


Ấn CALC, ấn 1 0 0 $(X=100)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Chọn A.

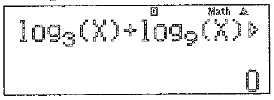
Câu 8: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $\log_3(X)+\log_9(X)+\log_{27}(X)-11$

– *Phương án A:* Ấn CALC, ấn 6 $(X=6)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $-8{,}009962118\neq 0$. Loại A.



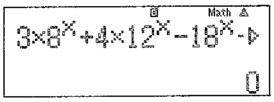
– *Phương án B:* Ấn CALC, ấn 7 2 9 $(X=729)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Chọn B.



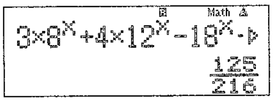
Câu 9: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $3.8^X+4.12^X-18^X-2.27^X$.

Ấn CALC, ấn 1 $(X=1)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Loại C, D.



Ấn CALC, ấn (–) 1 $(X=-1)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $\frac{125}{216}$. Loại B.

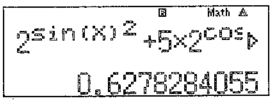


Câu 10: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4

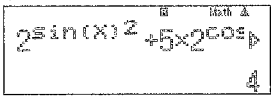
Nhập vào màn hình $2^{\sin(X)^2}+5\times 2^{\cos(X)^2}-7$.

– *Phương án A:* Ấn CALC, ấn 2 SHIFT ×10ˣ ÷ 3 $\left(X=\frac{2\pi}{3}\right)$. Ấn = máy hiện kết quả bằng $0{,}6278284055\neq 0$. Loại A.



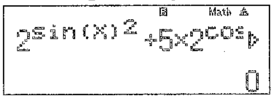
– *Phương án B:* Ấn CALC, ấn (–) 3 SHIFT ×10ˣ $(X=-3\pi)$

Ấn = máy hiện kết quả bằng $4\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, ấn SHIFT ×10ˣ ÷ 2 $\left(X=\frac{\pi}{2}\right)$.

Ấn = máy hiện kết quả bằng 0. Chọn C.

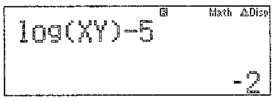


Dạng 2: Kiểm tra nghiệm, tập nghiệm của hệ phương trình

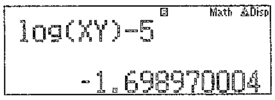
Câu 11: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $\log(XY)-5:\log(X)\times\log(Y)-6$.

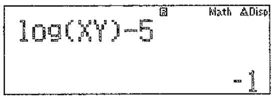
– *Phương án A:* Ấn CALC, nhập $X=100, Y=10$. Ấn = máy hiện $\log(XY)-5=-2\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn CALC, nhập $X=500, Y=4$. Ấn = máy hiện $\log(XY)-5=-1{,}698970004\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, nhập $X=100, Y=100$. Ấn = máy hiện $\log(XY)-5=-1\neq 0$.

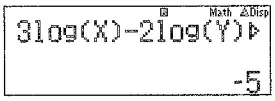


Câu 12: Đáp án B.

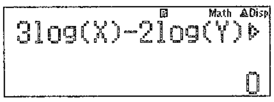
Nhập vào màn hình

$3\log(X)-2\log(Y)-5:4\log(X)+3\log(Y)-18$

– *Phương án A:* Ấn CALC, nhập $X=100, Y=1000$. Ấn = máy hiện $3\log(X)-2\log(Y)-5=-5\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn CALC, nhập $X=100, Y=1000$. Ấn = máy hiện $3\log(X)-2\log(Y)-5=0$. Ấn = tiếp máy hiện $4\log(X)+3\log(Y)-18=0$. Chọn B.

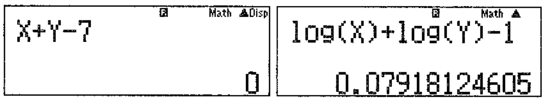


Câu 13: Đáp án C.

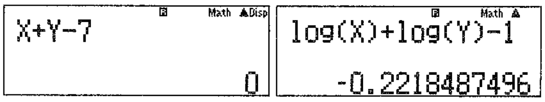
Do $x\geq y$ nên loại D.

Nhập vào màn hình $X+Y-7:\log(X)+\log(Y)-1$

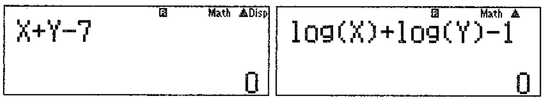
– *Phương án A:* Ấn CALC, nhập $X=4, Y=3$. Ấn = máy hiện $X+Y-7=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\log(X)+\log(Y)-1=0,07918124605\neq 0$. Loại A.



– *Phương án B:* Ấn CALC, nhập $X=6, Y=1$. Ấn = máy hiện $X+Y-7=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\log(X)+\log(Y)-1=-0,2218487496\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, nhập $X=5, Y=2$. Ấn = máy hiện $X+Y-7=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\log(X)+\log(Y)-1=0$. Chọn C.

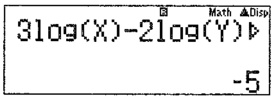


Câu 14: Đáp án B.

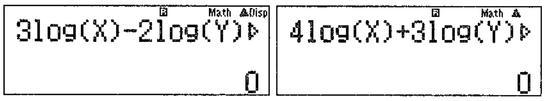
Nhập vào màn hình

$$3\log(X)-2\log(Y)-5:4\log(X)+3\log(Y)-18$$

– *Phương án A:* Ấn CALC, nhập $X=100, Y=1000$. Ấn = máy hiện $3\log(X)-2\log(Y)-5=-5\neq 0$. Loại A.



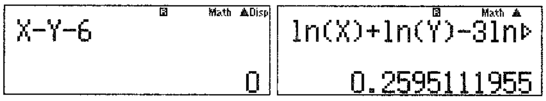
– *Phương án B:* Ấn CALC, nhập $X=1000, Y=100$. Ấn = máy hiện $3\log(X)-2\log(Y)-5=0$. Ấn = tiếp máy hiện $4\log(X)+3\log(Y)-18=0$. Chọn B.



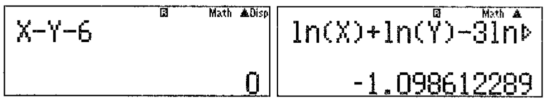
Câu 15: Đáp án D.

Nhập vào màn hình $X-Y-6:\ln(X)+\ln(Y)-3\ln(6)$

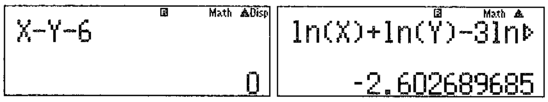
– *Phương án A:* Ấn CALC, nhập $X=20, Y=14$. Ấn = máy hiện $X-Y-6=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\ln(X)+\ln(Y)-3\ln(6)=0,2595111955\neq 0$. Loại A.



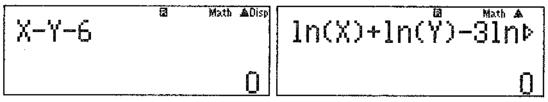
– *Phương án B:* Ấn CALC, nhập $X=12, Y=6$. Ấn = máy hiện $X-Y-6=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\ln(X)+\ln(Y)-3\ln(6)=-1,098612289\neq 0$. Loại B.



– *Phương án C:* Ấn CALC, nhập $X=8, Y=2$. Ấn = máy hiện $X-Y-6=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\ln(X)+\ln(Y)-3\ln(6)=-2,602689685\neq 0$. Loại C.



– *Phương án D:* Ấn CALC, nhập $X=18, Y=12$. Ấn = máy hiện $X-Y-6=0$. Ấn = tiếp máy hiện $\ln(X)+\ln(Y)-3\ln(6)=0$. Chọn D.

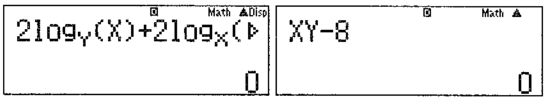


Câu 16: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $2\log_Y(X)+2\log_X(Y)-5:XY-8$

Phương án A: Ấn CALC, nhập $X=2, Y=4$. Ấn = máy hiện $2\log_Y(X)+2\log_X(Y)-5=0$. Ấn = tiếp máy hiện $XY-8=0$.

Ấn CALC, nhập $X=4, Y=2$. Ấn = máy hiện $2\log_Y(X)+2\log_X(Y)-5=0$. Ấn = tiếp máy hiện $XY-8=0$. Chọn A.



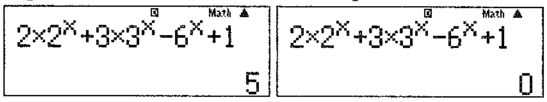
Nhận xét: Quan sát kĩ, ta có thể loại ngay các phương án B, C, D vì có một nghiệm không thỏa mãn phương trình $xy=8$.

Dạng 3: Kiểm tra tập nghiệm của bất phương trình

Câu 17: Đáp án C.

Nhận xét: Đáp án xuất hiện các giá trị 0 và 2 nên ta CALC biểu thức $2.2^x+3.3^x-6^x+1$ với $x=0, x=2$.

Nhập vào màn hình $2\times 2^X+3\times 3^X-6^X+1$. Ấn CALC, nhập $X=0$ và $X=2$ ta được kết quả lần lượt là 5 và



Khi đó giá trị $x=2$ là điểm tới hạn và dấu của $2.2^x+3.3^x-6^x+1$ không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Do $x=0\in(-\infty;2)$ và $2.2^x+3.3^x-6^x+1=5>0$ khi $x=0$. Mặt khác, bất phương trình có dạng $f(x)>0$ nên có tập nghiệm là $(-\infty;2)$.

Câu 18: Đáp án B.

Nhận xét: Đáp án xuất hiện các giá trị 1, 2 và $\sqrt{5}$ nên ta CALC biểu thức $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1$ với $x=1$, $x=2$ và $x=\sqrt{5}$.

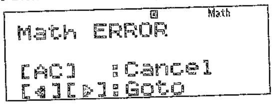
Mặt khác, các tập nghiệm ở hai phương án C và D có thể viết lại như sau:

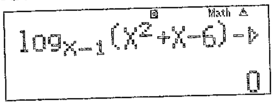
$$\begin{cases}(1;+\infty)\setminus\{2\}=(1;2)\cup(2;+\infty)\\(1;\sqrt{5})\setminus\{2\}=(1;2)\cup(2;\sqrt{5})\end{cases}$$

Điều kiện của bất phương trình là $\begin{cases}0<x-1\neq 1\\x^2+x-6>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1<x\neq 2\\\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>2.$$

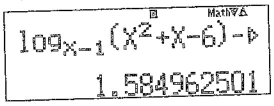
Nhập vào màn hình $\log_{X-1}\left(X^2+X-6\right)-1$. Ấn CALC, nhập $X=1, X=2$ và $X=\sqrt{5}$ ta được kết quả lần lượt là Math ERROR, Math ERROR và 0.





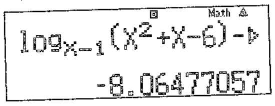
Như vậy các giá trị $x=1, x=2$ và $x=\sqrt{5}$ đều là các điểm tới hạn và dấu của $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1$ không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;2),(2;\sqrt{5})$ và $(\sqrt{5};+\infty)$. Do điều kiện là $x>2$ nên chỉ xét trên hai khoảng $(2;\sqrt{5})$ và $(\sqrt{5};+\infty)$.

* Chọn $x=3\in(\sqrt{5};+\infty)$. Dùng CALC, ta tìm được $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1=1,584962501>0$ khi $x=3$.



$\rightarrow\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1>0,\forall x\in(\sqrt{5};+\infty)$

* Chọn $x=2,1\in(2;\sqrt{5})$. Dùng CALC, ta tính được $\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1=-8,06477057<0$ khi $x=2,1$.



$\rightarrow\log_{x-1}\left(x^2+x-6\right)-1<0,\forall x\in(2;\sqrt{5})$

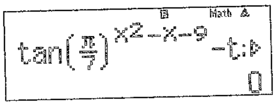
Bất phương trình có dạng $f(x)>0$ nên tập nghiệm là $(\sqrt{5};+\infty)$.

Câu 19: Đáp án D.

Nhận xét: Đáp án xuất hiện các giá trị -2 và 4 nên ta CALC biểu thức $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$ với $x=-2$ và $x=4$.

Đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4

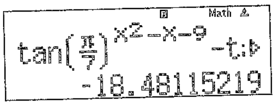
Nhập vào màn hình $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{X^2-X-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{X-1}$. Ấn CALC, nhập $X=-2$ và $X=4$ ta được kết quả bằng 0.



Như vậy $x=-2$ và $x=4$ là điểm tới hạn và dấu của biểu thức $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}$ không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty;-2),(-2;4)$ và $(4;+\infty)$.

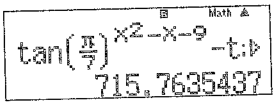
* Chọn $x=-3\in(-\infty;-2)$ thì

$$\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}<0.$$



$\rightarrow\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}<0,\forall x\in(-\infty;-2)$.

* Chọn $x=0\in(-2;4)$ thì $\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}>0$

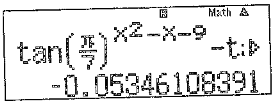


$\rightarrow\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}>0,\forall x\in(-2;4)$.

* Chọn $x=5\in(4;+\infty)$ thì

$\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}<0$

$\rightarrow\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x^2-x-9}-\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)^{x-1}<0,\forall x\in(4;\infty)$.

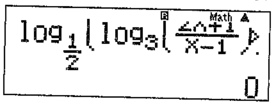


Bất phương trình có dạng $f(x)\leq 0$ nên tập nghiệm là $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$.

Câu 20: Đáp án D.

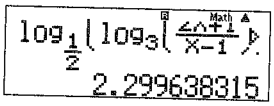
Nhận xét: Các giá trị đặc biệt ở đây là -2, 1 và 4.

Nhập vào màn hình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)$. Ấn CALC, nhập $X=-2, X=1$ và $X=4$ ta được kết quả lần lượt bằng Math ERROR, Math ERROR và 0.



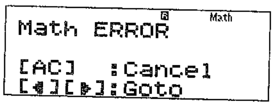
Suy ra $x=-2, x=1$ và $x=4$ là các điểm tới hạn và dấu của $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)$ không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty;-2),(-2;1),(1;4)$ và $(4;+\infty)$.

* Chọn $x=-3\in(-\infty;-2)$ thì $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)>0$

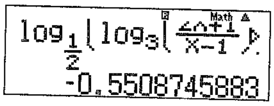


$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)>0, \forall x\in(-\infty;-2)$.

* Chọn $x=0\in(-2;1)$ thì $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)$ không xác định tại $x=0$.

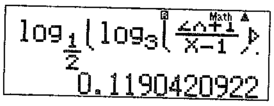


* Chọn $x=2\in(1;4)$ thì $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)<0$



$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)<0, \forall x\in(1;4)$.

* Chọn $x=5\in(4;+\infty)$ thì $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)>0$



$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\left(\frac{2X+1}{X-1}\right)\right)>0, \forall x\in(4;+\infty)$.

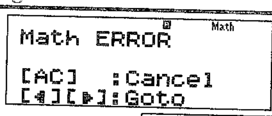
Bất phương trình có dạng $f(x)>0$ nên tập nghiệm là $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$.

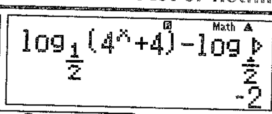
Câu 21: Đáp án A.

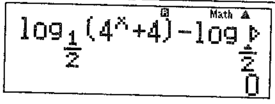
Nhận xét: Các giá trị đặc biệt là –1, 1 và 2.

Nhập vào màn hình $\log_{\frac{1}{2}}\left(4^X+4\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2X+1}-3.2^X\right)$

Ấn CALC, nhập $X=-1, X=1$ và $X=2$ ta được kết quả lần lượt bằng Math ERROR, –2 và 0.



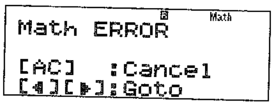




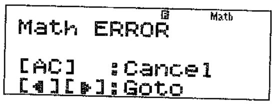
Suy ra các giá trị tới hạn là $x=-1$ và $x=2$. Loại ngay đáp án C.

Biểu thức $\log_{\frac{1}{2}}\left(4^X+4\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2X+1}-3.2^X\right)$ có dấu không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;2)$ và $(2;+\infty)$.

* Chọn $x=-2\in(-\infty;-1)$ thì biểu thức $\log_{\frac{1}{2}}\left(4^X+4\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2X+1}-3.2^X\right)$ không xác định (Math ERROR).

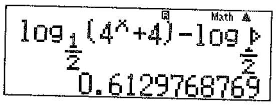


* Chọn $x=0\in(-1;2)$ thì biểu thức $\log_{\frac{1}{2}}\left(4^X+4\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2X+1}-3.2^X\right)$ không xác định (Math ERROR).



* Chọn $x=3\in(2;+\infty)$ thì ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(4^X+4\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2X+1}-3.2^X\right)>0.$$



Bất phương trình có dạng $f(x)\geq 0$ nên tập nghiệm là $[2;+\infty)$.

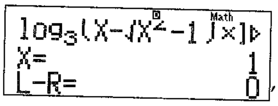
Dạng 4: Tìm số nghiệm của phương trình. Tính giá trị của biểu thức liên quan đến các nghiệm

Câu 22: Đáp án B.

Nhập vào màn hình

$$\log_3\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\times\log_5\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)-\log_{13}\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)$$

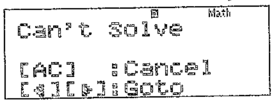
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 0 = máy hiện nghiệm $x=1$.



Sửa biểu thức vừa nhập thành

$$\left(\log_3\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\times\log_5\left(X+\sqrt{X^2+1}\right)-\log_{13}\left(X-\sqrt{X^2-1}\right)\right)\div(X-1)$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 2 = máy hiện Can't Solve.



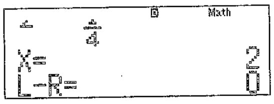
Vậy phương trình có một nghiệm $x=1$.

Câu 23: Đáp án C.

Nhập vào màn hình

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left((X+2)^2\right)-3+\log_4\left((4-X)^3\right)-\log_{\frac{1}{4}}\left((X+6)^3\right)$$

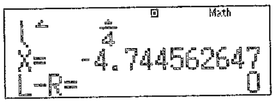
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 0 = máy hiện nghiệm $x=2$.

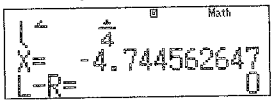


Sửa biểu thức vừa nhập thành

$$\left(\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left((X+2)^2\right)-3+\log_4\left((4-X)^3\right)-\log_{\frac{1}{4}}\left((X+6)^3\right)\right)\div(X-2)$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 3 = máy hiện nghiệm $x=-4,744562647$. Gán nghiệm này vào biến nhớ A.

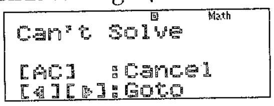




Nhập vào màn hình

$$\left(\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left((X+2)^2\right)-3+\log_4\left((4-X)^3\right)-\log_{\frac{1}{4}}\left((X+6)^3\right)\right)\div(X-2)\div(X-A)$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn = = máy hiện Can't Solve. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

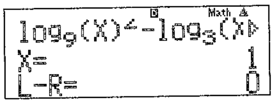


Câu 24: Đáp án D.

Nhập vào màn hình

$$2\left(\log_9(X)\right)^2-\log_3(X)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)$$

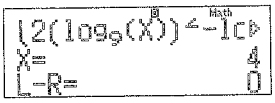
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 9 = máy hiện nghiệm $x=1$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(2\left(\log_9(X)\right)^2-\log_3(X)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)\right)\div(X-1)$$

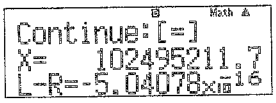
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 1 = máy hiện nghiệm $x=4$.



Nhập vào màn hình

$$\left(2\log_9(X)^2-\log_3(X)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)\right)\div(X-1)\div(X-4)$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 2 = máy hiện Continue: [=]

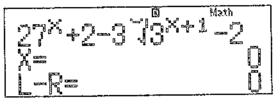


Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1, x=4$.

Câu 25: Đáp án B.

Nhập vào màn hình $27^X+2-3\sqrt[3]{3^{X+1}-2}$.

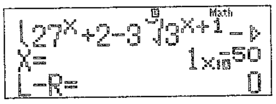
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 0 = máy hiện nghiệm $x=0$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(27^X+2-3\sqrt[3]{3^{X+1}-2}\right)\div X$$

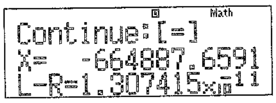
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 1 = máy hiện nghiệm $x=1\times10^{-50}\approx0$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(27^X+2-3\sqrt[3]{3^{X+1}-2}\right)\div X\div X$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 3 = màn hình hiện Continue:[=]

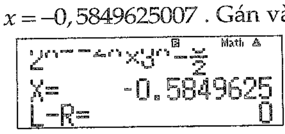


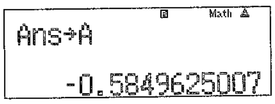
Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 26: Đáp án A.

Nhập vào màn hình $2^{X^2-2X}\times3^X-\frac{3}{2}$

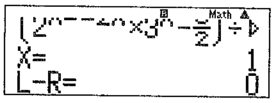
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 0 = máy hiện nghiệm $x=-0,5849625007$. Gán vào A.





Nhập vào màn hình $\left(3^{X^2-2X}\times3^X-\frac{3}{2}\right)\div(X-A)$

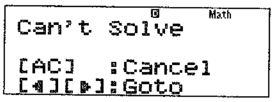
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [=] máy hiện nghiệm $x=1$.



Nhập vào màn hình

$$\left(3^{X^2-2X}\times 3^X-\frac{3}{2}\right)\div(X-A)\div(X-1)$$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [=] [=] máy hiện Can't Solve.



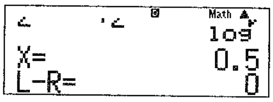
Vậy phương trình có hai nghiệm.

Câu 27: Đáp án B.

Nhập vào màn hình

$$2^{2X+1}+2^{3-2X}-\frac{8}{\log_3\left(4X^2-4X+4\right)}$$

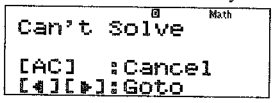
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] máy hiện nghiệm $x=\frac{1}{2}$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(2^{2X+1}+2^{3-2X}-\frac{8}{\log_3\left(4X^2-4X+4\right)}\right)\div(X-0{,}5)$$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [2] [=] máy hiện Can't Solve.



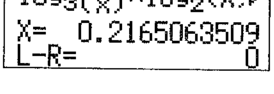
Vậy phương trình có một nghiệm.

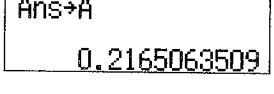
Câu 28: Đáp án D.

Nhập vào màn hình

$$\log_3\left(\frac{3}{X}\right)\times\log_2(X)-\log_3\left(\frac{X^3}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}-\log_2\left(\sqrt{X}\right)$$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] ta tìm được một nghiệm $x=0{,}2165063509$ gán vào A.

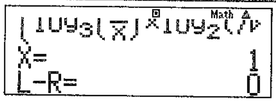




Nhập vào màn hình

$$\left(\log_3\left(\frac{3}{X}\right)\times\log_2(X)-\log_3\left(\frac{X^3}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}-\log_2\left(\sqrt{X}\right)\right)\div(X-A)$$

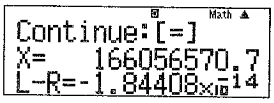
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [1] [=] ta tìm được một nghiệm $x=1$.



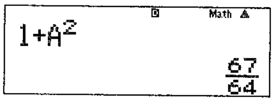
Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(\log_3\left(\frac{3}{X}\right)\times\log_2(X)-\log_3\left(\frac{X^3}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}-\log_2\left(\sqrt{X}\right)\right)\div(X-A)\div(X-1)$$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [2] [=] màn hình hiện Continue:[=].



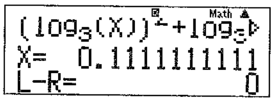
Vậy phương trình có hai nghiệm và tổng bình phương các nghiệm là $1+A^2=\frac{67}{64}$.

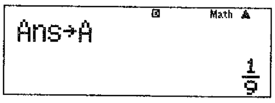


Câu 29: Đáp án C.

Nhập vào màn hình $(\log_3(X))^2+\log_{3X}\left(\frac{3}{X}\right)-1$.

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [0] [=] ta tìm được một nghiệm $x=0{,}1111111111$ gán vào A.

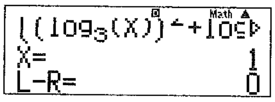




Nhập vào màn hình

$$\left((\log_3(X))^2+\log_{3X}\left(\frac{3}{X}\right)-1\right)\div(X-A)$$

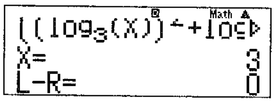
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [1] [=] ta tìm được một nghiệm $x=1$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left((\log_3(X))^2+\log_{3X}\left(\frac{3}{X}\right)-1\right)\div(X-A)\div(X-1)$$

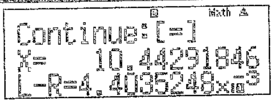
Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [2] [=] ta tìm được một nghiệm $x=3$.



Sửa biểu thức vừa nhập thành

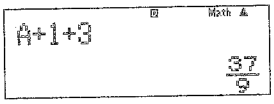
$$\left((\log_3(X))^2+\log_{3X}\left(\frac{3}{X}\right)-1\right)\div(X-A)\div(X-1)\div(X-3)$$

Ấn [SHIFT] [CALC] (SOLVE), ấn [=] [3] [=] màn hình hiện Continue:[=]



Vậy phương trình có ba nghiệm và tổng các nghiệm là

$A+1+3=\frac{37}{9}$.

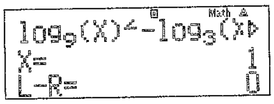


Câu 30: Đáp án C.

Nhập vào màn hình

$$2\left(\log_9\left(X\right)\right)^2-\log_3\left(X\right)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)$$

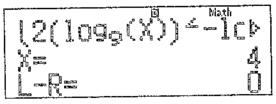
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 9 = máy hiện nghiệm $x=1$.



Sửa biểu thức đã nhập thành

$$\left(2\left(\log_9\left(X\right)\right)^2-\log_3\left(X\right)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)\right)\div\left(X-1\right)$$

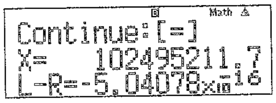
Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 1 = máy hiện nghiệm $x=4$.



Nhập vào màn hình

$$\left(2\log_9\left(X\right)^2-\log_3\left(X\right)\times\log_3\left(\sqrt{2X+1}-1\right)\right)\div\left(X-1\right)\div\left(X-4\right)$$

Ấn SHIFT CALC (SOLVE), ấn 2 = máy hiện Continue: [=]



Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1,x=4$ và tích các nghiệm là 4.

CHẾ ĐỘ LÀM VIỆC TRONG MÁY TÍNH

Trên máy tính casio (hay vinacal), các bài toán về phép biến hình trong mặt phẳng được thực hiện trên phương thức CMPLX: MODE 2 (Tính toán với số phức)

CHỦ ĐỀ 9: PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

1. Dạng phức hóa của điểm và vec-tơ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(x_M;y_M)$ và vec-tơ $\vec{u}=(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$. Khi đó $z_M=x_M+y_M.i$ và $z_{\vec{u}}=x_{\vec{u}}+y_{\vec{u}}.i$ được gọi là số phức tương ứng hay *dạng phức hóa* của điểm M và vec-tơ $\vec{u}$.

Ví dụ: Dạng phức hóa của điểm $A(4;7)$ là $z_A=4+7i$, của điểm $B(3;0)$ là $z_B=3+0.i=3$, hay của điểm $C(0;3)$ là $z_C=0+3i=3i$. Dạng phức hóa của vec-tơ $\vec{u}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ là $z_{\vec{u}}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i$.

2. Phép tịnh tiến

Dạng 1: Tìm điểm $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(a;b)$.

Trong mặt phẳng cho vec-tơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$. Kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

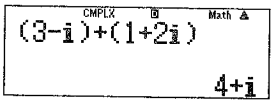
Như vậy $T_{\vec{v}}(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$. Khi đó $\begin{cases}x'-x=a\\y'-y=b\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}$

$\rightarrow M'(x+a;y+b)\rightarrow z_{M'}=(x+a)+(y+b)i=(x+yi)+(a+bi)\rightarrow\boxed{z_{M'}=z_M+z_{\vec{v}}}$

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vec-tơ $\vec{v}=(1;2)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm $M(3;-1)$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}z_M=3-i\\z_{\vec{v}}=1+2i\end{cases}$ và $M'=T_{\vec{v}}(M)\rightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec{v}}=(3-i)+(1+2i)$.



Đưa máy về phương thức CMPLX, ấn MODE 2.

Nhập vào máy $(3-i)+(1+2i)$, ấn (3 − ENG) + (1 + 2 ENG).

Ấn =, máy hiện kết quả bằng $4+i$. Vậy $z_{M'}=4+i\rightarrow M'(4;1)$.

Dạng 2: Tìm đường thẳng $d':A'x+B'y=C'$ là ảnh của đường thẳng $d:Ax+By=C$ qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(a;b)$.

Lấy điểm $M(x;y)\in d$. Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)\rightarrow\begin{cases}x'-x=a\\y'-y=b\end{cases}\rightarrow M(x'-a;y'-b)$

Do $M\in d$ nên $A(x'-a)+B(x'-b)=C\Leftrightarrow Ax'+By'=C+(Aa+Bb)=C+\vec{n}.\vec{v}$ với $\vec{n}$ là vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng d.

Lại có $\begin{cases}T_{\vec{v}}(d)=d'\\T_{\vec{v}}(M)=M'\rightarrow M'\in d'\rightarrow d':Ax+By=C+\vec{n}.\vec{v}\rightarrow\boxed{C'=C+\vec{n}.\vec{v}}\\M\in d\end{cases}$

CHÚ Ý

Số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ có phần thực được kí hiệu là $\operatorname{Re}(z)$ hay $\Re(z)$, phần ảo được kí hiệu là $\operatorname{Im}(z)$ hay $\Im(z)$.

Như vậy $\begin{cases}\operatorname{Re}(z)=\Re(z)=a\\\operatorname{Im}(z)=\Im(z)=b\end{cases}$

Nhận thấy $\begin{cases} z_{\vec{n}} = A + Bi \\ \overline{z_{\vec{v}}} = a - bi \end{cases} \rightarrow z_{\vec{n}}.\overline{z_{\vec{v}}} = (A+Bi)(a-bi) = Aa + Bb + (aB - Ab)i$

$\rightarrow \text{Re}\left(z_{\vec{n}}.\overline{z_{\vec{v}}}\right) = Aa + Bb = \vec{n}.\vec{v} \rightarrow \boxed{C' = C + \vec{n}.\vec{v} = C + \text{Re}\left(z_{\vec{n}}.\overline{z_{\vec{v}}}\right)}$ với $\overline{z_{\vec{v}}}$ là số phức liên hợp của số phức $z_{\vec{v}}$.

Như vậy, tại phương thức CMPLX ([MODE] [2]), ta nhập vào máy $\boxed{C + \text{Conjg}(z_{\vec{v}}) \times z_{\vec{n}}}$, chỉ lấy phần thực của kết quả, đó chính là C'.

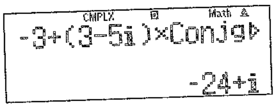
Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vec-tơ $\vec{v} = (-2;3)$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 5y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Lời giải

Ta có $\Delta: 3x - 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y = -3 \rightarrow C = -3$ và $\begin{cases} \vec{n} = (3;-5) \rightarrow z_{\vec{n}} = 3 - 5i \\ \vec{v} = (-2;3) \rightarrow z_{\vec{v}} = -2 + 3i \end{cases}$

Do $T_{\vec{v}}(\Delta) = \Delta'$ nên phương trình Δ' có dạng $3x - 5y = C'$ và $C' = C + \text{Re}\left(z_{\vec{n}}.\overline{z_{\vec{v}}}\right)$, hay nói cách khác C' chính là phần thực của kết quả trong phép tính $C + z_{\vec{n}}.\overline{z_{\vec{v}}}$.

Đưa máy về phương thức CMPLX, ấn [MODE] [2].



Nhập vào máy $-3 + (3 - 5i) \times \text{Conjg}(-2 + 3i)$, ấn [(−)] [3] [+] [(] [3] [−] [5] [ENG] [)] [×] [SHIFT] [2] [2] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-24 + i$.

Vậy $C' = -24$ và phương trình $\Delta': 3x - 5y = -24 \Leftrightarrow 3x - 5y + 24 = 0$.

Dạng 3: Tìm đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm $I(x;y)$, bán kính R qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (a;b)$.

Gọi $I'(x';y')$ và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').

Do $T_{\vec{v}}(C) = (C') \rightarrow \begin{cases} R' = R \\ T_{\vec{v}}(I) = I' \end{cases}$. Như vậy, ta đưa bài toán về tìm điểm $I'(x';y')$ là ảnh của điểm $I(x;y)$ qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (a;b)$, tức đưa bài toán về **dạng 1**.

Ta có $I'(x';y') = T_{\vec{v}}(I(x;y))$ nên $\boxed{z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}}}$.

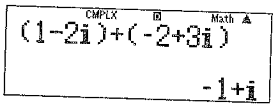
Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vec-tơ $\vec{v} = (-2;3)$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 3$. Gọi $I'(x';y')$ và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').

Do $T_{\vec{v}}(C) = (C')$ nên $R' = R = 3$ và $T_{\vec{v}}(I) = I'$. Suy ra $\boxed{z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}}}$, mà $\begin{cases} z_I = 1 - 2i \\ z_{\vec{v}} = -2 + 3i \end{cases}$

Đưa máy về phương thức CMPLX, ấn [MODE] [2].



Nhập vào máy $(1-2i)+(-2+3i)$, ấn [(] [1] [−] [2] [ENG] [)] [+] [(] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-1+i$. Vậy $z_{I'}=-1+i \to I'(-1;1)$.

Phương trình đường tròn (C') là $(x+1)^2+(y-1)^2=9$.

3. Phép đối xứng trục

Định nghĩa: Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm $M \in d$ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d. Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng hay trục đối xứng. Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$.

Ta có $Đ_d(M)=M'$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(a;b)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$. Tìm điểm $M'(a';b')$ là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục Δ.

CHÚ Ý

Trong một số bài toán, phương trình đường thẳng Δ sẽ được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$. Khi đó ta nên chuyển phương trình này về dạng tổng quát $Ax+By+C=0$ để có thể thực hiện giải theo các bước ở bên.

* **Bước 1:** Đường thẳng Δ có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B) \to z_{\vec{n}}=A+Bi$. Điểm $M(a;b) \to z_M=a+bi$.

* **Bước 2:** Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2].

* **Bước 3:** Nhập vào máy $-\dfrac{z_{\vec{n}} \times \text{Conjg}(z_M)+C}{|z_{\vec{n}}|^2}=-\dfrac{z_{\vec{n}}.\overline{z_M}+C}{|z_{\vec{n}}|^2}$. Ấn [=], máy hiện kết quả có dạng một số phức z.

* **Bước 4:** Lấy phần thực của số phức z, tức là $\Re(z)$. Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ. Khi đó dạng phức hóa của điểm H được xác định qua công thức $z_H=z_M+z_{\vec{n}}.\Re(z) \to z_H=x_H+y_H.i \to H(x_H;y_H)$.

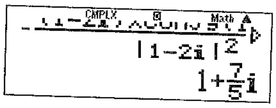
* **Bước 5:** Dạng phức hóa của điểm $M'(a';b')$ là hình chiếu của điểm $M(a;b)$ qua đường thẳng Δ được xác định qua công thức $\boxed{z_{M'}=2z_H-z_M}$ → Tọa độ điểm M'

Đây được gọi là phương pháp *Liên hợp phức*. Cơ sở hình thành phương pháp sẽ được đề cập đến tại phần đọc thêm ngay dưới đây.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;5)$ và đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$. Tìm điểm $M'(x';y')=Đ_\Delta(M)$.

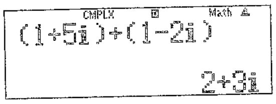
Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n_\Delta}=\vec{n}=(1;-2) \\ M(1;5) \end{cases} \to \begin{cases} z_{\vec{n}}=1-2i \\ z_M=1+5i \end{cases}$. Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2].

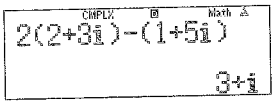


Nhập vào máy $-\dfrac{(1-2i)\times\text{Conjg}(1+5i)+4}{|1-2i|^2}$, ấn [(−)] [▭/▭] [(] [1] [−] [2] [ENG] [)] [×] [SHIFT] [2] [2] [1] [+] [5] [ENG] [)] [+] [4] [▼] [SHIFT] [hyp] [1] [−] [2] [ENG] [▶] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $1+\dfrac{7}{5}i=z \to \Re(z)=1$.

Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng $\Delta \to$ Dạng phức hóa của điểm H là $z_H = z_M + z_{\vec{n}}.\Re(z) = (1+5i)+(1-2i)\times 1 = (1+5i)+(1-2i)$.



Nhập vào máy tính $(1+5i)+(1-2i)$, ấn (1 + 5 ENG) + (1 − 2 ENG). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2+3i$. Suy ra $z_H = 2+3i$.



Dạng phức hóa của điểm M' là $z_{M'} = 2z_H - z_M = 2(2+3i)-(1+5i)$. Ấn 2 (2 + 3 ENG) − (1 + 5 ENG). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $3+i$.

Vậy $z_{M'} = 3+i \to M'(3;1)$.

ĐỌC THÊM: Cơ sở hình thành phương pháp liên hợp phức

Bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(a;b)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$. Tìm điểm $M'(a';b')$ là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục Δ.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của điểm $M(a;b)$ trên đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$

$\longrightarrow \overrightarrow{MH} = (x_H - a; y_H - b)$ và $\overrightarrow{n_\Delta} = (A;B)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} MH \perp \Delta \\ H \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_H - a}{A} = \dfrac{y_H - b}{B} \\ Ax_H + By_H + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Bx_H - Ay_H = aB - Ab \\ Ax_H + By_H = -C \end{cases}$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{B^2a - AB.b - AC}{A^2+B^2} \\ y_H = \dfrac{A^2b - AB.a - BC}{A^2+B^2} \end{cases} \longrightarrow H\left(\dfrac{B^2a - AB.b - AC}{A^2+B^2}; \dfrac{A^2b - AB.a - BC}{A^2+B^2}\right)$$

$$\longrightarrow z_H = \frac{B^2a - AB.b - AC}{A^2+B^2} + \frac{A^2b - AB.a - BC}{A^2+B^2}i$$

$$z_H = \frac{(A^2+B^2)a - A(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2} + \frac{(A^2+B^2)b - B(Bb+Aa+C)}{A^2+B^2}i$$

$$= \left[a - \frac{A(Aa+Bb+C)}{A^2+B^2}\right] + \left[b - \frac{B(Bb+Aa+C)}{A^2+B^2}\right]i = (a+bi)+(A+Bi)\left(-\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right)$$

$$\longrightarrow z_H = z_M + z_{\vec{n}}\left(-\frac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}\right).$$

Xét $z = -\dfrac{z_{\vec{n}}.\overline{z_M}+C}{\left|z_{\vec{n}}\right|^2} = -\dfrac{(A+Bi)(a-bi)+C}{\left(\sqrt{A^2+B^2}\right)^2} = -\dfrac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2} + \dfrac{Ab-Ba}{A^2+B^2}i \to z$ là một số phức có phần thực $\Re(z) = -\dfrac{Aa+Bb+C}{A^2+B^2}$.

Vậy dạng phức hóa của điểm H là $\boxed{z_H = z_M + z_{\vec{n}}.\Re(z)}$ với $z = -\dfrac{z_{\vec{n}}.\overline{z_M}+C}{\left|z_{\vec{n}}\right|^2}$.

Dạng phức hóa của điểm M' là $\boxed{z_{M'} = 2z_H - z_M} \longrightarrow M'$.

STUDY TIPS

Để tìm đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Δ, tức $Đ_\Delta(d) = d'$. Ta lấy trên d hai điểm tùy ý M, N. Sau đó, tìm M', N' sao cho $\begin{cases} Đ_\Delta(M) = M' \\ Đ_\Delta(N) = N' \end{cases}$. Khi đó phương trình đường thẳng d' chính là phương trình của $M'N'$.

4. Phép đối xứng tâm

Định nghĩa: Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I. Kí hiệu $Đ_I$. Điểm I được gọi là tâm đối xứng.

Như vậy, $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

Dạng 1: Tìm điểm $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm $I(a;b)$.

Ta có $M(x;y) \to z_M = x + yi$ và $I(a;b) \to z_I = a + bi$

Do $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = -(x-a) \\ y' - b = -(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

$\to M'(2a - x; 2b - y) \to z_{M'} = (2a - x) + (2b - y)i = 2(a + bi) - (x + yi)$

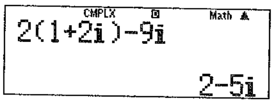
Vậy $\boxed{z_{M'} = 2z_I - z_M}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $M(0;9)$ và $I(1;2)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng $Đ_I$.

Lời giải

Ta có $M(0;9) \to z_M = 0 + 9i = 9i$ và $I(1;2) \to z_I = 1 + 2i$.

Suy ra $z_{M'} = 2z_I - z_M = 2(1 + 2i) - 9i$.



Đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Nhập vào máy $2(1+2i)-9i$, ấn 2 (1 + 2 ENG) − 9 ENG. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2 - 5i$.

Vậy $z_{M'} = 2 - 5i \to M'(2;-5)$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng $\Delta': A'x + B'y = C'$ là ảnh của đường thẳng $\Delta: Ax + By = C$ qua phép đối xứng tâm $I(a;b)$.

Lấy điểm $M(x;y) \in \Delta$. Gọi $M'(x';y') = Đ_I(M) \to \begin{cases} x' - a = -(x-a) \\ y' - b = -(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$

$\to M(2a - x'; 2b - y')$.

Do $M \in \Delta$ nên $A(2a - x') + B(2b - y') = C \Leftrightarrow Ax' + By' = 2(Aa + Bb) - C$.

Ta có $\begin{cases} Đ_I(M) = M' \\ Đ_I(\Delta) = \Delta' \\ M \in \Delta \end{cases} \to M'(x';y') \in \Delta' \to \Delta': Ax + By = 2(Aa + Bb) - C$

$\longrightarrow \boxed{C' = 2(Aa + Bb) - C = 2\overrightarrow{OI}.\vec{n} - C}$ với $\vec{n}$ là vec-tơ pháp tuyến của Δ.

Xét $\overline{z_I}.z_{\vec{n}} = (a - bi)(A + Bi) = Aa + Bb + (Ba - Ab)i \to \Re(\overline{z_I}.z_{\vec{n}}) = Aa + Bb$.

Vậy $\boxed{C' = 2\overrightarrow{OI}.\vec{n} - C = 2.\Re(\overline{z_I}.z_{\vec{n}}) - C}$.

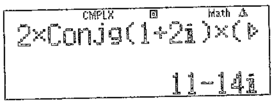
Trên máy tính, ta đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Sau đó nhập $2 \times \text{Conjg}(z_I) \times z_{\vec{n}} - C$ và được kết quả là một số phức z, khi đó $C' = \Re(z)$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $d: 3x-y+9=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng $Đ_I$.

Lời giải

Ta có $d: 3x-y+9=0 \Leftrightarrow 3x-y=-9 \longrightarrow C=-9$ và $\begin{cases} I(1;2) \\ \vec{n_d}=\vec{n}=(3;-1) \end{cases} \to \begin{cases} z_I=1+2i \\ z_n=3-i \end{cases}$

Đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Nhập vào máy $2\times \text{Conjg}(1+2i)\times(3-i)-(-9)$, ấn 2 × SHIFT 2 2 1 + 2 ENG) × (3 − ENG) − (− 9). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $11-4i=z \to \Re(z)=11=C'$.



Vậy phương trình $d': 3x-y=11 \Leftrightarrow 3x-y-11=0$.

Dạng 3: Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm J, bán kính R qua phép đối xứng tâm $I(a;b)$.

Gọi J' và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').

Ta có $Đ_I(C)=(C') \to \begin{cases} R'=R \\ Đ_I(J)=J' \end{cases} \longrightarrow \boxed{z_{J'}=2z_I-z_J} \to J'$.

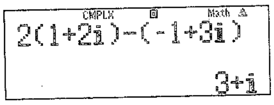
Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-6y+6=0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm I.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $J(-1;3)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $Đ_I(C)=(C') \to \begin{cases} R'=R=2 \\ Đ_I(J)=J' \end{cases} \longrightarrow z_{J'}=2z_I-z_J$, mà $\begin{cases} z_I=1+2i \\ z_J=-1+3i \end{cases}$

Đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Nhập vào máy $2(1+2i)-(-1+3i)$, ấn 2 (1 + 2 ENG) − (− 1 + 3 ENG). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $3+i$. Vậy $z_{J'}=3+i \to J'(3;1)$.



Phương trình đường tròn $(C'): (x-3)^2+(y-1)^2=4$.

5. Phép quay

Định nghĩa: Cho điểm O và góc lượng giác φ. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM'=OM$ và góc lượng giác (OM,OM') bằng φ được gọi là phép quay tâm O góc φ.

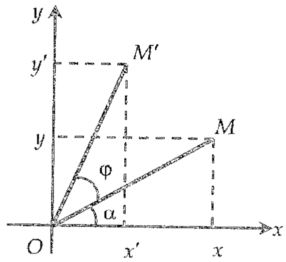
Điểm O được gọi là tâm quay, góc φ được gọi là góc quay của phép quay đó.

Phép quay tâm O góc φ thường được kí hiệu là $Q_{(O,\varphi)}$.

CHÚ Ý

Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác, tức là ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

Dạng 1: Tìm điểm $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay φ.



Đặt $OM = r$ và $(Ox,OM) = \alpha$. Suy ra $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \to M(r\cos\alpha; r\sin\alpha)$.

Ta có $Q_{(O,\varphi)}(M) = M' \to \begin{cases} OM' = OM = r \\ (Ox,OM') = \alpha + \varphi \end{cases} \to \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y' = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$

$\to \begin{cases} x' = r(\cos\alpha.\cos\varphi - \sin\alpha.\sin\varphi) = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

$\to z_{M'} = x' + y'.i = (x\cos\varphi - y\sin\varphi) + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)i$

$= (x\cos\varphi + x\sin\varphi.i) + (y\sin\varphi.i^2 + y\cos\varphi.i)$

$= x(\cos\varphi + i.\sin\varphi) + yi(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = (x+yi)(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$

Vậy $\boxed{z_{M'} = z_M.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = z_M.(1\angle\varphi)}$

Trong máy tính casio (hay vinacal), ta đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2 và nhập vào máy $(a+bi)\times(1\angle\varphi)$. Ấn =, máy hiện kết quả

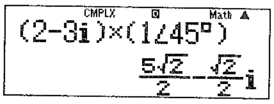
CHÚ Ý

Trong máy tính, dạng lượng giác của số phức $(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$ được kí hiệu là $z = r\angle\varphi$. Để nhập kí tự $(\angle)$ vào máy, trong chế độ CMPLX ta ấn SHIFT (−)

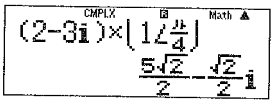
Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, tìm điểm M' là ảnh của điểm $M(2;-3)$ qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay $\varphi = 45^0$.

Lời giải

Đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2.



Nếu máy đang ở chế độ Deg: SHIFT MODE 3 thì ta nhập vào $(2-3i)\times(1\angle45)$, ấn (2 − 3 ENG) × (1 SHIFT (−) 4 5). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{5\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i \to z_{M'} = \frac{5\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i \to M'\left(\frac{5\sqrt2}{2}; -\frac{\sqrt2}{2}\right)$.



Nếu máy đang ở chế độ Rad: SHIFT MODE 4 thì ta nhập vào $(2-3i)\times\left(1\angle\frac{\pi}{4}\right)$, ấn (2 − 3 ENG) × (1 SHIFT (−) ▭ SHIFT ×10ˣ ▽ 4 ▷). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{5\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i \to z_{M'} = \frac{5\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}i \to M'\left(\frac{5\sqrt2}{2}; -\frac{\sqrt2}{2}\right)$.

Dạng 2: Tìm điểm $M(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép quay tâm $I(a;b)$, góc quay φ.

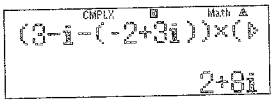
Công thức tính dạng phức hóa của điểm $M'(x';y')$: $\boxed{z_{M'} = (z_M - z_I)\times(1\angle\varphi) + z_I}$.

Cách chứng minh công thức này sẽ được đề cập đến tại phần đọc thêm ngay dưới đây.

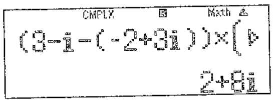
Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M' là ảnh của điểm $M(3;-1)$ qua phép quay tâm $I(-2;3)$, góc quay $\varphi = 90^0$.

Lời giải

Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2].



Nếu máy đang ở chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3] thì ta nhập vào máy tính $\left(3-i-\left(-2+3i\right)\right)\times\left(1\angle 90\right)+\left(-2+3i\right)$, ấn [(] [3] [−] [ENG] [−] [(] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)] [)] [×] [(] [1] [SHIFT] [(−)] [9] [0] [)] [+] [(] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2+8i\rightarrow z_{M'}=2+8i\rightarrow M'\left(2;8\right)$.

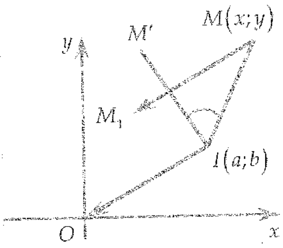


Nếu máy đang ở chế độ Rad: [SHIFT] [MODE] [4] thì ta nhập vào máy tính $\left(3-i-\left(-2+3i\right)\right)\times\left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)+\left(-2+3i\right)$, ấn [(] [3] [−] [ENG] [−] [(] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)] [)] [×] [(] [1] [SHIFT] [(−)] [▭/▭] [SHIFT] [×10^x] [▼] [2] [▶] [)] [+] [(] [(−)] [2] [+] [3] [ENG] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2+8i\rightarrow z_{M'}=2+8i\rightarrow M'\left(2;8\right)$.

ĐỌC THÊM: Công thức tổng quát của phép quay dạng phức hóa

> Tìm điểm $M\left(x';y'\right)$ là ảnh của điểm $M\left(x;y\right)$ qua phép quay tâm $I\left(a;b\right)$, góc quay φ.

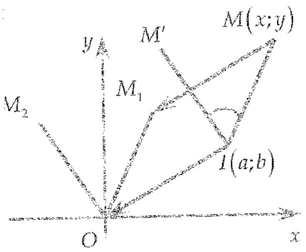


Phép quay tâm $I\left(a;b\right)$, góc quay φ biến điểm M thành điểm M' là hợp bởi ba phép dời hình dưới đây:

* Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{IO}}$ biến điểm M thành M_1

Ta có $T_{\overrightarrow{IO}}\left(M\right)=M_1\Leftrightarrow\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{IO}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M_1}-x=0-a\\y_{M_1}-y=0-b\end{cases}\rightarrow M_1\left(x-a;y-b\right)$

$\rightarrow z_{M_1}=\left(x-a\right)+\left(y-b\right)i=\left(x+yi\right)-\left(a+bi\right)=z_M-z_I$.



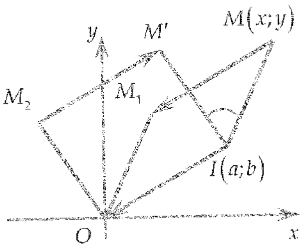
* Phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ biến điểm M_1 thành M_2

Ta có $Q_{(O,\varphi)}\left(M_1\right)=M_2$ nên $z_{M_2}=z_{M_1}\times\left(1\angle\varphi\right)$

Mà $z_{M_1}=z_M-z_I$ nên $z_{M_2}=\left(z_M-z_I\right)\times\left(1\angle\varphi\right)$.

* Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{OI}}$ biến điểm M_2 thành điểm M'

Ta có $T_{\overrightarrow{OI}}\left(M_2\right)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{M_2M'}=\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}-x_{M_2}=a\\y_{M'}-y_{M_2}=b\end{cases}\rightarrow M'\left(x_{M_2}+a;y_{M_2}+b\right)$



$\rightarrow z_{M'}=\left(x_{M_2}+a\right)+\left(y_{M_2}+b\right)i=\left(x_{M_2}+y_{M_2}i\right)+\left(a+bi\right)=z_{M_2}+z_I$

$\rightarrow z_{M'}=\left(z_M-z_I\right)\times\left(1\angle\varphi\right)+z_I$.

Vậy $\boxed{z_{M'}=\left(z_M-z_I\right)\times\left(1\angle\varphi\right)+z_I}$.

6. Phép vị tự

> **Định nghĩa:** Cho điểm O và số $k\neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k. Kí hiệu là $V_{(O,k)}$.

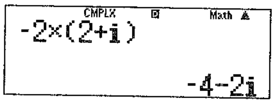
> Dạng 1: Tìm tọa độ $M'\left(x';y'\right)$ là ảnh của điểm $M\left(x;y\right)$ qua phép vị tự tâm $O\left(0;0\right)$, tỉ số $k\neq 0$.

Ta có $V_{(O,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \to M'(kx;ky)$

$\longrightarrow z_{M'}=kx+ky.i=k(x+yi) \longrightarrow \boxed{z_{M'}=k.z_M}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;1)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k=-2$.

Lời giải



Ta có $V_{(O,-2)}(M)=M' \longrightarrow z_{M'}=-2.z_M=-2(2+i)$. Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2]. Nhập vào máy $-2\times(2+i)$, ấn [(-)] [2] [×] [(] [2] [+] [ENG] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-4-2i \to z_{M'}=-4-2i$. Vậy $M'(-4;-2)$.

Dạng 2: Tìm tọa độ $M'(x';y')$ là ảnh của điểm $M(x;y)$ qua phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số $k\neq 0$.

Ta có $V_{(I,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \end{cases}$

$\longrightarrow z_{M'}=[kx+(1-k)a]+[ky+(1-k)b]i=k(x+yi)+(1-k)(a+bi)$

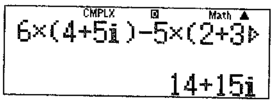
$\longrightarrow \boxed{z_{M'}=kz_M+(1-k)z_I}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(2;3)$ và điểm $M(4;5)$. Tìm tọa độ của điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm I, tỉ số $k=6$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} z_M=4+5i \\ z_I=2+3i \\ k=6 \end{cases}$.

Do $V_{(I,6)}(M)=M'$ nên $z_{M'}=6z_M+(1-6)z_I=6(4+5i)-5(2+3i)$.



Đưa máy về chế độ CMPLX: [MODE] [2]. Nhập vào máy $6\times(4+5i)-5\times(2+3i)$, ấn [6] [×] [(] [4] [+] [5] [ENG] [)] [−] [5] [×] [(] [2] [+] [3] [ENG] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $14+15i \to z_{M'}=14+15i \to M'(14;15)$.

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng $\Delta': A'x+B'y=C'$ là ảnh của đường thẳng $\Delta: Ax+By=C$ qua phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k\neq 0$.

Lấy $M(x;y)\in\Delta$. Gọi $M'(x';y')=V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'}{k} \\ y=\dfrac{y'}{k} \end{cases}$

$\longrightarrow M\left(\dfrac{x'}{k};\dfrac{y'}{k}\right)$. Do $M\in\Delta$ nên $A.\dfrac{x'}{k}+B.\dfrac{y'}{k}=C \Leftrightarrow Ax'+By'=kC$.

Do $\begin{cases} V_{(O,k)}(\Delta)=\Delta' \\ V_{(O,k)}(M)=M' \\ M\in\Delta \end{cases} \longrightarrow M'\in\Delta' \longrightarrow \Delta': Ax+By=kC \to \boxed{C'=kC}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x+3y=4$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k=5$.

Lời giải

Ta có $C=4 \to$ Phương trình $\Delta': 2x+3y=5.4 \Leftrightarrow 2x+3y-20=0$.

Dạng 4: Viết phương trình đường thẳng $\Delta': A'x+B'y=C'$ là ảnh của đường thẳng $\Delta: Ax+By=C$ qua phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số $k \neq 0$.

Lấy $M(x;y)\in\Delta$. Gọi $M'(x';y')=V_{(I,k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(y-b) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'-(1-k)a}{k} \\ y=\dfrac{y'-(1-k)b}{k} \end{cases} \to M\left(\dfrac{x'-(1-k)a}{k};\dfrac{y'-(1-k)b}{k}\right).$$

Do $M\in\Delta$ nên $A.\dfrac{x'-(1-k)a}{k}+B.\dfrac{y'-(1-k)b}{k}=C$

$\Leftrightarrow Ax'+By'=kC+(1-k)(Aa+Bb)$.

Do $\begin{cases} V_{(I,k)}(\Delta)=\Delta' \\ V_{(I,k)}(M)=M' \\ M\in\Delta \end{cases} \longrightarrow M'\in\Delta' \longrightarrow \Delta': Ax+By=kC+(1-k)(Aa+Bb)$

$\to \boxed{C'=kC+(1-k)(Aa+Bb)=kC+(1-k).\overrightarrow{OI}.\vec{n}}$

Xét $\overline{z_I}.z_{\vec{n}}=(a-bi)(A+Bi)=Aa+Bb+(Ba-Ab)i \to \Re\left(\overline{z_I}.z_{\vec{n}}\right)=Aa+Bb$.

Vậy $\boxed{C'=kC+(1-k).\overrightarrow{OI}.\vec{n}=kC+(1-k).\Re\left(\overline{z_I}.z_{\vec{n}}\right)}$.

Trên máy tính, ta đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Sau đó nhập $kC+(1-k)\times\text{Conjg}(z_I)\times z_{\vec{n}}$, thu được kết quả là một số phức z. Khi đó $C'=\Re(z)$

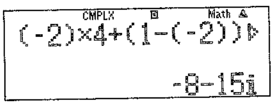
Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $d: 2x+y-4=0$ qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$, tỉ số $k=-2$.

Lời giải

Ta có $d: 2x+y-4=0 \Leftrightarrow 2x+y=4 \to C=4, k=-2$.

Phương trình đường thẳng d' có dạng $2x+y=C' \to C'=\Re(z)$ với $z=kC+(1-k)\overline{z_I}.z_{\vec{n}}$.

Đưa máy về chế độ CMPLX: MODE 2. Nhập vào máy $(-2)\times4+(1-(-2))\times\text{Conjg}(-1+2i)\times(2+i)$, ấn ((−) 2) × 4 + (1 − ((−) 2)) × SHIFT 2 2 (−) 1 + 2 ENG) × (2 + ENG). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $-8-15i \to z=-8-15i \to \Re(z)=-8=C'$.



Vậy phương trình $d': 2x+y=-8 \Leftrightarrow 2x+y+8=0$.

Dạng 5: Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm J, bán kính R qua phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k \neq 0$.

Gọi J' và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').

Do $V_{(O,k)}(C)=(C') \to V_{(O,k)}(J)=J'$. Suy ra $\overrightarrow{OJ'}=k\overrightarrow{OJ} \to \boxed{z_{J'}=kz_J}$.

Lấy điểm $M(x;y)\in(C)$. Gọi $M'(x';y')=V_{(O,k)}(M) \to M'\in(C')$ và $J'M'=R'$.

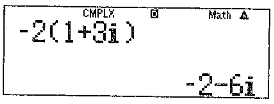
Do $V_{(O,k)}(M)=M' \to \overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$. Từ đó, $\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OJ'}=k\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OJ}\right)$

$\longrightarrow \overrightarrow{J'M'}=k.\overrightarrow{JM} \longrightarrow J'M'=|k|.JM$ hay $\boxed{R'=|k|.R}$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ qua phép vị tự $V_{(O,-3)}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $J(1;3)$ và bán kính $R=2$. Gọi J',R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').



Ta có $V_{(O,-2)}(C)=(C') \to \begin{cases} z_{J'}=-2z_J=-2(1+3i)=-2-6i \\ R'=|k|.R=3.2=6 \end{cases} \to \begin{cases} J'(-2;-6) \\ R=6 \end{cases}$

Vậy phương trình $(C'):(x+2)^2+(y+6)^2=36$.

Dạng 6: Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) tâm J, bán kính R qua phép vị tự tâm $I(a;b)$, tỉ số $k \neq 0$.

Gọi J' và R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').

Do $V_{(I,k)}(C)=(C') \to V_{(I,k)}(J)=J'$. Suy ra $\boxed{z_{J'}=kz_J+(1-k)z_I}$ **(Dạng 2)**

Lấy điểm $M(x;y)\in(C)$. Gọi $M'(x';y')=V_{(I,k)}(M) \to M'\in(C')$ và $J'M'=R'$.

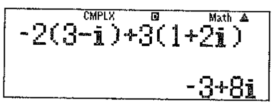
Do $\begin{cases} V_{(I,k)}(M)=M' \\ V_{(I,k)}(J)=J' \end{cases} \to \begin{cases} \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IJ'}=k\overrightarrow{IJ} \end{cases} \to \overrightarrow{IM'}-\overrightarrow{IJ'}=k\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IJ}\right) \to \overrightarrow{J'M'}=k\overrightarrow{JM}$.

$\longrightarrow J'M'=|k|.JM$ hay $\boxed{R'=|k|.R}$.

Ví dụ: Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=9$ qua phép vị tự tâm $I(1;2)$, tỉ số $k=-2$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $J(3;-1)$, bán kính $R=3$. Gọi J',R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C').



Ta có $V_{(I,-2)}(C)=(C') \to \begin{cases} z_{J'}=kz_J+(1-k)z_I=-2(3-i)+3(1+2i)=-3+8i \\ R'=|k|.R=|-2|.3=6 \end{cases}$

$\to J'(-3;8)$. Vậy phương trình $(C'):(x+3)^2+(y-8)^2=36$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Phép tịnh tiến

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(1;3)$ biến điểm $A(2;1)$ thành điểm mào trong các điểm sau

A. $A'(2;1)$ B. $A'(1;3)$

C. $A'(3;4)$ D. $A'(-3;-4)$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(1;2)$ và điểm $A(2;5)$. Ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là

A. $(1;6)$ B. $(3;1)$ C. $(3;7)$ D. $(4;7)$

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(2;1)$ và điểm $A(4;5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau đây qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$?

A. $(1;6)$ B. $(2;4)$ C. $(4;7)$ D. $(3;1)$

Câu 4: Cho ΔABC có $A(2;4), B(5;1), C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Tọa độ trọng tâm của $\Delta A'B'C'$ là

A. $(-4;2)$ B. $(-4;-2)$ C. $(4;-2)$ D. $(4;2)$

Câu 5: Biết điểm $M'(-3;0)$ là ảnh của $M(1;-2)$ qua $T_{\vec{u}}$, điểm $M''(2;3)$ là ảnh của điểm M' qua $T_{\vec{v}}$. Tọa độ $\vec{u}+\vec{v}$ bằng

A. $(3;-1)$ B. $(-1;3)$ C. $(-2;-2)$ D. $(1;5)$

Câu 6: Trong hệ trục Oxy, cho $\vec{u}=(-2;3)$ và điểm $E(2;1)$. Điểm $B=T_{2\vec{u}}(E)$ thì

A. $B(-6;5)$ B. $B(0;4)$ C. $B(7;-2)$ D. $B(-2;7)$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+1=0$. Để phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vec-tơ nào sau đây?

A. $\vec{v}=(2;1)$ B. $\vec{v}=(1;2)$

C. $\vec{v}=(-1;2)$ D. $\vec{v}=(2;-1)$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(1;3)$. Phép tịnh tiến theo vec-tơ này biến đường thẳng $d: 3x+5y-8=0$ thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $3x+2y=0$ B. $3x+5y-26=0$

C. $3x+5y-9=0$ D. $5x+3y-10=0$

Câu 9: Trong các phép tịnh tiến theo các vec-tơ sau, phép tịnh tiến theo vec-tơ nào biến đường thẳng $d: 9x-7y+10=0$ thành chính nó?

A. $\vec{v}=(7;9)$ B. $\vec{v}=(-7;-9)$

C. Không tồn tại $\vec{v}$ D. A và B đúng

Câu 10: Đường thẳng d_1 cắt Ox tại $A(-4;0)$, cắt Oy tại $B(0;2)$. Lập phương trình đường thẳng d_2 là ảnh của d_1 theo phép tịnh tiến $\vec{v}=(0;3)$

A. $d_2: x-2y-10=0$ B. $d_2: x+2y-10=0$

C. $d_2: x-2y+10=0$ D. $d_2: x+2y+10=0$

Câu 11: Cho $\vec{v}=(3;3)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ là (C') có phương trình

A. $(x-4)^2+(y-1)^2=4$

B. $(x-4)^2+(y-1)^2=9$

C. $(x+4)^2+(y+1)^2=9$

D. $x^2+y^2+8x+2y-4=0$

Câu 12: Phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(1;-3)$ biến đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-1=0$ thành đường tròn có phương trình

A. $(x-2)^2+(y+5)^2=6$ B. $(x-2)^2+(y-1)^2=16$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2=6$ D. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

Câu 13: Cho đường tròn $(C): (x+1)^2+(y-2)^2=4$. Tìm $(C')=T_{\vec{u}}((C))$ biết $\vec{u}=(1;-3)$

A. $(C'): (x-1)^2+(y-1)^2=4$

B. $(C'): x^2+(y+1)^2=4$

C. $(C'): x^2+(y-1)^2=4$

C. $(C'): (x+1)^2+(y+1)^2=4$

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-8)^2+(y-3)^2=7$. Ảnh (C') của đường tròn đó qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(5;7)$ là

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=7$ B. $(x-13)^2+(y-10)^2=7$

C. $(x-7)^2+(y-5)^2=7$ D. $(x-3)^2+(y+4)^2=7$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh (C') của đường tròn $(C): (x-2)^2+(y-1)^2=16$ qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(1;3)$ là đường tròn có phương trình

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ B. $(x+2)^2+(y+1)^2=16$

C. $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ D. $(x+3)^2+(y+4)^2=16$

2. Phép đối xứng trục

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy, qua phép đối xứng trục Oy, điểm $A(3;5)$ biến thành điểm nào trong các điểm sau

A. $A'(3;5)$ B. $A'(-3;5)$
C. $A'(3;-5)$ D. $A'(-3;-5)$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;3)$. Điểm nào sau đây là ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$

A. $(3;2)$ B. $(-2;3)$ C. $(2;-3)$ D. $(3;-2)$

Câu 18: Trong hệ trục Oxy, cho đường thẳng $d: x+y+1=0$. Gọi $d'=Đ_{Ox}(d)$ thì phương trình đường thẳng d' là

A. $x+y=0$ B. $x-y=0$
C. $x-y+1=0$ D. $x-y-1=0$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): x^2=4y$. Hỏi parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Ox?

A. $x^2=4y$ B. $x^2=-4y$
C. $y^2=4x$ D. $y^2=-4x$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): x^2=24y$. Hỏi parabol nào là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy?

A. $x^2=24y$ B. $x^2=-24y$
C. $y^2=24x$ D. $y^2=-24x$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2=x$. Hỏi parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy?

A. $y^2=x$ B. $y^2=-x$ C. $x^2=y$ D. $x^2=-y$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2=-12x$. Hỏi parabol nào là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Ox?

A. $x^2=12y$ B. $x^2=-12y$
C. $y^2=12x$ D. $y^2=-12x$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(C'): (x-3)^2+y^2=4$. Viết phương trình trục đối xứng của (C) và (C')

A. $y=x+1$ B. $y=x-1$
C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+6y=0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Ox. Phương trình (C') là

A. $x^2+y^2-4x+6y=0$ B. $x^2+y^2-4x-6y=0$
C. $x^2+y^2+4x-6y=0$ D. $x^2+y^2+4x+6y=0$

Câu 25: Trong hệ trục Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+6y=0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Oy. Phương trình (C') là

A. $x^2+y^2-4x+6y=0$ B. $x^2+y^2-4x-6y=0$
C. $x^2+y^2+4x-6y=0$ D. $x^2+y^2+4x+6y=0$

3. Phép đối xứng tâm

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $A(5;3)$ qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$ là

A. $A'(5;3)$ B. $A'(-5;-3)$
C. $A'(3;-1)$ D. $A'(-3;1)$

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $A(3;2)$ qua phép đối xứng tâm O là

A. $(-3;2)$ B. $(2;3)$ C. $(-3;-2)$ D. $(2;-3)$

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x=2$. Đường thẳng nào sau đây là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$?

A. $y=2$ B. $y=-2$ C. $x=2$ D. $x=-2$

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+4=0$. Đường thẳng nào sau đây có ảnh là d qua phép đối xứng tâm $I(4;1)$?

A. $x-y+2=0$ B. $x-y-10=0$
C. $x-y-8=0$ D. $x-y+6=0$

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $d: x+y-2=0$ qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$

A. $x+y+4=0$ B. $x+y-4=0$
C. $x-y+4=0$ D. $x-y-4=0$

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$

A. $(x-2)^2+y^2=1$ B. $(x+2)^2+y^2=1$
C. $x^2+(y-2)^2=1$ D. $x^2+(y+2)^2=1$

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): (x-3)^2+(y+1)^2=9$ qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$

A. $(x-3)^2+(y+1)^2=9$ B. $(x+3)^2+(y+1)^2=9$
C. $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ D. $(x+3)^2+(y-1)^2=9$

Câu 33: Cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ và $(C'): (x-4)^2+(y-2)^2=1$. Tìm tọa độ của tâm đối xứng biến (C) thành (C')

A. $I(2;1)$ B. $I(-2;-1)$

C. $I(8;4)$ D. $I(-8;-4)$

Câu 34: Viết phương trình parabol (P') là ảnh của parabol $(P): y^2=x$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$

A. $y^2=x-2$ B. $y^2=-x+2$

C. $y^2=-x-2$ D. $y^2=x+2$

Câu 35: Viết phương trình elip (E') là ảnh của elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$

A. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ B. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

C. $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ D. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

4. Phép quay

Câu 36: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

A. $A'(0;-3)$ B. $A'(0;3)$

C. $A'(-3;0)$ D. $A'(2\sqrt{3};2\sqrt{3})$

Câu 37: Phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 90° biến điểm $A(0;-5)$ thành điểm A' có tọa độ

A. $(-5;0)$ B. $(5;0)$ C. $(2;3)$ D. $(3;0)$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của điểm $M(3;4)$ qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$ là

A. $M'\left(\frac{7\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

C. $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $M'\left(\frac{7\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 39: Phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay 90^0 biến đường thẳng $d: x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình

A. $x+y-3=0$ B. $x+y+1=0$

C. $x-y+3=0$ D. $x+y+6=0$

Câu 40: Phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay -360° biến đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+1=0$ thành đường tròn có phương trình

A. $x^2+y^2+4x+1=0$ B. $x^2+y^2-4x-1=0$

C. $x^2+y^2+4x-1=0$ D. $x^2+y^2-4x+1=0$

Câu 41: Phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay -90° biến đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+1=0$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2+(y-2)^2=3$ B. $x^2+(y+2)^2=9$

C. $x^2+(y+2)^2=5$ D. $x^2+(y+2)^2=3$

Câu 42: Phép quay tâm $I(4;-3)$ góc quay 180° biến đường thẳng $d: x+y-5=0$ thành đường thẳng có phương trình

A. $x-y+3=0$ B. $x+y+5=0$

C. $x+y+3=0$ D. $x+y-3=0$

Câu 43: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+4=0$. Hỏi d là ảnh của đường thẳng nào sau đây qua phép quay tâm $I(0;3)$, góc quay π

A. $2x+y-4=0$ B. $2x+2y-3=0$

C. $x-y+2=0$ D. $2x-2y+1=0$

Câu 44: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-3y+2=0$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là ảnh của d qua phép quay tâm $I(-2;0)$, góc quay π

A. $2x+y-4=0$ B. $2x-6y+4=0$

C. $x-3y+4=0$ D. $x-3y+1=0$

Câu 45: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phép quay Q biến điểm $A(-1;5)$ thành điểm $B(-3;-1)$.

A. $Q_{(O,90^\circ)}$ B. $Q_{(O,30^\circ)}$

C. $Q_{(I,90^\circ)}$ và $I(1;1)$ D. $Q_{(I,30^\circ)}$ và $I(1;1)$

5. Phép vị tự

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh B của điểm $A(2;7)$ qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$

A. $B(-2;-7)$ B. $B(-2;7)$

C. $B\left(1;\frac{7}{2}\right)$ D. $B(4;14)$

Câu 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của điểm $M(-2;4)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$

A. $(-4;-8)$ B. $(-8;4)$ C. $(4;-8)$ D. $(4;8)$

Câu 48: Cho đường thẳng d có phương trình $2x+y-3=0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ biến d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $2x+y+3=0$ B. $4x+2y-5=0$

C. $2x+y-6=0$ D. $4x-2y-3=0$

Câu 49: Cho đường thẳng d có phương trình $x+y-2=0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $2x+2y-4=0$ B. $x+y+4=0$

C. $4x+4y-5=0$ D. $x+y-4=0$

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(2;-1)$ và đường thẳng $d:2x+y-3=0$. Hỏi phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$ biến d thành đường thẳng nào?

A. $x+2y+3=0$ B. $4x-2y-6=0$

C. $2x+y-3=0$ D. $4x+2y-5=0$

Câu 51: Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=1$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$

A. $(x-4)^2+y^2=4$ B. $(x+4)^2+y^2=4$

C. $(x-4)^2+y^2=1$ D. $(x+4)^2+y^2=1$

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh của đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$ qua phép vị tự $V_{(I,-2)}$ với $I(1;2)$

A. $(x+3)^2+(y-8)^2=20$

B. $(x-2)^2-(y+3)^2=20$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=20$

D. $(x+3)^2+(y+8)^2=20$

6. Phép đồng dạng

Khi thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép dời hình (hoặc ngược lại) thì ta được kết quả là một phép đồng dạng

Câu 53: Cho điểm $M(2;4)$. Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến M thành điểm nào?

A. $(-1;2)$ B. $(-2;4)$ C. $(1;-2)$ D. $(1;2)$

Câu 54: Cho đường thẳng d có phương trình $2x-y=0$. Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào?

A. $2x+y=0$ B. $2x-y=0$

C. $4x-y=0$ D. $2x+y-2=0$

Câu 55: Cho đường thẳng $d:3x-y-3=0$. Tìm ảnh của d qua phép đồng dạng bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=2$ và phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(4;-1)$

A. $3x+y-17=0$ B. $3x-y-4=0$

C. $3x-y-17=0$ D. $3x+y-4=0$

Câu 56: Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự tâm $O(0;0)$, tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $90°$ sẽ biến (C) thành đường tròn

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ B. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ D. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

Câu 57: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $O(0;0)$ tỉ số $k=2$ và phép đối xứng qua Oy

A. $(x+2)^2+(y-4)^2=16$

B. $(x-2)^2+(y+4)^2=16$

C. $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

D. $(x+3)^2+(y-5)^2=4$

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(x-8)^2+(y-4)^2=4$. Ảnh của đường tròn qua việc thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(1;5)$ và phép quay tâm O góc $45°$ là

A. $(x-9\sqrt{2})^2+(y-9)^2=4$

B. $(x-9\sqrt{2})^2+y^2=4$

C. $x^2+(y-9\sqrt{2})^2=4$

D. $(x+9)^2+(y-9)^2=4$

Câu 59: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(3;7)$. Ảnh của điểm M có được bằng việc thực hiện liên tiếp các phép đối xứng trục Ox, phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}=(1;3)$, phép đối xứng tâm O và phép quay tâm O một góc $-180°$ là

A. $(4;-4)$ B. $(-4;4)$ C. $(3;-7)$ D. $(-4;-4)$

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:x=2\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay $45°$.

A. $d':x+y-2=0$ B. $d':x-y+2=0$

C. $d':x+2y-3=0$ D. $d':x-2y+3=0$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Phép tịnh tiến

Câu 1: Đáp án C.

Ta có $T_{\vec{v}}(A)=A'$ nên $z_{A'}=z_A+z_{\vec{v}}=(2+i)+(1+3i)$

$\rightarrow z_{A'}=3+4i \rightarrow A'(3;4)$.

```
CMPLX  Math
(2+i)+(1+3i)
                3+4i
```

Câu 2: Đáp án C.

Ta có $T_{\vec{v}}(A)=A' \rightarrow z_{A'}=z_A+z_{\vec{v}}=(2+5i)+(1+2i)$

$\rightarrow z_{A'}=3+7i \rightarrow A'(3;7)$.

```
CMPLX  Math
(2+5i)+(1+2i)
                3+7i
```

Câu 3: Đáp án B.

Ta có $T_{\vec{v}}(B)=A \rightarrow z_A=z_B+z_{\vec{v}} \rightarrow z_B=z_A-z_{\vec{v}}$

$\rightarrow z_B=(4+5i)-(2+i)=2+4i \rightarrow B(2;4)$.

```
CMPLX  Math
(4+5i)-(2+i)
                2+4i
```

Câu 4: Đáp án B.

Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$

Do $T_{\overrightarrow{BC}}(\Delta ABC)=\Delta A'B'C' \rightarrow T_{\overrightarrow{BC}}(G)=G'$

$\rightarrow z_{G'}=z_G+z_{\overrightarrow{BC}}=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}+z_C-z_B$

$\rightarrow z_{G'}=\dfrac{(2+4i)+(5+i)+(-1-2i)}{3}+(-1-2i)-(5+i)$

$\rightarrow z_{G'}=-4-2i \rightarrow G'(-4;-2)$.

```
CMPLX  Math
(2+4i)+(5+i)+(-▷
       3
                -4-2i
```

Câu 5: Đáp án D.

Ta có $T_{\vec{u}}(M)=M' \rightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec{u}} \rightarrow z_{\vec{u}}=z_{M'}-z_M$;

$T_{\vec{v}}(M')=M'' \rightarrow z_{M''}=z_{M'}+z_{\vec{v}} \rightarrow z_{\vec{v}}=z_{M''}-z_{M'}$.

Có $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}=(z_{M'}-z_M)+(z_{M''}-z_{M'})=z_{M''}-z_M$

$\rightarrow z_{\vec{u}+\vec{v}}=(2+3i)-(1-2i)=1+5i \rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(1;5)$.

```
CMPLX  Math
(2+3i)-(1-2i)
                1+5i
```

Câu 6: Đáp án D.

Ta có $T_{2\vec{u}}(E)=B \rightarrow z_B=z_E+z_{2\vec{u}}=z_E+2z_{\vec{u}}$

$\rightarrow z_B=(2+i)+2(-2+3i)=-2+7i \rightarrow B(-2;7)$.

```
CMPLX  Math
(2+i)+2(-2+3i)
                -2+7i
```

Câu 7: Đáp án B.

$d: 2x-y+1=0 \rightarrow 2x-y=-1 \rightarrow C=-1$

Gọi đường thẳng $d'=T_{\vec{v}}(d) \rightarrow d': 2x-y=C'$.

Để $d=T_{\vec{v}}(d)$ thì d' trùng với d.

Ta có $C'=\Re(z)$ với $z=C+\text{conjg}(z_{\vec{v}})\times z_{\vec{n}}$

– *Phương án A:* Với $\vec{v}=(2;1)$, ta có

$z=-1+\text{Conjg}(2+i)\times(2-i)=2-4i$

```
CMPLX  Math
-1+Conjg(2+i)×(▷
                2-4i
```

$\rightarrow C'=\Re(z)=2 \rightarrow d': 2x-y=2$ không trùng với đường thẳng d. Loại A.

– *Phương án B:* Với $\vec{v}=(1;2)$, ta có

$z=-1+\text{Conjg}(1+2i)\times(2-i)=-1-5i$

```
CMPLX  Math
-1+Conjg(1+2i)×▷
                -1-5i
```

$\rightarrow C'=\Re(z)=-1 \rightarrow d': 2x-y=-1 \rightarrow d'$ trùng với đường thẳng d. Chọn B.

– *Phương án C:* Với $\vec{v}=(-1;2)$, ta có

$z=-1+\text{Conjg}(-1+2i)\times(2-i)=-5-3i$.

```
CMPLX  Math
-1+Conjg(-1+2i)▷
                -5-3i
```

$\rightarrow C'=\Re(z)=-5 \rightarrow d': 2x-y=-5$ không trùng với đường thẳng d. Loại C.

– *Phương án D:* Với $\vec{v}=(2;-1)$, ta có

$z=-1+\text{Conjg}(2-i)\times(2-i)=4$

```
CMPLX  Math
-1+Conjg(2-i)×(▷
                4
```

$\rightarrow C'=\Re(z)=4 \rightarrow d': 2x-y=4$ không trùng với đường thẳng d. Loại D.

Câu 8: Đáp án B.

Ta có $d: 3x+5y-8=0 \Leftrightarrow 3x+5y=8 \rightarrow C=8$.

Gọi $d'=T_{\vec{v}}(d) \rightarrow$ Phương trình d' có dạng

$3x+5y=C'$. Trong đó $C'=\Re(z)$ với

$z=C+\text{Conjg}(z_{\vec{v}})\times z_{\vec{n}}=8+\text{Conjg}(1+3i)\times(3+5i)$.

Sử dụng máy tính, ta tính được $z=26-4i$

```
8+Conjg(1+3i)×(▷
                26-4i
```

Suy ra $C' = \Re(z) = 26 \to d': 3x+5y = 26$ hay $d': 3x+5y-26=0$.

Câu 9: Đáp án D.

$d: 9x-7y+10=0 \Leftrightarrow 9x-7y=-10 \to C=-10$.

Gọi $d' = T_{\vec{v}}(d) \to d': 9x-7y=C'$. Để $d = T_{\vec{v}}(d)$ thì d' phải trùng với đường thẳng d, hay khi đó $C'=C$.

Trong đó $C' = \Re(z)$ và $z = C + \text{Conjg}(z_{\vec{v}}) \times z_{\vec{n}}$.

– *Phương án A:* Với $\vec{v}=(7;9)$ thì ta có

$z = -10 + \text{Conjg}(7+9i)\times(9-7i) = -10-130i$

```
-10+Conjg(7+9i)▷
           -10-130i
```

Suy ra $C' = \Re(z) = -10 = C$. Chọn A.

– *Phương án B:* Với $\vec{v}=(-7;-9)$ thì ta có

$z = -10 + \text{Conjg}(-7-9i)\times(9-7i) = -10+130i$.

```
-10+Conjg(-7-9i▷
           -10+130i
```

Suy ra $C' = \Re(z) = -10 = C$. Chọn B.

Câu 10: Đáp án C.

Ta có $T_{\vec{v}}(d_1)=d_2$. Giả sử $T_{\vec{v}}(A)=A'$ và $T_{\vec{v}}(B)=B'$ thì $A', B' \in d_2$.

$T_{\vec{v}}(A)=A' \to z_{A'} = z_A + z_{\vec{v}} = (-4+0i)+(0+3i) = -4+3i$ $\to A'(-4;3)$.

$T_{\vec{v}}(B)=B' \to z_{B'} = z_B + z_{\vec{v}} = (0+2i)+(0+3i) = 5i$ $\to B'(0;5)$.

Quan sát các đáp án, ta thấy chỉ có đường thẳng $x-2y+10=0$ đi qua hai điểm $A'(-4;3)$ và $B'(0;5)$ nên đây là phương trình của d_2.

Câu 11: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ vá bán kính $R=3$.

Đường tròn (C') có tâm I' và bán kính R'

Do $T_{\vec{v}}((C))=(C')$ nên $\begin{cases} R'=R=3 \\ T_{\vec{v}}(I)=I' \end{cases}$

$\to z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}} = (1-2i)+(3+3i) = 4+i \to I'(4;1)$.

```
(1-2i)+(3+3i)
                 4+i
```

Vậy $(C'): (x-4)^2+(y-1)^2=9$.

Câu 12: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $T_{\vec{v}}((C))=(C')$ nên $\begin{cases} R'=R=\sqrt{6} \\ T_{\vec{v}}(I)=I' \end{cases}$

$\to z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}} = (1-2i)+(1-3i) = 2-5i \to I'(2;-5)$.

```
(1-2i)+(1-3i)
                2-5i
```

Vậy $(C'): (x-2)^2+(y+5)^2=6$.

Câu 13: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=2$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $T_{\vec{u}}((C))=(C')$ nên $\begin{cases} R'=R=2 \\ T_{\vec{u}}(I)=I' \end{cases}$

$\to z_{I'} = z_I + z_{\vec{u}} = (-1+2i)+(1-3i) = -i \to I'(0;-1)$.

```
(-1+2i)+(1-3i)
                  -i
```

Vậy $(C'): x^2+(y+1)^2=4$.

Câu 14: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(8;3)$, bán kính $R=\sqrt{7}$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $T_{\vec{v}}((C))=(C')$ nên $\begin{cases} R'=R=\sqrt{7} \\ T_{\vec{v}}(I)=I' \end{cases}$

$\to z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}} = (8+3i)+(5+7i) = 13+10i \to I'(13;10)$

```
(8+3i)+(5+7i)
              13+10i
```

Vậy $(C'): (x-13)^2+(y-10)^2=7$.

Câu 15: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=4$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $T_{\vec{v}}((C))=(C')$ nên $\begin{cases} R'=R=4 \\ T_{\vec{v}}(I)=I' \end{cases}$

$\to z_{I'} = z_I + z_{\vec{v}} = (2+i)+(1+3i) = 3+4i \to I'(3;4)$.

```
(2+i)+(1+3i)
                3+4i
```

Vậy $(C'): (x-3)^2+(y-4)^2=16$.

2. Phép đối xứng trục

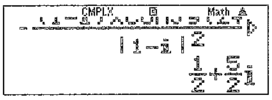
Câu 16: Đáp án B.

> **Tổng quát:** Qua phép đối xứng trục Oy, điểm $M(a;b)$ biến thành điểm $M'(-a;b)$.

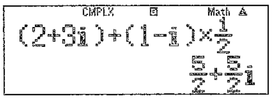
Câu 17: Đáp án A.

Xét số phức $z = -\dfrac{z_{\overline{n}}.\overline{z_M}}{\left|z_{\overline{n}}\right|^2}$.

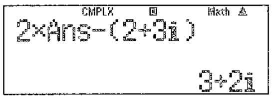
Nhập vào máy $-\dfrac{(1-i)\times \text{Conjg}(2+3i)}{|1-i|^2}$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i \to z = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}i \to \Re(z) = \frac{1}{2}$.



Suy ra $z_H = z_M + z_{\overline{n}}.\Re(z) = (2+3i)+(1-i)\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$



$\longrightarrow z_{M'} = 2z_H - z_M = 2\times \text{Ans} - (2+3i) = 3+2i$



Vậy $M'(3;2)$ là ảnh của điểm $M(2;3)$ qua đường thẳng $x-y=0$.

> **Tổng quát:** Điểm $M'(b;a)$ là ảnh của điểm $M(a;b)$ qua phép đối xứng trục $\Delta: x-y=0$.

Câu 18: Đáp án C.

Lấy hai điểm $A(0;-1)$ và $B(-1;0)$ thuộc $d: x+y+1=0$.

Ta có $\begin{cases} Đ_{Ox}(A) = A' \\ Đ_{Ox}(B) = B' \end{cases} \to \begin{cases} A'(0;1) \\ B'(-1;0) \end{cases}$ và $A', B' \in d'$.

Quan sát các đáp án, ta thấy chỉ có đường thẳng $x-y+1=0$ đi qua hai điểm $A'(0;1)$ và $B'(-1;0)$ nên phương trình $d': x-y+1=0$.

> **Tổng quát:** Qua phép đối xứng trục Ox, điểm $M(a;b)$ biến thành điểm $M'(a;-b)$.

Câu 19: Đáp án B.

Parabol $(P): x^2 = 4y$ đi qua điểm $M(2;1)$.

Ta có $Đ_{Ox}(M) = M' \to M'(2;-1)$. Quan sát 4 đáp án, chỉ có parabol $x^2 = -4y$ đi qua điểm $M'(2;-1)$.

Vậy $Đ_{Ox}((P)) = (P'): x^2 = -4y$.

Câu 20: Đáp án A.

Parabol $(P): x^2 = 24y$ đi qua điểm $M\left(2;\frac{1}{6}\right)$.

Ta có $Đ_{Oy}(M) = M' \to M'\left(-2;\frac{1}{6}\right)$. Quan sát 4 đáp án, chỉ có parabol $x^2 = 24y$ đi qua điểm M'.

Vậy $Đ_{Ox}((P)) = (P'): x^2 = 24y$.

Câu 21: Đáp án B.

Parabol $(P): y^2 = x$ đi qua điểm $(4;2)$.

Ta có $Đ_{Oy}(M) = M' \to M'(-4;2)$.

Quan sát 4 đáp án, chỉ có parabol $y^2 = -x$ đi qua điểm M'. Vậy $Đ_{Oy}((P)) = (P'): y^2 = -x$.

Câu 22: Đáp án D.

Parabol $(P): y^2 = -12x$ đi qua điểm $M(-3;6)$. Ta có $Đ_{Ox}(M) = M' \to M'(-3;-6)$. Quan sát 4 đáp án, chỉ có parabol $y^2 = -12x$ đi qua điểm M'.

Vậy $Đ_{Ox}((P)) = (P'): y^2 = -12x$.

Câu 23: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 2$.

Đường tròn (C') có tâm $I'(3;0)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $Đ_\Delta((C)) = (C') \to Đ_\Delta(I) = (I') \to \Delta$ là trung trực của $II' \to \Delta \perp II'$ và $M \in \Delta$ với M là trung điểm của II'.

Lại có $M(2;1)$ và $\overrightarrow{II'} = (2;-2)$. Quan sát các đáp án, chỉ có đường thẳng $\Delta: y = x-1$ thỏa mãn điều kiện $\Delta \perp II'$ và $M \in \Delta$.

Câu 24: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $Đ_{Ox}((C)) = (C') \to \begin{cases} Đ_{Ox}(I) = I' \\ R' = R = \sqrt{13} \end{cases} \to I'(2;3)$.

Vậy phương trình $(C'): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$.

Câu 25: Đáp án D.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $Đ_{Oy}((C)) = (C') \to \begin{cases} Đ_{Oy}(I) = I' \\ R' = R = \sqrt{13} \end{cases} \to I'(-2;-3)$.

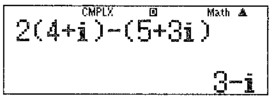
Vậy phương trình $(C'): (x+2)^2 + (y+3)^2 = 13$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$.

3. Phép đối xứng tâm

Câu 26: Đáp án C.

Gọi $A' = Đ_I(A) \to z_{A'} = 2z_I - z_A = 2(4+i) - (5+3i)$

$\to z_{A'} = 3 - i \to A'(3;-1)$.



Câu 27: Đáp án C.

> Tổng quát: Ảnh của điểm $M(a;b)$ qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$ là điểm $M'(-a;-b)$.

Câu 28: Đáp án D.

Ta có $d: x = 2 \to C = 2$ và $\vec{n} = (1;0) \to z_{\vec{n}} = 1 + 0i = 1$.

Gọi $d' = Đ_O(d) \to d': x = C'$ với $C' = \Re(z)$ và

$z = 2.\overline{z_O}.z_{\vec{n}} - C = -C = -2$ (do $z_O = 0 + 0i = 0$)

$\to C' = \Re(z) = -2$. Vậy $d': x = -2$.

> Tổng quát: Qua phép đối xứng tâm O, đường thẳng $Ax + By = C$ biến thành đường thẳng $Ax + By = -C$.

Câu 29: Đáp án B.

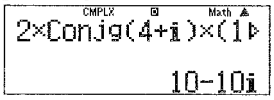
$d: x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow x - y = -4 \to C = -4$ và $\vec{n} = (1;-1)$

$\to z_{\vec{n}} = (1 - i)$.

Gọi $d' = Đ_I(d) \to d': x - y = C'$, trong đó $C' = \Re(z)$ và

$z = 2.\overline{z_I}.z_{\vec{n}} - C$.

Nhập vào máy $2 \times \text{Conjg}(4+i) \times (1-i) + 4$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $10 - 10i \to z = 10 - 10i$



$\to C' = \Re(z) = 10$. Vậy $d': x - y = 10 \Leftrightarrow x - y - 10 = 0$.

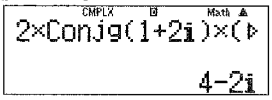
Câu 30: Đáp án B.

$d: x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 2 \to C = 2$ và $\vec{n} = (1;1)$

$\to z_{\vec{n}} = 1 + i$

Ta có $d' = Đ_I(d) \to d': x + y = C'$, trong đó $C' = \Re(z)$ và $z = 2.\overline{z_I}.z_{\vec{n}} - C$.

Nhập vào máy $2 \times \text{Conjg}(1+2i) \times (1+i) - 2$. Ấn ⊟, máy hiện kết quả bằng $4 - 2i \to z = 4 - 2i$.



Vậy $C' = \Re(z) = 4 \to d': x + y = 4 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$.

Câu 31: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$.

Đường tròn (C') có tâm O', bán kính R'.

Do $Đ_I((C)) = (C') \to \begin{cases} R' = R = 1 \\ Đ_I(O) = O' \end{cases} \to z_{O'} = 2z_I - z_0$

$\to z_{O'} = 2z_I = 2(1 + 0i) = 2 + 0i \to O'(2;0)$.

Vậy $(C'): (x-2)^2 + y^2 = 1$.

Câu 32: Đáp án D.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R = 3$.

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

Do $Đ_O((C)) = (C') \to \begin{cases} Đ_O(I) = I' \\ R' = R = 3 \end{cases} \to z_{I'} = 2z_0 - z_I = -z_I$

$\to z_{I'} = -(3 - i) = -3 + i \to I'(-3;1)$.

Vậy $(C'): (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Câu 33: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$.

Đường tròn (C') có tâm $M(4;2)$, bán kính $R = 1$.

Ta có $Đ_I((C)) = (C') \to Đ_I(O) = M$

$\to z_M = 2z_I - z_O = 2z_I \to z_I = \frac{1}{2}z_M = \frac{1}{2}(4 + 2i) = 2 + i$

Vậy $I(2;1)$ là tâm đối xứng.

Câu 34: Đáp án B.

Lấy điểm $M(4;2) \in (P)$. Gọi $M' = Đ_I(M)$, do $(P') = Đ_I((P))$ nên $M' \in (P')$.

Ta có $z_{M'} = 2z_I - z_M = 2(1 + 0i) - (4 + 2i) = -2 - 2i$

$\to M'(-2;-2)$. Quan sát 4 đáp án, ta thấy chỉ có parabol $y^2 = -x + 2$ đi qua điểm M'.

Vậy $(P'): y^2 = -x + 2$ là ảnh của (P) qua phép đối xứng $Đ_I$.

Câu 35: Đáp án B.

Lấy điểm $M(0;\sqrt{2}) \in (E)$. Gọi $M' = Đ_I(M)$, do $(E') = Đ_I((E))$ nên $M' \in (E')$.

Ta có $z_{M'} = 2z_I - z_M = 2(1 + 0i) - (0 + \sqrt{2}i) = 2 - \sqrt{2}i$.

$\to M'(2;-\sqrt{2})$. Quan sát 4 đáp án, ta thấy chỉ có elip $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ đi qua điểm M'.

Vậy $(E'): \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ là ảnh của elip (E) qua phép đối xứng $Đ_I$.

4. Phép quay

Câu 36: Đáp án B.

Ta có $Q_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}(A)=A'\rightarrow z_{A'}=z_A\times\left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow z_{A'}=(3+0i)\times\left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)=3i\rightarrow A'(0;3)$.

```
(3+0i)×(1∠π/2)
                3i
```

Chú ý: Trước khi sử dụng máy để tính $(3+0i)\times\left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)$, ta cần đưa máy về chế độ Rad: SHIFT MODE 4.

Câu 37: Đáp án B.

Ta có $Q_{(O;90^\circ)}(A)=A'\rightarrow z_{A'}=z_A\times(1\angle 90)$

$\rightarrow z_{A'}=(-5i)\times(1\angle 90)=5\rightarrow A'(5;0)$.

```
(-5i)×(1∠90)
                 5
```

Chú ý: Trước khi sử dụng máy để tính $(3+0i)\times\left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)$, ta cần đưa máy về chế độ Deg: SHIFT MODE 3.

Câu 38: Đáp án B.

Ta có $Q_{(O,45^\circ)}(M)=M'\rightarrow z_{M'}=z_M\times(1\angle 45)$

$\rightarrow z_{M'}=(3+4i)\times(1\angle 45)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i$

$\rightarrow M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

```
(3+4i)×(1∠45)
        -√2/2+7√2/2 i
```

Câu 39: Đáp án B.

Lấy hai điểm $A(0;1)$ và $B(-1;0)$ thuộc đường thẳng $d:x-y+1=0$.

Gọi $Q_{(O,90^\circ)}(A)=A'\rightarrow z_{A'}=z_A\times(1\angle 90)$

$\rightarrow z_{A'}=i\times(1\angle 90)=-1\rightarrow A'(-1;0)$

```
i×(1∠90)
                -1
```

Gọi $Q_{(O,90^\circ)}(B)=B'\rightarrow z_{B'}=z_B\times(1\angle 90)$

$\rightarrow z_{B'}=(-1)\times(1\angle 90)=-i\rightarrow B'(0;-1)$.

```
-1×(1∠90)
                -i
```

Do $Q_{(O,90^\circ)}(d)=d'\rightarrow A',B'\in d'\rightarrow d':x+y+1=0$.

Câu 40: Đáp án D.

Giả sử $Q_{(O,-360^\circ)}((C))=(C')$. Trong đó, đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ và (C') có tâm I', bán kính R'.

Suy ra $\begin{cases}R'=R=\sqrt{3}\\ Q_{(O,-360^\circ)}(I)=I'\end{cases}\rightarrow z_{I'}=z_I\times(1\angle -360)$

$\rightarrow z_{I'}=2\times(1\angle -360)=2\rightarrow I'(2;0)$.

```
2×(1∠-360)
                 2
```

Vậy $(C'):(x-2)^2+y^2=3\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+1=0$.

Câu 41: Đáp án D.

Giả sử $Q_{(O,-90^\circ)}((C))=(C')$. Trong đó, đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ và (C') có tâm I', bán kính R'.

Suy ra $\begin{cases}R'=R=\sqrt{3}\\ Q_{(O,-90^\circ)}(I)=I'\end{cases}\rightarrow z_{I'}=z_I\times(1\angle -90)$

$\rightarrow z_{I'}=2\times(1\angle -90)=-2i\rightarrow I'(0;-2)$.

```
2×(1∠-90)
               -2i
```

Vậy $(C'):x^2+(y+2)^2=3$.

Câu 42: Đáp án C.

Trên đường thẳng $d:x+y-5=0$ lấy hai điểm $A(0;5)$ và $B(5;0)$.

* Gọi $Q_{(I,180^\circ)}(A)=A'\rightarrow z_{A'}=(z_A-z_I)\times(1\angle 180)+z_I$

$\rightarrow z_{A'}=(5i-(4-3i))\times(1\angle 180)+4-3i=8-11i$

$\rightarrow A'(8;-11)$

```
(5i-(4-3i))×(1∠▸
             8-11i
```

* Gọi $Q_{(I,180^\circ)}(B)=B'\rightarrow z_{B'}=(z_B-z_I)\times(1\angle 180)+z_I$

$\rightarrow z_{B'}=(5-(4-3i))\times(1\angle 180)+4-3i=3-6i$

$\rightarrow B'(3;-6)$.

```
(5-(4-3i))×(1∠1▸
              3-6i
```

* $Q_{(I,180)}(d)=d'\to A',B'\in d'\to d':x+y+3=0$.

> Chú ý: Không cần thiết phải tìm điểm $B'=Q_{(I,180^\circ)}(B)$. Sau khi tìm được tọa độ điểm $A'=Q_{(I,180^\circ)}(A)$ ta thấy chỉ có đường thẳng $x+y+3=0$ đi qua A' nên chọn ngay đáp án C.

Câu 43: Đáp án C.

Đường thẳng $d:x-y+4=0$ đi qua điểm $M(0;4)$.

* Gọi $M'=Q_{(I,\pi)}(M)\to z_{M'}=(z_M-z_I)\times(1\angle\pi)+z_I$

$\to z_{M'}=(4i-3i)\times(1\angle\pi)+3i=2i\to M'(0;2)$

```
(4i-3i)×(1∠π)+3i
                2i
```

* Gọi $d'=Q_{(I,\pi)}(d)\to M'\in d'$. Quan sát 4 đáp án, ta thấy chỉ có đường thẳng $x-y+2=0$ đi qua M'.

Câu 44: Đáp án B.

Trên đường thẳng $d:x-3y+2=0$ lấy điểm $M(1;1)$.

* Gọi $M'=Q_{(I,\pi)}(M)\to z_{M'}=(z_M-z_I)\times(1\angle\pi)+z_I$

$\to z_{M'}=(1+i-(-2))\times(1\angle\pi)-2=-5-i\to M'(-5;-1)$.

```
(1+i-(-2))×(1∠π▸
               -5-i
```

* Gọi $d'=Q_{(I,\pi)}(d)\to M'\in d'$. Quan sát 4 đáp án, ta thấy chỉ có đường thẳng $2x-6y+4=0$ đi qua M'.

Câu 45: Đáp án C.

– *Phương án A:* $Q_{(O,90^\circ)}(A)=B\to z_B=z_A\times(1\angle90)$

$\to z_B=(-1+5i)\times(1\angle90)=-5-i\to B(-5;-1)$. Loại A vì $B(-3;-1)$.

```
(-1+5i)×(1∠90)
               -5-i
```

– *Phương án B:* $Q_{(O,30^\circ)}(A)=B\to z_B=z_A\times(1\angle30)$

$\to z_B=(-1+5i)\times(1\angle30)=-\frac{5+\sqrt3}{2}+\frac{-1+5\sqrt3}{2}i$

$\to B\left(-\frac{5+\sqrt3}{2};\frac{-1+5\sqrt3}{2}\right)$. Loại B vì $B(-3;-1)$.

```
(-1+5i)×(1∠30)
 -(5+√3)/2+(-1+5√3)/2 i
```

– *Phương án C:*

$Q_{(I,90^\circ)}(A)=B\to z_B=(z_A-z_I)\times(1\angle90)+z_I$

$\to z_B=((-1+5i)-(1+i))\times(1\angle90)+1+i=-3-i$

$\to B(-3;-1)$.

```
((-1+5i)-(1+i))▸
                -3-i
```

– *Phương án D:*

$Q_{(I,90^\circ)}(A)=B\to z_B=(z_A-z_I)\times(1\angle30)+z_I$

$\to z_B=((-1+5i)-(1+i))\times(1\angle30)+1+i$

$\to z_B=-1-\sqrt3+2\sqrt3 i\to B(-1-\sqrt3;2\sqrt3)$. Loại D vì $B(-3;-1)$.

```
((-1+5i)-(1+i))▸
        -1-√3+2√3 i
```

5. Phép vị tự

Câu 46: Đáp án D.

Ta có $V_{(O,2)}(A)=B\to z_B=kz_A=2(2+7i)=4+14i$

$\to B(4;14)$.

Câu 47: Đáp án C.

$V_{(O,-2)}(M)=M'\to z_{M'}=kz_M=-2(-2+4i)=4-8i$

$\to M'(4;-8)$.

Câu 48: Đáp án C.

$d:2x+y-3=0\Leftrightarrow 2x+y=3\to C=3$

$V_{(O,2)}(d)=d'\to d':2x+y=C'$ với $C'=kC=2.3=6$

Vậy $d':2x+y=6\Leftrightarrow 2x+y-6=0$

Câu 49: Đáp án B.

Ta có $d:x+y-2=0\Leftrightarrow x+y=2\to C=2$

$V_{(O,-2)}(d)=d'\to d':x+y=C'$ với $C'=kC=-2.2=-4$.

Vậy $d':x+y=-4\Leftrightarrow x+y+4=0$.

Câu 50: Đáp án C.

$d:2x+y-3=0\Leftrightarrow 2x+y=3\to C=3$.

$V_{(I,-2)}(d)=d'\to d':2x+y=C'$. Trong đó $C'=\Re(z)$ và $z=kC+(1-k).\overline{z_I}.z_{\vec n}=-2.3+(1-(-2)).\text{Conjg}(2-i).(2+i)$

Nhập vào máy $-6+3\times\text{Conjg}(2-i)\times(2+i)$. Ấn ▤, máy hiện kết quả bằng $3+12i\to z=3+12i$

```
-6+3×Conjg(2-i)▸
              3+12i
```

Suy ra $C'=\Re(z)=3\to d':2x+y=3\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Câu 51: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $J(2;0)$, bán kính $R=1$.

Đường tròn (C') có tâm J', bán kính R'.

Do $V_{(O,2)}\left((C)\right)=(C')\rightarrow\begin{cases}R'=|k|R=2\\ z_{J'}=kz_J=2(2+0i)=4\end{cases}$

$\rightarrow J'(4;0)$. Vậy $(C'):(x-4)^2+y^2=4$.

Câu 52: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $J(3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Đường tròn (C') có tâm J', bán kính R'.

Do $V_{(I,-2)}\left((C)\right)=(C')\rightarrow\begin{cases}R'=|k|R=|-2|.\sqrt{5}=2\sqrt{5}\\ z_{J'}=kz_J+(1-k)z_I\end{cases}$

$\rightarrow z_{J'}=-2(3-i)+3(1+2i)=-3+8i\rightarrow J'(-3;8)$.

```
CMPLX         Math
-2×(3-i)+3×(1+2▸
             -3+8i
```

Vậy $(C'):(x+3)^2+(y-8)^2=20$.

6. Phép đồng dạng

Câu 53: Đáp án A.

$V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}(M)=M'\rightarrow z_{M'}=\frac{1}{2}z_M=\frac{1}{2}(2+4i)=1+2i$

$\rightarrow M'(1;2)$.

$Đ_{Oy}(M')=M''\rightarrow M''(-1;2)$.

Vậy $M(2;4)\xrightarrow{V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}}M'(1;2)\xrightarrow{Đ_{Oy}}M''(-1;2)$.

Câu 54: Đáp án A.

$V_{(O,-2)}(d)=d'\rightarrow d':2x-y=(-2).0=0$.

$Đ_{Oy}(d')=d'':y=-2x$.

Vậy $d:2x-y=0\xrightarrow{V_{(O,-2)}}d':2x-y=0\xrightarrow{Đ_{Oy}}d''$: $2x+y=0$.

Câu 55: Đáp án C.

Ta có $d:3x-y-3=0\Leftrightarrow 3x-y=3\rightarrow C=3$.

* Gọi $d'=V_{(I,2)}(d)\rightarrow d':3x-y=C'$ với $C'=\Re(z)$ và

$z=kC+(1-k).\overline{z_I}.z_{\vec{n}}=2.3+(-1)\times\text{Conjg}(1+i)\times(3-i)$

$\rightarrow z=4+4i\rightarrow C'=\Re(z)=4\rightarrow d':3x-y=4$

```
CMPLX         Math
6+(-1)×Conjg(1+▸
              4+4i
```

* Gọi $d''=T_{\vec{v}}(d)\rightarrow d'':3x-y=C''$ với $C''=\Re(z)$ và

$z=C'+\overline{z_{\vec{v}}}.z_{\vec{n}}=4+\text{Conjg}(4-i)\times(3-i)=17-i$

$\rightarrow C''=\Re(z)=17\rightarrow d'':3x-y=17\Leftrightarrow 3x-y-17=0$.

```
CMPLX         Math
4+Conjg(4-i)×(3▸
              17-i
```

Vậy $d:3x-y-3=0\xrightarrow{V_{(I,2)}}d':3x-y-4=0\xrightarrow{T_{\vec{v}}}d''$: $3x-y-17=0$.

Câu 56: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $J(2;2)$, bán kính $R=2$

* Gọi $(C')=V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}\left((C)\right)\rightarrow\begin{cases}R'=|k|R=\frac{1}{2}.2=1\\ z_{J'}=kz_J=\frac{1}{2}(2+2i)=1+i\end{cases}$

$\rightarrow J'(1;1)\rightarrow(C'):(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

* Gọi $(C'')=Q_{(O,90°)}\left((C')\right)\rightarrow\begin{cases}R''=R'=1\\ J''=Q_{(O,90°)}(J')\end{cases}$

$\rightarrow z_{J''}=z_{J'}\times(1\angle 90)=(1+i)\times(1\angle 90)=-1+i\rightarrow J''(-1;1)$

```
CMPLX         Math
(1+i)×(1∠90)
              -1+i
```

Vậy $(C''):(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Vậy $(C)\xrightarrow{V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}}(C')\xrightarrow{Q_{(O,90°)}}(C'')$.

Câu 57: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$.

* Gọi $(C'')=V_{(O,2)}\left((C)\right)\rightarrow\begin{cases}R''=|k|R=2.2=4\\ z_{I''}=kz_I=2(1+2i)=2+4i\end{cases}$

$\rightarrow I''(2;4)\rightarrow(C''):(x-2)^2+(y-4)^2=16$.

* Gọi $(C')=Đ_{Oy}\left((C'')\right)\rightarrow\begin{cases}R'=R''=4\\ Đ_{Oy}(I'')=I'\end{cases}\rightarrow\begin{cases}R'=4\\ I'(-2;4)\end{cases}$

$\rightarrow(C'):(x+2)^2+(y-4)^2=16$.

Vậy $(C)\xrightarrow{V_{(O,2)}}(C'')\xrightarrow{Đ_{Oy}}(C')$.

Câu 58: Đáp án C.

Đường tròn $(C):(x-8)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(8;4)$, bán kính $R=2$.

* Gọi $(C')=T_{\vec{v}}\left((C)\right)\rightarrow\begin{cases}R'=R=2\\ z_{I'}=z_I+z_{\vec{v}}=(8+4i)+(1+5i)\end{cases}$

$\rightarrow z_{I'}=9+9i\rightarrow I'(9;9)\rightarrow(C'):(x-9)^2+(y-9)^2=4$.

* Gọi $(C'')=Q_{(O,45°)}\left((C')\right)\rightarrow\begin{cases}R''=R'=R=2\\ Q_{(O,45°)}(I')=I''\end{cases}$

$\rightarrow z_{I''}=z_{I'}\times(1\angle 45)=(9+9i)\times(1\angle 45)=9\sqrt{2}i$

```
CMPLX         Math
(9+9i)×(1∠45)
              9√2 i
```

$\rightarrow I''(0;9\sqrt{2})\rightarrow(C''):x^2+(y-9\sqrt{2})^2=4$.

Câu 59: Đáp án A.

* $Đ_{Ox}(M) = M_1 \to M_1(3;-7)$

* $T_{\vec{v}}(M_1) = M_2 \to z_{M_2} = z_{M_1} + z_{\vec{v}} = (3-7i)+(1+3i)$

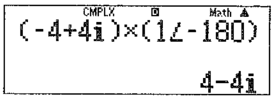
$\to z_{M_2} = 4-4i \to M_2(4;-4)$.

* $Đ_O(M_2) = M_3 \to z_{M_3} = 2z_O - z_{M_2} = -z_{M_2}$

$\to z_{M_3} = -(4-4i) = -4+4i \to M_3(-4;4)$.

$Q_{(O,-180°)}(M_3) = M_4 \to z_{M_4} = z_{M_3} \times (1\angle -180)$

$\to z_{M_3} = (-4+4i)\times(1\angle -180) = 4-4i \to M_3(4;-4)$



Vậy $M \xrightarrow{Đ_{Ox}} M_1 \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M_2 \xrightarrow{Đ_O} M_3 \xrightarrow{Q_{(O,-180°)}} M_4$.

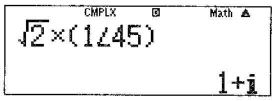
Câu 60: Đáp án A.

* Gọi $d_1 = V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}(d) \to d_1 : x = \frac{1}{2}.2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

* Gọi $d_2 = Q_{(O,45°)}(d_1)$. Trên $d_1 : x = \sqrt{2}$ lấy các điểm $M(\sqrt{2};0)$ và $N(\sqrt{2};1)$.

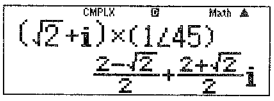
$Q_{(O,45°)}(M) = M' \to z_{M'} = z_M \times (1\angle 45) = \sqrt{2}\times(1\angle 45)$

$\to z_{M'} = 1+i \to M'(1;1)$.



$Q_{(O,45°)}(N) = N' \to z_{N'} = z_N \times (1\angle 45) = (\sqrt{2}+i)\times(1\angle 45)$

$\to z_{N'} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}i \to N'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.



Do $d_2 = Q_{(O,45°)}(d_1)$ nên $M', N' \in d_2$. Quan sát 4 đáp án thấy chỉ có đường thẳng $x+y-2=0$ thỏa mãn.

Vậy

$d : x = 2\sqrt{2} \xrightarrow{V_{(O,2)}} d_1 : x = \sqrt{2} \xrightarrow{Q_{(O,45°)}} d_2 : x+y-2=0$

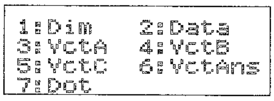
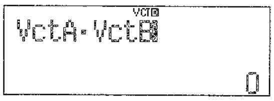
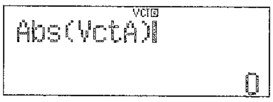
$(d_2 \equiv d')$.

CHỦ ĐỀ 10: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

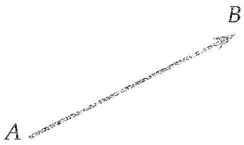
1. Các chế độ làm việc trên máy tính

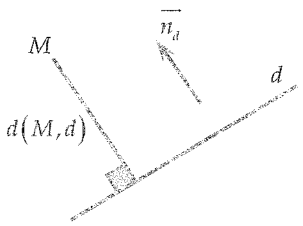
Các bài toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng được thực hiện trên phương thức VECTOR của máy tính.

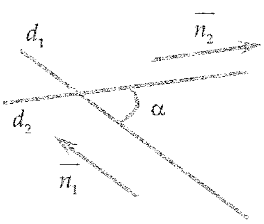
Ấn [MODE] [8] để đưa máy về phương thức VECTOR. Chọn [1](VctA), hoặc chọn [2](VctB), hoặc chọn [3](VctC), sau đó ấn [2](2) để đưa vào các phần tử (tọa độ) các vectơ trong không gian hai chiều.

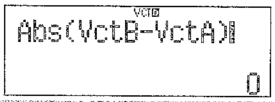
1. Gán dữ liệu mới cho biến vectơ (nhập tọa độ vectơ) Ấn [SHIFT] [5](VECTOR). Sau đó chọn [1](Dim) hoặc [2](Data). Muốn nhập tọa độ các vectơ nào thì ấn [1](VctA), hoặc [2](VctB), hoặc [3](VctC), sau đó chọn [2](2) để đưa vào tọa độ trong không gian hai chiều.	
2. Tích vô hướng của hai vectơ Dùng lệnh [SHIFT] [5](VECTOR) [7](Dot) Chẳng hạn muốn tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} \equiv$ VctA và $\vec{b} \equiv$ VctB. Ấn: [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4]	
5. Độ lớn (độ dài) của vectơ: $\left\|\vec{a}\right\| = \text{Abs}(\text{VctA})$ Dùng lệnh [SHIFT] [hyp](Abs) Chẳng hạn muốn tính độ dài của vectơ $\vec{a} \equiv$ VctA. Ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)]	

2. Một số công thức hình học Oxy và dạng Casio tương ứng







1. Độ lớn (độ dài) của vectơ $\overrightarrow{AB}$ Để tính $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, đưa vào tọa độ điểm A, B lần lượt là VctA và VctB.	Nhập $\text{Abs}(\text{VctB} - \text{VctA})$ 
2. Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng $(d): Ax + By + C = 0$. $d(M,d) = \dfrac{\left\|Ax_M + By_M + C\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\rightarrow d(M,d) = \dfrac{\left\|M \bullet \vec{n_d} + C\right\|}{\left\|\vec{n_d}\right\|}$ Đưa vào máy tọa độ điểm M là VctA, tọa độ của vectơ pháp tuyến $\vec{n_d}$ là VctB	Nhập $\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB} + C) \div$ $\text{Abs}(\text{VctB})$.
3. Góc giữa hai đường thẳng: $\cos\alpha = \dfrac{\left\|\vec{n_1} \bullet \vec{n_2}\right\|}{\left\|\vec{n_1}\right\|\left\|\vec{n_2}\right\|}$ Đưa vào máy $\vec{n_1} = \text{VctA}, \vec{n_2} = \text{VctB}$.	Nhập $\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB}) \div$ $(\text{Abs}(\text{VctA}) \times \text{Abs}(\text{VctB}))$.

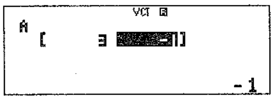
3. Các dạng toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

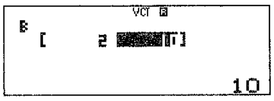
a. Các phép tính tọa độ trong mặt phẳng

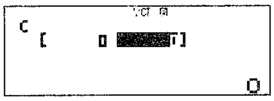
Ví dụ 1: Cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$ thì tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$ bằng

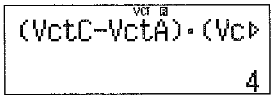
A. 4 B. –4 C. 16 D. 0

Lời giải









Ấn [MODE] [8](VECTOR) [1](VctA) [2](2), đưa vào tọa độ điểm A: $\text{VctA}=[3,-1]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5](VECTOR) [1](Dim) [2](VctB) [2](2), đưa vào tọa độ điểm B: $\text{VctB}=[2,10]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5](VECTOR) [1](Dim) [3](VctC) [2](2), đưa vào tọa độ điểm O: $\text{VctC}=[0,0]$.

Khi đó, kí hiệu của tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$ trong máy tính là:

$$(\text{VctC}-\text{VctA})\bullet(\text{VctB}-\text{VctC}).$$

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctC}-\text{VctA})\bullet(\text{VctB}-\text{VctC})$, ấn [(] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [SHIFT] [5] [7] [(] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)].

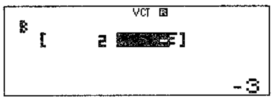
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 4. Vậy $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$.

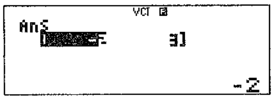
Đáp án A.

Ví dụ 2: Tìm tọa độ vec-tơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{b}=0$ và $\vec{b}=(2;-3)$

A. $(2;-3)$ B. $(-2;-3)$ C. $(-2;3)$ D. $(2;3)$

Lời giải





Ấn [MODE] [8](VECTOR) [2](VctB) [2](2), đưa vào tọa độ điểm B: $\text{VctB}=[2,-3]$.

Từ $\vec{u}+\vec{b}=0\rightarrow\vec{u}=-\vec{b}$, kí hiệu trên máy là $-\text{VctB}$.

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $-\text{VctB}$, ấn [(−)] [SHIFT] [5] [4].

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[-2,3]$. Vậy $\vec{u}=(-2;3)$.

Đáp án C.

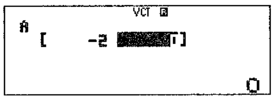
STUDY TIPS

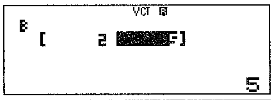
Trong hệ trục tọa độ, các điểm đều có tọa độ của riêng nó nên vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ bằng tọa độ điểm B trừ tọa độ điểm A, vậy nên ta quy ước $\overrightarrow{AB}=B-A$. Tương tự, $\overrightarrow{DC}=C-D$.

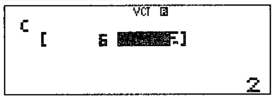
Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0), B(2;5)$ và $C(6;2)$. Tọa độ điểm D là

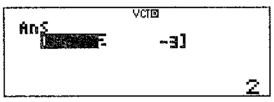
A. $D(2;-3)$ B. $D(2;3)$ C. $D(-2;-3)$ D. $(-2;3)$

Lời giải









Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow B-A=C-D\Leftrightarrow D=C+A-B$.

Ấn [MODE] [8](VECTOR) [1](VctA) [2](2), đưa vào tọa độ điểm A: $\text{VctA}=[-2,0]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5](VECTOR) [1](Dim) [2](VctB) [2](2), đưa vào tọa độ điểm B: $\text{VctB}=[2,5]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5](VECTOR) [1](Dim) [3](VctC) [2](2), đưa vào tọa độ điểm O: $\text{VctC}=[6,2]$.

Khi đó, trên máy tọa độ điểm D được tính bằng $\text{VctC}+\text{VctA}-\text{VctB}$.

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $\text{VctC}+\text{VctA}-\text{VctB}$, ấn [SHIFT] [5] [5] [+] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[2,-3]$.

Vậy $D(2;-3)$.

Đáp án A.

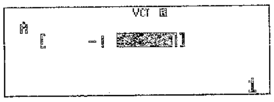
STUDY TIPS

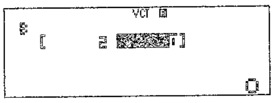
Công thức tính cosin của góc giữa hai vec-tơ là:
$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}$

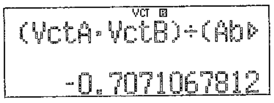
Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, nếu $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$ thì cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

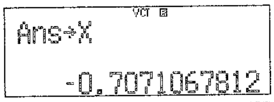
A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $\dfrac{1}{2}$

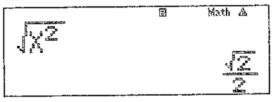
Lời giải











Ấn MODE 8 (VECTOR) 1 (VctA) 2 (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{a}$: $\text{VctA}=[-1,1]$.

Ấn tiếp SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 2 (VctB) 2 (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{b}$: $\text{VctB}=[2,0]$.

Trên máy, $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ được tính bằng $(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$.

Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$, ấn (SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)). Ấn = máy hiện kết quả bằng $-0,7071067812$. Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn Ans SHIFT RCL) $(\text{Ans}\to\text{X})$.

Vào phương thức MODE 1 (COMP), nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$, ấn √ ALPHA) x². Ấn = máy hiện kết quả bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\to X=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Như vậy $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án B.

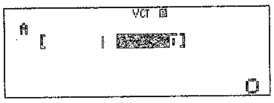
STUDY TIPS

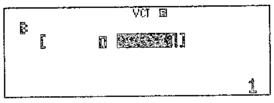
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trục hoành có vec-tơ đơn vị là $\vec{i}=(1;0)$ và trục tung có vec-tơ đơn vị là $\vec{j}=(0;1)$.

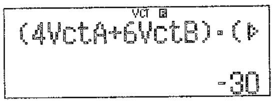
Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vec-tơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ ta được kết quả đúng là

A. 3 B. –30 C. 30 D. 43

Lời giải







Ấn MODE 8 (VECTOR) 1 (VctA) 2 (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{i}$: $\text{VctA}=[1,0]$.

Ấn tiếp SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 2 (VctB) 2 (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{j}$: $\text{VctB}=[0,1]$.

Khi đó, trên máy tính vec-tơ $\vec{a}.\vec{b}=\left(4\vec{i}+6\vec{j}\right)\left(3\vec{i}-7\vec{j}\right)$ được tính bằng cách nhập vào màn hình $(4\text{VctA}+6\text{VctB})\bullet(3\text{VctA}-7\text{VctB})$.

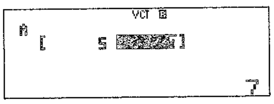
Ấn AC về màn hình tính toán. Ấn (4 SHIFT 5 3 + 6 SHIFT 5 4) SHIFT 5 7 (3 SHIFT 5 3 − 7 SHIFT 5 4). Ấn = máy hiện kết quả bằng –30.

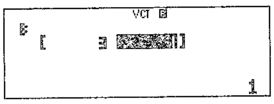
Đáp án B.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(5;7)$ và $B(3;1)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến trung điểm M của đoạn AB

A. $4\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. $2\sqrt{10}$

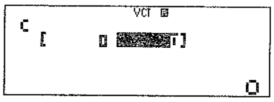
Lời giải





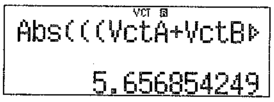
Ấn MODE 8 (VECTOR) 1 (VctA) 2 (2), đưa vào tọa độ điểm A: $\text{VctA}=[5,7]$.

Ấn tiếp SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 2 (VctB) 2 (2), đưa vào tọa độ điểm B: $\text{VctB}=[3,1]$.

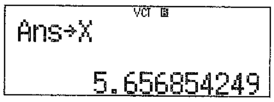


Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm O: $\text{VctC} = [0,0]$.

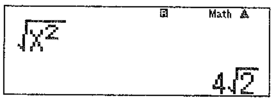
Điểm M là trung điểm của AB nên $M = \dfrac{A+B}{2}$. Khi đó khoảng cách OM bằng



$OM = \left|\overrightarrow{OM}\right| = |M - O| = \left|\dfrac{A+B}{2} - O\right|$.



Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $\text{Abs}\left(\left((\text{VctA} + \text{VctB}) \div 2\right) - \text{VctC}\right)$, ấn [SHIFT] [hyp] [(] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [2] [)] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5,656854249. Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans} \to \text{X})$.



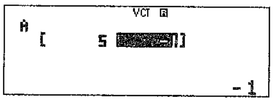
Vào phương thức [MODE] [1] (COMP), nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$, ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $4\sqrt{2}$. Vậy $OI = 4\sqrt{2}$.

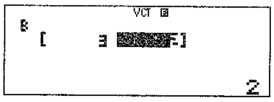
Đáp án A.

Ví dụ 7: Khoảng cách từ điểm $M(5;-1)$ đến đường thẳng $d: 3x + 2y + 13 = 0$ là

A. $2\sqrt{13}$ B. $\dfrac{28}{\sqrt{13}}$ C. 2 D. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Lời giải



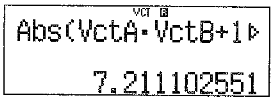


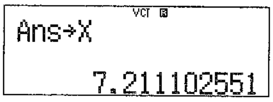
Đường thẳng d có vec-tơ pháp tuyến (VTPT) là $\vec{n} = (3;2)$

Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm M: $\text{VctA} = [5,-1]$.

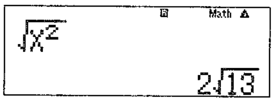
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{n}$: $\text{VctB} = [3,2]$.

Ta có $d(M,d) = \dfrac{\left|M \bullet \vec{n} + 13\right|}{\left|\vec{n}\right|}$.





Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB} + 13) \div \text{Abs}(\text{VctB})$, ấn [AC] về màn hình tính toán. Ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [+] [1] [3] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,211102551. Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans} \to \text{X})$.



Vào phương thức [MODE] [1] (COMP), nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$, ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $2\sqrt{13}$. Vậy $d(M,d) = 2\sqrt{13}$.

Đáp án A.

Ví dụ 8: Góc giữa hai đường thẳng $3x + y - 1 = 0$ và $2x - y - 2 = 0$ là

A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°

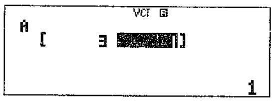
Lời giải

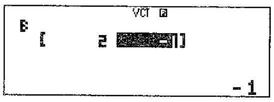
STUDY TIPS

Công thức tính cosin của góc giữa hai đường thẳng là:

$\cos(d_1, d_2) = \left|\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})\right| = \dfrac{\left|\vec{n_1} . \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| . \left|\vec{n_2}\right|}$

Hai đường thẳng có VTPT lần lượt là $\vec{n_1} = (3;1)$ và $\vec{n_2} = (2;-1)$.

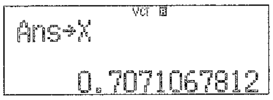


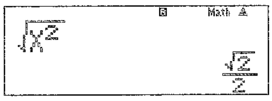


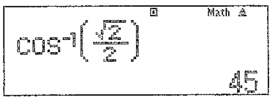
Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{n_1}$: $\text{VctA} = [3,1]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ vec-tơ $\vec{n_2}$: $\text{VctB} = [2,-1]$.









Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB}) \div (\text{Abs}(\text{VctA}) \times \text{Abs}(\text{VctB}))$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,7071067812. Gán kết quả này vào biến nhớ X, ấn [Ans] [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans} \to \text{X})$.

Vào phương thức [MODE] [1] (COMP), nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$, ấn [√▫] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$.

Đáp án D.

b. Phương pháp tọa độ tam tuyến

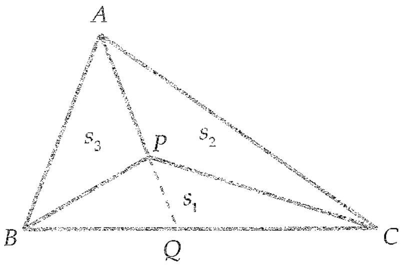
CHÚ Ý

Phương pháp tọa độ tam tuyến cũng có thể áp dụng một cách tương tự trong hình học tọa độ không gian *Oxyz*.

Phương pháp tọa độ tam tuyến được ứng dụng trong việc tìm nhanh tọa độ trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp,... trong tam giác khi biết tọa độ các đỉnh. Thậm chí, phương pháp còn giúp tìm tọa độ các chân đường cao, đường phân giác,... trong tam giác.

Bài toán tổng quát: Cho tam giác *ABC* và *P* là một điểm nằm trong tam giác. Gọi $s_1 = S_{\Delta PBC}, s_2 = s_{\Delta PCA}$ và $s_3 = S_{\Delta PAB}$. Chứng minh rằng $s_1\overrightarrow{PA} + s_2\overrightarrow{PB} + s_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

Lời giải



Gọi *Q* là giao điểm của *AP* và *BC*. Đặt $s = S_{\Delta ABC} \to s = s_1 + s_2 + s_3$.

$$\overrightarrow{PA} = \frac{PA}{QA}\overrightarrow{QA}$$

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} - \frac{BQ}{BC}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \frac{BQ}{BC}\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}\right) = \frac{QC}{BC}\overrightarrow{BA} + \frac{QB}{BC}\overrightarrow{CA}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{PA} = \frac{PA}{QA}\left(\frac{QC}{BC}\overrightarrow{BA} + \frac{QB}{BC}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{s_2 + s_3}{s}\left(\frac{s_2}{s_2 + s_3}\overrightarrow{BA} + \frac{s_3}{s_2 + s_3}\overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \frac{s_2}{s}\overrightarrow{BA} + \frac{s_3}{s}\overrightarrow{CA}.$$

CHÚ Ý

Ta cũng có thể tìm nhanh tọa độ các chân đường cao, chân đường phân giác, ... trực tiếp bằng vec-tơ qua máy tính casio. Ý tưởng như sau: Nếu điểm *P* có tỉ lệ $s_1 : s_2 : s_3$ thì giao điểm *Q* của *AP* và *BC* có tỉ lệ $0 : s_2 : s_3$. Có nghĩa là $Q = \frac{s_2B + s_3C}{s_2 + s_3}$.

Tương tự, giao điểm của *BQ* và *AC* có tỉ lệ $s_1 : 0 : s_2$; giao điểm của *CQ* và *AB* có tỉ lệ $s_1 : s_2 : 0$.

Tương tự, ta chứng minh được $\overrightarrow{PB} = \frac{s_1}{s}\overrightarrow{AB} + \frac{s_3}{s}\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{PC} = \frac{s_1}{s}\overrightarrow{AC} + \frac{s_2}{s}\overrightarrow{BC}$.

$$\to s_1\overrightarrow{PA} + s_2\overrightarrow{PB} + s_3\overrightarrow{PC} = \frac{s_1s_2}{s}\overrightarrow{BA} + \frac{s_1s_3}{s}\overrightarrow{CA} + \frac{s_1s_2}{s}\overrightarrow{AB} + \frac{s_2s_3}{s}\overrightarrow{CB} + \frac{s_1s_3}{s}\overrightarrow{AC} + \frac{s_2s_3}{s}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{s_1s_2}{s}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{s_1s_3}{s}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{s_2s_3}{s}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0} \text{ (ĐPCM)}$$

Nhận xét: Giả sử trong hệ trục tọa độ, các điểm đều có tọa độ riêng của nó thì vec-tơ $\overrightarrow{PA}$ có tọa độ bằng tọa độ điểm *A* trừ tọa độ điểm *P*. Chúng ta quy ước là $\overrightarrow{PA} = A - P$. Như vậy:

$$s_1\overrightarrow{PA} + s_2\overrightarrow{PB} + s_3\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow s_1(A - P) + s_2(B - P) + s_3(C - P) = 0$$

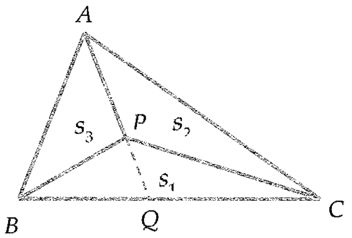
$$\Leftrightarrow s_1A + s_2B + s_3C = (s_1 + s_2 + s_3)P \Leftrightarrow P = \frac{s_1A + s_2B + s_3C}{s_1 + s_2 + s_3}.$$

Vậy, nếu chúng ta biết được s_1, s_2, s_3 và tọa độ các điểm *A*,*B*,*C* thì sẽ tìm được tọa độ điểm *P* một cách nhanh chóng.

Để ý rằng: Nếu s_1, s_2, s_3 có cùng tỷ lệ với p_1, p_2, p_3, tức tồn tại k sao cho $\begin{cases} s_1 = kp_1 \\ s_2 = kp_2 \\ s_3 = kp_3 \end{cases}$

thì $P = \dfrac{kp_1A + kp_2B + kp_3C}{kp_1 + kp_2 + kp_3} = \dfrac{p_1A + p_2B + p_3C}{p_1 + p_2 + p_3}$ không phụ thuộc vào k.

Dạng 1: Tìm trọng tâm tam giác



Phân tích:

Quy ước $a = BC, b = AC, c = AB$.

Khi P là trọng tâm của ΔABC thì $s_1 = s_2 = s_3 \rightarrow s_1 : s_2 : s_3 = 1:1:1$.

Suy ra $\boxed{P = \dfrac{A+B+C}{1+1+1} = \dfrac{A+B+C}{3}}$.

Quy trình bấm máy:

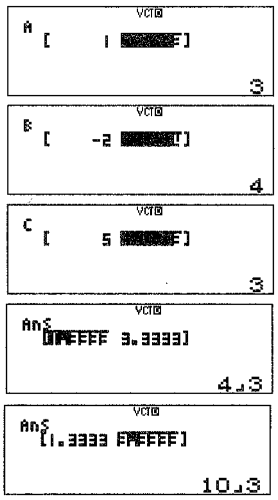
* **Bước 1:** Vào phương thức MODE 8 (VECTOR), đưa vào tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là VctA, VctB, VctC.

* **Bước 2:** Ấn AC về màn hình tính toán.

Nhập vào màn hình $(\text{VctA} + \text{VctB} + \text{VctC}) \div 3$.

* **Bước 3:** Ấn = máy hiện kết quả là tọa độ điểm P.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;3), B(-2;4), C(5;3)$. Tìm trọng tâm của tam giác ABC.



Lời giải

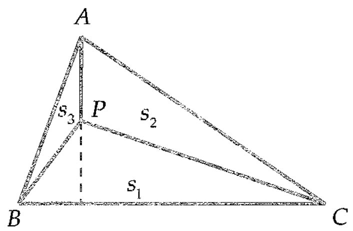
Ấn MODE 8 (VECTOR) 1 (VctA) 2 (2), đưa vào tọa độ điểm A: $\text{VctA} = [1,3]$.

Ấn tiếp SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 2 (VctB) 2 (2), đưa vào tọa độ điểm B: $\text{VctB} = [-2,4]$.

Ấn tiếp SHIFT 5 (VECTOR) 1 (Dim) 3 (VctC) 2 (2), đưa vào tọa độ điểm C: $\text{VctC} = [5,3]$.

Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $(\text{VctA} + \text{VctB} + \text{VctC}) \div 3$, ấn (SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 + SHIFT 5 5) ÷ 3. Ấn = máy hiện kết quả là $\left[\dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$. Vậy $G\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$ là trọng tâm của ΔABC.

Dạng 2: Tìm trực tâm tam giác



Phân tích:

Khi P là trực tâm của ΔABC thì $\dfrac{s_2}{s_3} = \dfrac{CQ}{BQ}$

Ta có $AB^2 - BQ^2 = AC^2 - CQ^2$

$\rightarrow c^2 - BQ^2 = b^2 - (a - BQ)^2$

$\rightarrow BQ = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$. Tương tự, ta chứng minh được $CQ = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.

Suy ra $\dfrac{s_2}{s_3} = \dfrac{CQ}{BQ} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + a^2 - b^2} \rightarrow s_1 : s_2 : s_3 = \dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2} : \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$

Vậy $\boxed{P=\dfrac{h_a.A+h_b.B+h_c.C}{h_a+h_b+h_c}}$ với $h_a=\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}, h_b=\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}, h_c=\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Vào phương thức [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào tọa độ các điểm *A,B,C* lần lượt là VctA, VctB, VctC.

* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán. Tính *a,b,c* và gán lần lượt vào các biến nhớ A, B, C. Cụ thể là $\begin{cases}\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctC})\to A\\ \text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})\to B\\ \text{Abs}(\text{VctA}-\text{VctB})\to C\end{cases}$

* **Bước 3:** Tính h_a,h_b,h_c và gán lần lượt vào các biến nhớ D, E, F. Cụ thể là $\begin{cases}1\div(B^2+C^2-A^2)\to D\\ 1\div(C^2+A^2-B^2)\to E\\ 1\div(A^2+B^2-C^2)\to F\end{cases}$

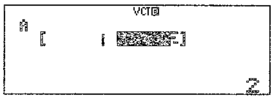
* **Bước 4:** Tính tọa độ trực tâm bằng cách nhập vào màn hình $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(D+E+F)$. Ấn [=] ta được đáp án.

CHÚ Ý

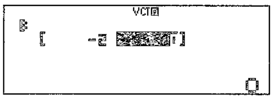
Nếu tính h_a,h_b,h_c mà máy tính hiện Math ERROR, tức là $B^2+C^2-A^2=0$, hoặc $C^2+A^2-B^2=0$, hoặc $A^2+B^2-C^2=0$. Khi đó ΔABC vuông tại *A*, hoặc tại *B*, hoặc tại *C*.

Ví dụ: Trong mặt phẳng *Oxy* cho tam giác *ABC* với $A(1;2), B(-2;0), C(4;1)$. Tìm tọa độ điểm *H* là trực tâm của ΔABC

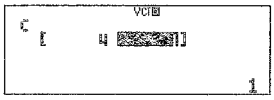
Lời giải



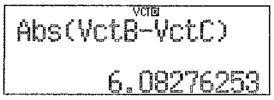
Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm *A*: VctA = [1,2].



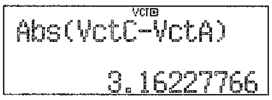
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm *B*: VctB = [−2,0].



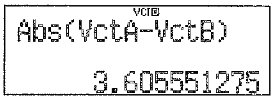
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm *C*: VctC = [4,1].



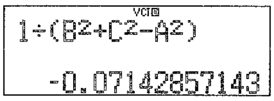
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình Abs(VctB − VctC), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,08276253. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [(−)] $(\text{Ans}\to A)$



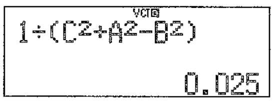
Nhập vào màn hình Abs(VctC − VctA), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 3,16227766. Gán vào biến nhớ B, ấn [SHIFT] [RCL] [°'"] $(\text{Ans}\to B)$.



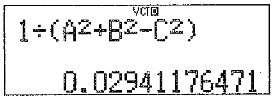
Nhập vào màn hình Abs(VctA − VctB), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 3,605551275. Gán vào biến nhớ C, ấn [SHIFT] [RCL] [hyp] $(\text{Ans}\to C)$.



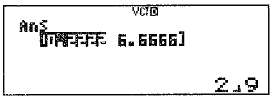
Nhập vào màn hình $1\div(B^2+C^2-A^2)$, ấn [1] [÷] [(] [ALPHA] [°'"] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng −0,07142857143 gán vào D, ấn [SHIFT] [RCL] [sin] $(\text{Ans}\to D)$.

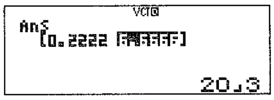


Nhập vào màn hình $1\div(C^2+A^2-B^2)$, ấn [1] [÷] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [°'"] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,025 gán vào E, ấn [SHIFT] [RCL] [cos] $(\text{Ans}\to E)$.



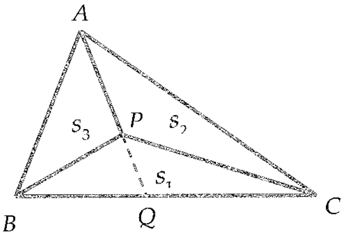
Nhập vào màn hình $1\div\left(A^2+B^2-C^2\right)$, ấn [1] [÷] [(] [ALPHA] [(-)] [x²] [+] [ALPHA] [°'''] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,02941176471 gán vào F, ấn [SHIFT] [RCL] [tan].





Nhập vào màn hình $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(D+E+F)$, ấn [(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{2}{9},\frac{20}{3}\right]$. Vậy $H\left(\frac{2}{9};\frac{20}{3}\right)$.

Dạng 3: Tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác



Phân tích: Khi P là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì ta có $\frac{s_2}{s_3}=\frac{rb/2}{rc/2}=\frac{b}{c}$

$\rightarrow s_1:s_2:s_3=a:b:c$.

Khi đó $\boxed{P=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}}$.

Quy trình bấm máy:

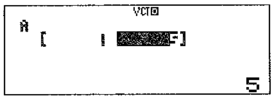
* **Bước 1:** Vào phương thức [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là VctA, VctB,VctC ..

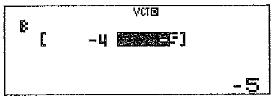
* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán. Tính a,b,c và gán lần lượt vào các biến nhớ A, B, C. Cụ thể là $\begin{cases}\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctC})\rightarrow A\\ \text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})\rightarrow B\\ \text{Abs}(\text{VctA}-\text{VctB})\rightarrow C\end{cases}$

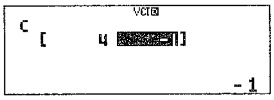
* **Bước 3:** Tính tọa độ tâm đường tròn nội tiếp bằng cách nhập vào màn hình $(\text{AVctA}+\text{BVctB}+\text{CVctC})\div(A+B+C)$. Ấn [=] ta được đáp án.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;5), B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Tìm tâm J của đường tròn nội tiếp ΔABC.

Lời giải



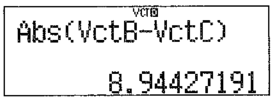




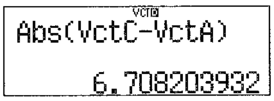
Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm A: VctA $=[1,5]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm B: VctB $=[-4,-5]$.

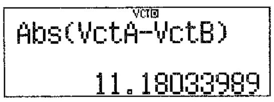
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm C: VctC $=[4,-1]$.



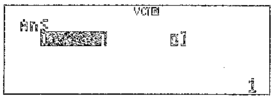
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình Abs(VctB − VctC), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 8,94427191. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [(-)] $(\text{Ans}\rightarrow A)$.



Nhập vào màn hình Abs(VctC − VctA), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,708203932 . Gán vào biến nhớ B, ấn [SHIFT] [RCL] [°'''] $(\text{Ans}\rightarrow B)$.

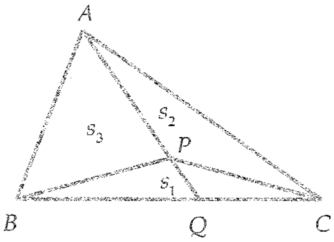


Nhập vào màn hình Abs(VctA − VctB), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 11,18033989 . Gán vào biến nhớ C, ấn [SHIFT] [RCL] [hyp] $(\text{Ans}\rightarrow C)$.



Nhập vào màn hình $(\text{AVctA}+\text{BVctB}+\text{CVctC})\div(\text{A}+\text{B}+\text{C})$, ấn [(] [ALPHA] [(-)] [SHIFT] [5] [3] [×] [ALPHA] [°'''] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [(-)] [+] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [hyp] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[1,0]$. Vậy $J(1;0)$.

Dạng 4: Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác



Phân tích: Khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì ta có:

$$\frac{s_2}{s_3}=\frac{R^2\sin 2B/2}{R^2\sin 2C/2}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}=\frac{2\sin B\cos B}{2\sin C\cos C}=\frac{\frac{b}{R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\frac{c}{R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

$$\to s_1:s_2:s_3=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right):b^2\left(c^2+a^2-b^2\right):c^2\left(a^2+b^2-c^2\right).$$

Vậy $\boxed{P=\dfrac{k_aA+k_bB+k_cC}{k_a+k_b+k_c}}$ với $\begin{cases}k_a=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)\\ k_b=b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\\ k_c=c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\end{cases}$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Vào phương thức [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là VctA, VctB, VctC.

* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán. Tính a,b,c và gán lần lượt vào các biến nhớ A, B, C. Cụ thể là $\begin{cases}\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctC})\to \text{A}\\ \text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})\to \text{B}\\ \text{Abs}(\text{VctA}-\text{VctB})\to C\end{cases}$

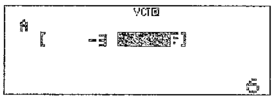
* **Bước 3:** Tính k_a,k_b,k_c và gán lần lượt vào các biến nhớ D, E, F. Cụ thể là

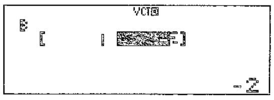
$$\begin{cases}\text{A}^2\left(\text{B}^2+\text{C}^2-\text{A}^2\right)\to \text{D}\\ \text{B}^2\left(\text{C}^2+\text{A}^2-\text{B}^2\right)\to \text{E}\\ \text{C}^2\left(\text{A}^2+\text{B}^2-\text{C}^2\right)\to \text{F}\end{cases}$$

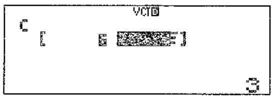
* **Bước 4:** Tính tọa độ trực tâm bằng cách nhập vào màn hình $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(\text{D}+\text{E}+\text{F})$. Ấn [=] ta được đáp án.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-3;6), B(1;-2), C(6;3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Lời giải



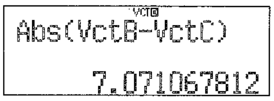


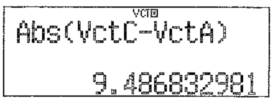


Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm A: VctA $=[-3,6]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm B: VctB $=[1,-2]$.

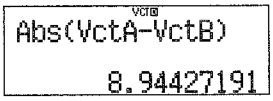
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm C: VctC $=[6,3]$.



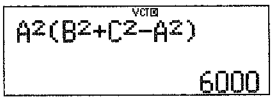


Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctC})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,071067812. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [(-)] $(\text{Ans}\to \text{A})$.

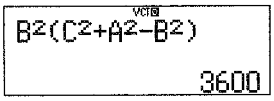
Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 9,486832981. Gán vào biến nhớ B, ấn [SHIFT] [RCL] [°'''] $(\text{Ans}\to \text{B})$.



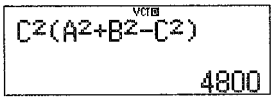
Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctA}-\text{VctB})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 8,94427191. Gán vào biến nhớ C, ấn [SHIFT] [RCL] [hyp] $(\text{Ans}\to\text{C})$.



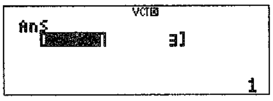
Nhập vào màn hình $\text{A}^2(\text{B}^2+\text{C}^2-\text{A}^2)$, ấn [ALPHA] [(−)] [x²] [(] [ALPHA] [°'"] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6000 gán vào D, ấn [SHIFT] [RCL] [sin] $(\text{Ans}\to\text{D})$.



Nhập vào màn hình $\text{B}^2(\text{C}^2+\text{A}^2-\text{B}^2)$, ấn [ALPHA] [°'"] [x²] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [°'"] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 3600 gán vào E, ấn [SHIFT] [RCL] [cos] $(\text{Ans}\to\text{E})$.



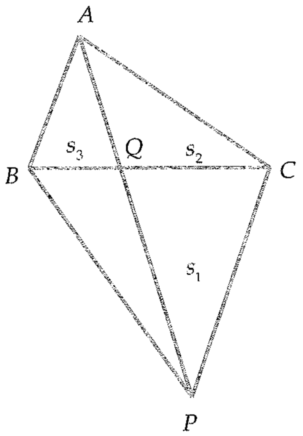
Nhập vào màn hình $\text{C}^2(\text{A}^2+\text{B}^2-\text{C}^2)$, ấn [ALPHA] [hyp] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [°'"] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 4800 gán vào F, ấn [SHIFT] [RCL] [tan].



Nhập vào màn hình $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(\text{D}+\text{E}+\text{F})$, ấn [(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[1,3]$.

Vậy $I(1;3)$.

Dạng 5: Tìm tâm đường tròn bàng tiếp tam giác



Phân tích:

Khi P là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC thì ta chứng minh được rằng $-s_1\overrightarrow{PA}+s_2\overrightarrow{PB}+s_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

Tương tự như tâm đường tròn nội tiếp, ta có thể tìm được tỉ lệ $s_1:s_2:s_3=-a:b:c$.

Khi đó tâm P của đường tròn bàng tiếp góc A là $\boxed{P=\dfrac{-aA+bB+cC}{-a+b+c}}$.

Nếu P là tâm đường tròn bàng tiếp góc B thì $\boxed{P=\dfrac{aA-bB+cC}{a-b+c}}$.

Nếu P là tâm đường tròn bàng tiếp góc C thì $\boxed{P=\dfrac{aA+bB-cC}{a+b-c}}$.

Quy trình bấm máy (Tìm tâm đường tròn bàng tiếp góc A):

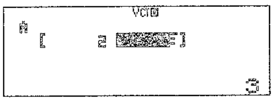
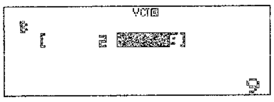
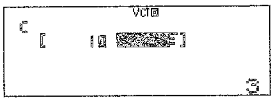
* **Bước 1:** Vào phương thức [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là VctA, VctB,VctC ..

* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán. Tính a,b,c và gán lần lượt vào các biến nhớ A, B, C. Cụ thể là $\begin{cases}\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctC})\to\text{A}\\ \text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})\to\text{B}\\ \text{Abs}(\text{VctA}-\text{VctB})\to\text{C}\end{cases}$

* **Bước 3:** Tính tọa độ tâm đường tròn bàng tiếp góc A bằng cách nhập vào màn hình $(-\text{AVctA}+\text{BVctB}+\text{CVctC})\div(-\text{A}+\text{B}+\text{C})$. Ấn [=] ta được đáp án.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3), B(2;9)$ và $C(10;3)$. Tìm tọa độ điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC.

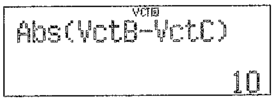
Lời giải

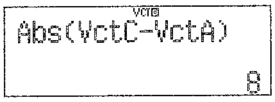
Ấn [MODE] [8] (VECTOR) [1] (VctA) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm A: VctA $= [2,3]$.

Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [2] (VctB) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm B: VctB $= [2,9]$.

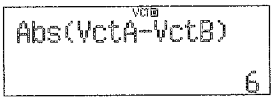
Ấn tiếp [SHIFT] [5] (VECTOR) [1] (Dim) [3] (VctC) [2] (2), đưa vào tọa độ điểm C: VctC $= [10,3]$.



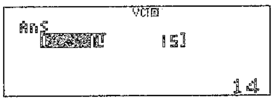
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình Abs(VctB − VctC), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 10. Gán kết quả này vào biến nhớ A, ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [(−)] (Ans → A).



Nhập vào màn hình Abs(VctC − VctA), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 8. Gán vào biến nhớ B, ấn [SHIFT] [RCL] [°'''] (Ans → B)



Nhập vào màn hình Abs(VctA − VctB), ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6. Gán vào biến nhớ C, ấn [SHIFT] [RCL] [hyp] (Ans → C)



Nhập vào màn hình (−AVctA + BVctB + CVctC) ÷ (−A + B + C), ấn [(] [(−)] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [°'''] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [(−)] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [hyp] [)]. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[14,15]$.

Vậy $K(14,15)$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Phép tính tọa độ trong mặt phẳng

Câu 1: Cho ba điểm $A(3;-1), B(2;10), C(-4;2)$. Tích vô hướng $\overline{AB}.\overline{AC}$ bằng

A. –26 B. –40 C. 26 D. 40

Câu 2: Cho hai vec-tơ $\vec{a}=(1;-4)$ và $\vec{b}=(-6;15)$. Tìm tọa độ vec-tơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{a}=\vec{b}$

A. $(7;19)$ B. $(-7;19)$

C. $(7;-19)$ D. $(-7;-19)$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;2), B(3;3)$ và $C(4;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

A. $D(-5;2)$ B. $D(5;2)$ C. $D(5;-2)$ D. $D(3;0)$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Tìm tọa độ của $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

A. $\vec{c}=(1;-1)$ B. $\vec{c}=(3;-5)$

C. $\vec{c}=(-3;5)$ D. $\vec{c}=(2;7)$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vec-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{v}=-5\vec{i}-\vec{j}$. Gọi $(X;Y)$ là tọa độ của $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ thì tích XY bằng

A. –57 B. 57 C. –63 D. 63

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;1), B(0;-2)$ và $C(3;0)$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành $ABDC$

A. $D(-3;3)$ B. $D(3;-3)$

C. $D(3;3)$ D. $D(-3;-3)$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;6)$ và $N(6;3)$. Tìm điểm P thỏa mãn $\overline{PM}=2\overline{PN}$

A. $P(11;0)$ B. $P(6;5)$ C. $P(2;4)$ D. $P(0;11)$

Câu 8: Cho $\vec{a}=(1;5)$ và $\vec{b}=(-2;1)$. Tính $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$

A. $\vec{c}=(7;13)$ B. $\vec{c}=(1;17)$

C. $\vec{c}=(-1;17)$ D. $\vec{c}=(1;16)$

Câu 9: Khoảng cách từ điểm $M(3;-4)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x-4y-1=0$ bằng

A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{24}{5}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{18}{5}$

Câu 10: Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x+2y-\sqrt{2}=0$ và $\Delta_2: x-y=0$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Phương pháp tọa độ tam tuyến

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ trọng tâm G của ΔABC với $A(-4;7), B(2;5), C(-1;-3)$ là

A. $(-1;4)$ B. $(2;6)$ C. $(-1;2)$ D. $(-1;3)$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;5)$, $B(-2;4), G(3;3)$. Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì tọa độ đỉnh C là

A. $(3;1)$ B. $(5;7)$ C. $(10;0)$ D. $(-10;0)$

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(1;3), B(4;-1)$ và $C(-2;-3)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là

A. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(-5;6), B(3;2), C(0;-4)$. Chân đường phân giác trong góc A có tọa độ

A. $(5;-2)$ B. $\left(\frac{5}{2};-\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(5;4), B(2;7), C(-2;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC

A. $\left(\frac{11}{3};\frac{14}{3}\right)$ B. $\left(\frac{11}{3};-\frac{14}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{11}{3};\frac{14}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{11}{3};-\frac{14}{3}\right)$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(5;4), B(2;7), C(-2;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(-1;-3), B(2;5), C(4;0)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC

A. $H\left(\frac{164}{31};\frac{15}{31}\right)$ B. $H\left(-\frac{164}{31};\frac{15}{31}\right)$

C. $H\left(-\frac{164}{31};-\frac{15}{31}\right)$ D. $H\left(\frac{164}{31};-\frac{15}{31}\right)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(-1;4),B(-4;0),C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ B. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

C. $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A\left(-\frac{15}{2};2\right),B(12;15),C(0;-3)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

A. $(1;2)$ B. $(1;-2)$ C. $(-1;-2)$ D. $(-1;2)$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(-2;3),B\left(\frac{1}{4};0\right),C(2;0)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(3;-1),B(1;5),C(6;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống BC

A. $(1;5)$ B. $(5;1)$ C. $(-1;5)$ D. $(1;-5)$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(3;-4),B(-4;-2),C(1;3)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống BC

A. $H\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ B. $H\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

C. $H\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ D. $H\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(2;6),B(-3;-4),C(5;0)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

A. $(2;-1)$ B. $(1;2)$ C. $(2;1)$ D. $(-2;1)$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A\left(\frac{1}{2};4\right),B(5;-2),C(-2;-2)$. Tìm tọa độ tâm K của đường tròn bàng tiếp góc A

A. $(2;8)$ B. $(-2;8)$ C. $(-2;-8)$ D. $(2;-8)$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A\left(\frac{1}{2};4\right),B(5;-2),C(-2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{16}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right)$ D. $\left(\frac{1}{16};-\frac{3}{2}\right)$

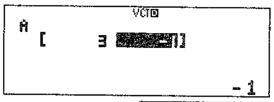
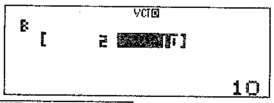
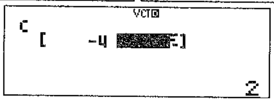
Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Phép tính tọa độ trong mặt phẳng

Câu 1: Đáp án D.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

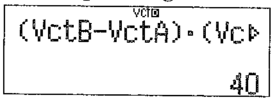
VctA $=[3,-1]$, VctB $=[2,10]$ và VctC $=[-4,2]$.

Ấn AC, nhập $(\text{VctB}-\text{VctA})\bullet(\text{VctC}-\text{VctA})$:

(SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3) SHIFT 5 7 (SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 40.

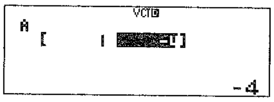
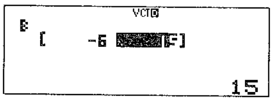


Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$.

Câu 2: Đáp án B.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

VctA $=[1,-4]$, VctB $=[-6,15]$.

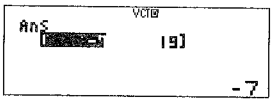



Ấn AC, nhập vào màn hình VctB − VctA:

SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[-7,19]$.





Vậy $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}=(-7;19)$.

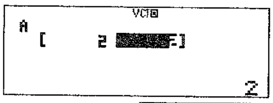
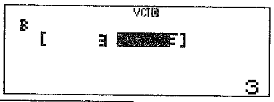
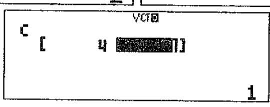
Câu 3: Đáp án D.

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow B-A=C-D \Leftrightarrow D=A+C-B$.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

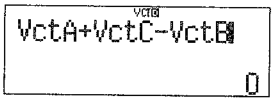
VctA $=[2,2]$, VctB $=[3,3]$ và VctC $=[4,1]$.

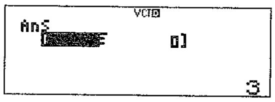




Ấn AC, nhập vào màn hình VctA + VctC − VctB:

SHIFT 5 3 + SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[3,0]$.



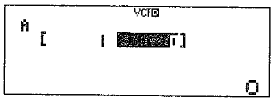
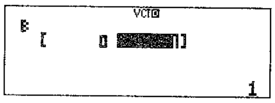


Vậy $D(3;0)$.

Câu 4: Đáp án B.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

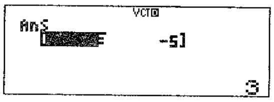
VctA $=[1,0]$, VctB $=[0,1]$.

Ấn AC, nhập $(2\text{VctA}-3\text{VctB})-(-\text{VctA}+2\text{VctB})$:

(2 SHIFT 5 3 − 3 SHIFT 5 4) − ((−) SHIFT 5 3 + 2 SHIFT 5 4)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[3,-5]$.

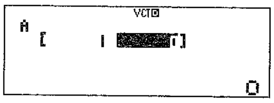
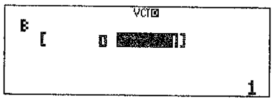


Vậy $\vec{c}=(3;-5)$.

Câu 5: Đáp án A.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

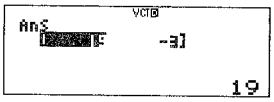
VctA $=[1,0]$, VctB $=[0,1]$.

Ấn AC, nhập $2(2\text{VctA}-3\text{VctB})-3(-5\text{VctA}-\text{VctB})$:

2 (2 SHIFT 5 3 − 3 SHIFT 5 4) − 3 ((−) 5 SHIFT 5 3 − SHIFT 5 4)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[19,-3]$.



Vậy $(X;Y)=(19;-3)\rightarrow XY=-57$.

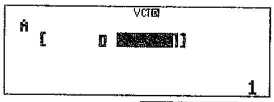
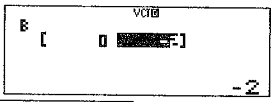
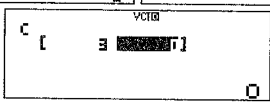
Câu 6: Đáp án B.

$ABDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow B-A=D-C \Leftrightarrow D=B+C-A$.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

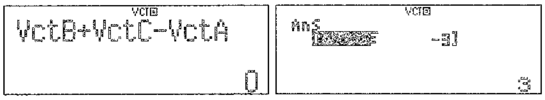
VctA $=[0,1]$, VctB $=[0,-2]$ và VctC $=[3,0]$.

Ấn AC, nhập vào màn hình VctB + VctC − VctA:

SHIFT 5 4 + SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[3,-3]$.

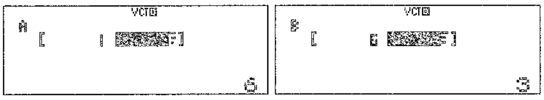


Vậy $D(3;-3)$.

Câu 7: Đáp án A.

$\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow M - P = 2(N-P) \Leftrightarrow P = 2N - M$

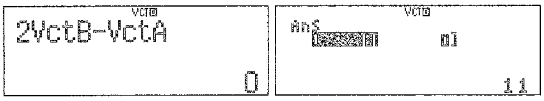
Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA} = [1,6]$, $\text{VctB} = [6,3]$.



Ấn AC, nhập vào màn hình $2\text{VctB} - \text{VctA}$:

2 SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3

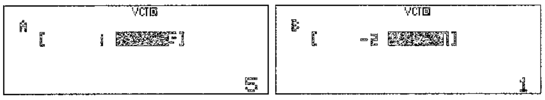
Ấn = máy hiện kết quả bằng $[11,0]$.



Vậy $P(11;0)$.

Câu 8: Đáp án C.

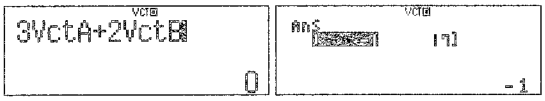
Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA} = [1,5]$, $\text{VctB} = [-2,1]$.



Ấn AC, nhập vào màn hình $3\text{VctA} + 2\text{VctB}$:

3 SHIFT 5 3 + 2 SHIFT 5 4

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[-1,17]$.

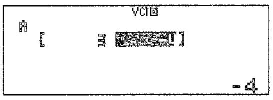


Vậy $\vec{c} = (-1;17)$.

Câu 9: Đáp án B.

Đường thẳng Δ có VTPT là $\vec{n} = (3;-4)$.

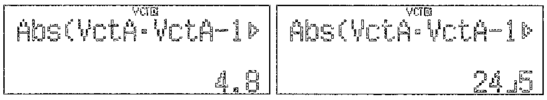
Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy vec-tơ: $\text{VctA} = [3,-4]$.



Ấn AC, nhập $\text{Abs}(\text{VctA} \circ \text{VctA} - 1) \div \text{Abs}(\text{VctA})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 3 − 1)
÷ SHIFT hyp SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $4,8 = \frac{24}{5}$.

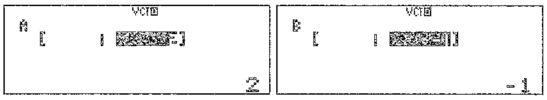


Vậy $d(M,\Delta) = \frac{24}{5}$.

Câu 10: Đáp án A.

Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (1;2)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1;-1)$.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA} = [1,2]$, $\text{VctB} = [1,-1]$.



Ấn AC, nhập vào màn hình

$\text{Abs}(\text{VctA} \circ \text{VctB}) \div (\text{Abs}(\text{VctA}) \times \text{Abs}(\text{VctB}))$

SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (
SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4))

Ấn = máy hiện kết quả bằng 0,136227766. Ấn SHIFT RCL) gán kết quả này vào biến nhớ $X(\text{Ans} \to X)$



Ấn MODE 1 (COMP), ấn √ ALPHA) x². Ấn = máy hiện kết quả bằng $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

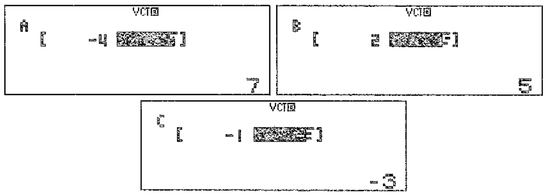


Vậy $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. Phương pháp tọa độ tam tuyến

Câu 11: Đáp án D.

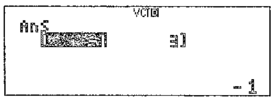
Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA} = [-4,7]$, $\text{VctB} = [2,5]$, $\text{VctC} = [-1,-3]$.



Ấn AC, nhập vào màn hình $(\text{VctA} + \text{VctB} + \text{VctC}) \div 3$:

(SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 + SHIFT 5 5) ÷ 3

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[-1,3]$.



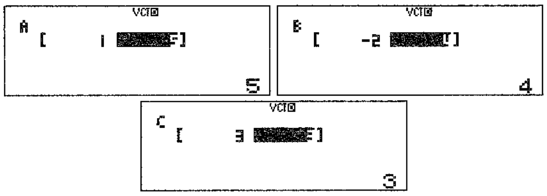
Vậy $G(-1;3)$.

Câu 12: Đáp án C.

G là trọng tâm của ΔABC nên $G=\dfrac{A+B+C}{3}$

$\Leftrightarrow C=3G-A-B$.

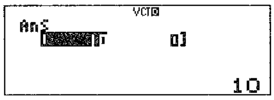
Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:
$\text{VctA}=[1,5]$, $\text{VctB}=[-2,4]$, $\text{VctC}=[3;3]$.



Nhập vào màn hình $3\text{VctC}-\text{VctA}-\text{VctB}$:

[3] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4]

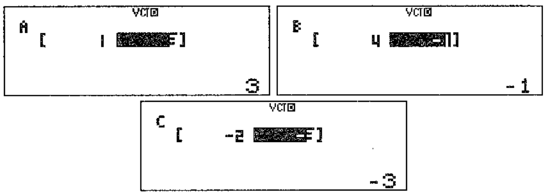
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[10,0]$.



Vậy $C(10;0)$.

Câu 13: Đáp án B.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:
$\text{VctA}=[1,3]$, $\text{VctB}=[4,-1]$, $\text{VctC}=[-2,-3]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

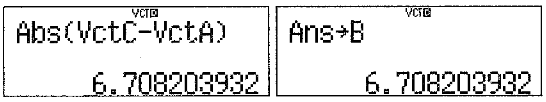
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,32455532 và gán vào biến nhớ A $(\text{Ans}\to\text{A})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

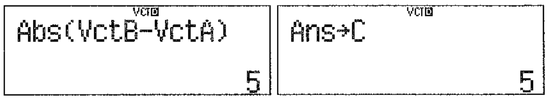
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,708203932 và gán vào biến nhớ B $(\text{Ans}\to\text{B})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5 và gán vào biến nhớ C $(\text{Ans}\to\text{C})$.



Nhập vào màn hình $A^2(B^2+C^2-A^2)$:

[ALPHA] [(−)] [x²] [(] [ALPHA] [°'"] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1200 và gán vào D $(\text{Ans}\to\text{D})$.



Nhập vào màn hình $B^2(C^2+A^2-B^2)$:

[ALPHA] [°'"] [x²] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [°'"] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 900 và gán vào E $(\text{Ans}\to\text{E})$.



Nhập vào màn hình $C^2(A^2+B^2-C^2)$:

[ALPHA] [hyp] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [°'"] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]

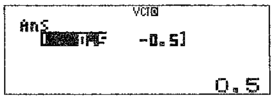
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1500 và gán vào F $(\text{Ans}\to\text{F})$.



Nhập $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(\text{D}+\text{E}+\text{F})$:

[(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]

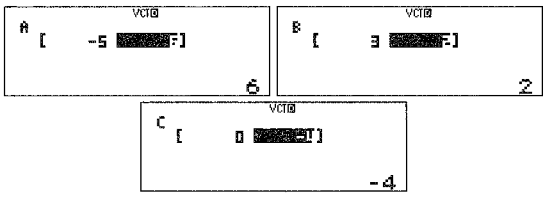
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$.



Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp là $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 14: Đáp án C.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:
$\text{VctA}=[-5,6]$, $\text{VctB}=[3,2]$, $\text{VctC}=[0,-4]$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctC - VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 11,18033989 và gán vào biến nhớ B $(Ans \to B)$.

Abs(VctC−VctA) 11.18033989	Ans→B 11.18033989

Nhập vào màn hình $Abs(VctB - VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 8,94427191 và gán vào biến nhớ C $(Ans \to C)$.

Abs(VctB−VctA) 8.94427191	Ans→C 8.94427191

Nhập vào màn hình $(BVctB + CVctC) \div (B + C)$:

(ALPHA °''' SHIFT 5 4 + ALPHA hyp SHIFT 5 5) ÷ (ALPHA °''' + ALPHA hyp)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Ans [■■■■ -0.666] 5⌟3	Ans [1.6666 ■■■■] -2⌟3

Vậy chân đường phân giác trong góc A có tọa độ là $\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 15: Đáp án A.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $VctA = [5,4], VctB = [2,7], VctC = [-2,-1]$.

A [5 ■■■] 4	B [2 ■■■] 7	C [-2 ■■■] -1

Ấn AC, nhập vào màn hình $Abs(VctC - VctB)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 8,94427191 và gán vào biến nhớ A $(Ans \to A)$.

Abs(VctC−VctB) 8.94427191	Ans→A 8.94427191

Nhập vào màn hình $Abs(VctC - VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 8,602325267 và gán vào biến nhớ B $(Ans \to B)$.

Abs(VctC−VctA) 8.602325267	Ans→B 8.602325267

Nhập vào màn hình $Abs(VctB - VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 4,242640687 và gán vào biến nhớ C $(Ans \to C)$.

Abs(VctB−VctA) 4.242640687	Ans→C 4.242640687

Nhập vào màn hình $1 \div (B^2 + C^2 - A^2)$:

1 ÷ (ALPHA °''' x² + ALPHA hyp x² − ALPHA (−) x²)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 0,8333... và gán vào biến nhớ D $(Ans \to D)$.

1÷(B²+C²−A²) 0.08333333333	Ans→D 0.08333333333

Nhập vào màn hình $1 \div (C^2 + A^2 - B^2)$:

1 ÷ (ALPHA hyp x² + ALPHA (−) x² − ALPHA °''' x²)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 0,041666... và gán vào E $(Ans \to E)$.

1÷(C²+A²−B²) 0.04166666667	Ans→E 0.04166666667

Nhập vào màn hình $1 \div (A^2 + B^2 - C^2)$:

1 ÷ (ALPHA (−) x² + ALPHA °''' x² − ALPHA hyp x²)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $7,352941176 \times 10^{-3}$ và gán vào F $(Ans \to F)$.

1÷(A²+B²−C²) 7.352941176×10⁻³	Ans→F 7.352941176×10⁻³

Nhập $(DVctA + EVctB + FVctC) \div (D + E + F)$:

(ALPHA sin SHIFT 5 3 + ALPHA cos SHIFT 5 4 + ALPHA tan SHIFT 5 5) ÷ (ALPHA sin + ALPHA cos + ALPHA tan)

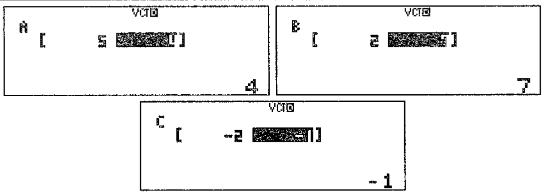
Ấn = máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right]$.

Ans [■■■■ 4.6666] 11⌟3	Ans [3.6666 ■■■■] 14⌟3

Vậy $H\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

Câu 16: Đáp án A.

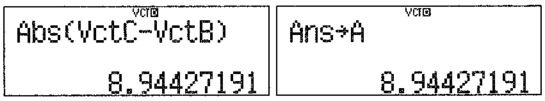
Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $VctA = [5,4], VctB = [2,7], VctC = [-2,-1]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

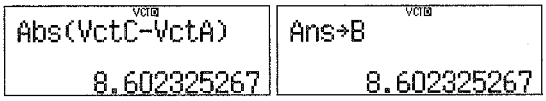
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 8,94427191 và gán vào biến nhớ A $(\text{Ans}\to\text{A})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

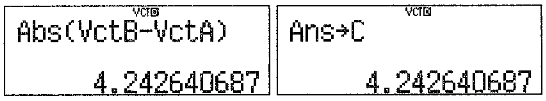
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 8,602325267 và gán vào biến nhớ B $(\text{Ans}\to\text{B})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 4,242640687 và gán vào biến nhớ C $(\text{Ans}\to\text{C})$.



Nhập vào màn hình $A^2(B^2+C^2-A^2)$:

[ALPHA] [(−)] [x²] [(] [ALPHA] [°'''] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]

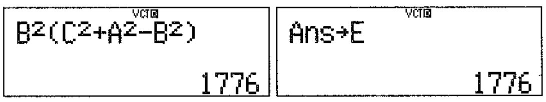
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 960 và gán vào D $(\text{Ans}\to\text{D})$.



Nhập vào màn hình $B^2(C^2+A^2-B^2)$:

[ALPHA] [°'''] [x²] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [°'''] [x²] [)]

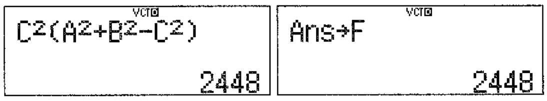
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1776 và gán vào E $(\text{Ans}\to\text{E})$.



Nhập vào màn hình $C^2(A^2+B^2-C^2)$:

[ALPHA] [hyp] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [°'''] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 2448 và gán vào F $(\text{Ans}\to\text{F})$.



Nhập $(\text{DVctA}+\text{EVctB}+\text{FVctC})\div(\text{D}+\text{E}+\text{F})$:

[(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]

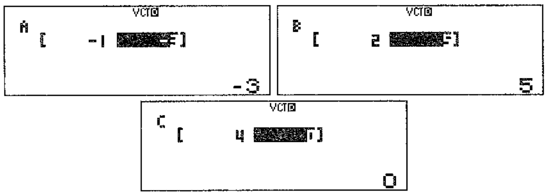
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]$.



Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp là $\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Câu 17: Đáp án D.

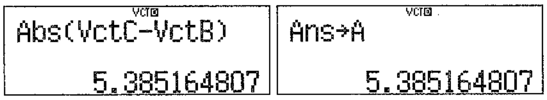
Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=[-1,-3], \text{VctB}=[2,5], \text{VctC}=[4,0]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5,385164807 và gán vào biến nhớ A $(\text{Ans}\to\text{A})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

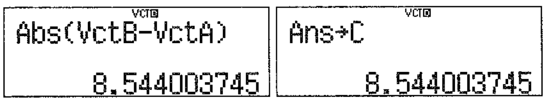
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5,830951895 và gán vào biến nhớ B $(\text{Ans}\to\text{B})$.



Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5,544003745 và gán vào biến nhớ C $(\text{Ans}\to\text{C})$.



Nhập vào màn hình $1\div\left(B^2+C^2-A^2\right)$:

[1] [÷] [(] [ALPHA] [•••] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,01282051282 và gán vào biến nhớ D $(Ans\to D)$.

```
1÷(B²+C²-A²)          | Ans→D
       0.01282051282  |        0.01282051282
```

Nhập vào màn hình $1\div\left(C^2+A^2-B^2\right)$:

[1] [÷] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [•••] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,01470588235 và gán vào E $(Ans\to E)$.

```
1÷(C²+A²-B²)          | Ans→E
       0.01470588235  |        0.01470588235
```

Nhập vào màn hình $1\div\left(A^2+B^2-C^2\right)$:

[1] [÷] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [•••] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng –0,1 và gán vào F $(Ans\to F)$.

```
1÷(A²+B²-C²)          | Ans→F
                -0.1  |                 -0.1
```

Nhập $(DVctA+EVctB+FVctC)\div(D+E+F)$:

[(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{164}{31},-\frac{15}{31}\right]$.

```
Ans [5.290 ... -0.483]  | Ans [5.290 ... ]
               164⌟31   |              -15⌟31
```

Vậy $H\left(\frac{164}{31},-\frac{15}{31}\right)$.

Câu 18: Đáp án C.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $VctA=[-1,4], VctB=[-4,0], VctC=[2,-2]$.

```
A [  -1  ...]   | B [  -4  ...]
             4  |              0
        C [   2  ...]
                  -2
```

Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,32455532 và gán vào biến nhớ A $(Ans\to A)$.

```
Abs(VctC-VctB)   | Ans→A
     6.32455532  |      6.32455532
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,708203932 và gán vào biến nhớ B $(Ans\to B)$.

```
Abs(VctC-VctA)   | Ans→B
    6.708203932  |     6.708203932
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5 và gán vào biến nhớ C $(Ans\to C)$.

```
Abs(VctB-VctA)   | Ans→C
              5  |               5
```

Nhập vào màn hình $A^2\left(B^2+C^2-A^2\right)$:

[ALPHA] [(−)] [x²] [(] [ALPHA] [•••] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1200 và gán vào D $(Ans\to D)$.

```
A²(B²+C²-A²)     | Ans→D
           1200  |            1200
```

Nhập vào màn hình $B^2\left(C^2+A^2-B^2\right)$:

[ALPHA] [•••] [x²] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [•••] [x²] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 900 và gán vào E $(Ans\to E)$.

```
B²(C²+A²-B²)     | Ans→E
            900  |             900
```

Nhập vào màn hình $C^2\left(A^2+B^2-C^2\right)$:

[ALPHA] [hyp] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [•••] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]

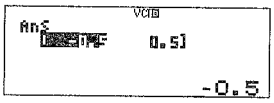
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1500 và gán vào F $(Ans\to F)$.

```
C²(A²+B²-C²)     | Ans→F
           1500  |            1500
```

Nhập $(DVctA+EVctB+FVctC)\div(D+E+F)$:

[(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

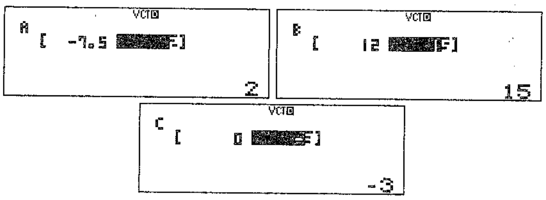


Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 19: Đáp án D.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

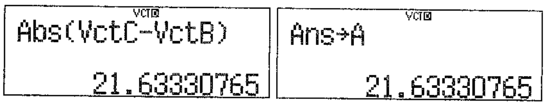
$VctA=\left[-\frac{15}{2},2\right], VctB=\left[12,15\right], VctC=\left[0,-3\right]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

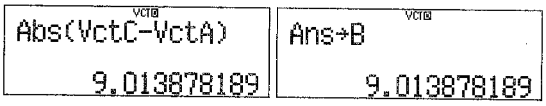
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 21,63330765 và gán vào biến nhớ A $(Ans \to A)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

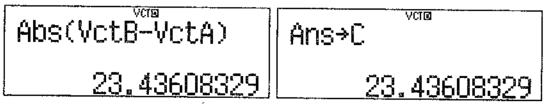
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 9,013878189 và gán vào biến nhớ B $(Ans \to B)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

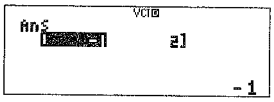
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 23,43608329 và gán vào biến nhớ C $(Ans \to C)$.



Nhập $(AVctA+BVctB+CVctC)\div(A+B+C)$:

[(] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [°'"] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [hyp] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[-1,2\right]$.

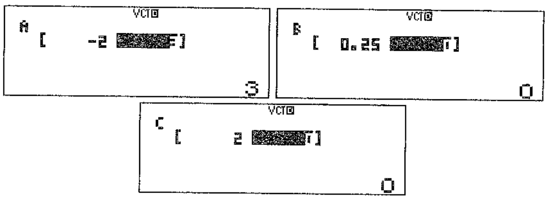


Vậy tâm đường tròn nội tiếp $J(-1;2)$.

Câu 20: Đáp án C.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

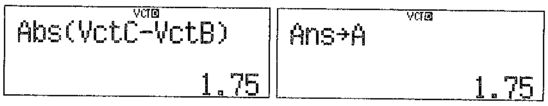
$VctA=\left[-2,3\right], VctB=\left[\frac{1}{4},0\right], VctC=\left[2,0\right]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

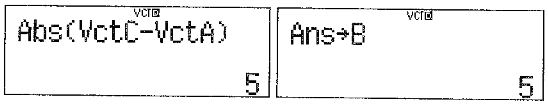
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1,75 và gán vào biến nhớ A $(Ans \to A)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

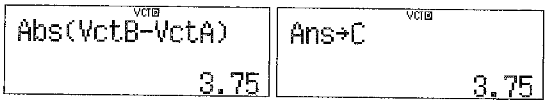
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 5 và gán vào biến nhớ B $(Ans \to B)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

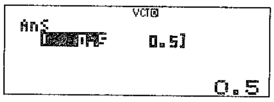
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 3,75 và gán vào biến nhớ C $(Ans \to C)$.



Nhập $(AVctA+BVctB+CVctC)\div(A+B+C)$:

[(] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [°'"] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°'"] [+] [ALPHA] [hyp] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.



Vậy tâm đường tròn nội tiếp $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 21: Đáp án B.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

$VctA=\left[3,-1\right], VctB=\left[1,5\right], VctC=\left[6,0\right]$.

```
VctA [3  -1]
VctB [1  5]
VctC [6  0]
```

Ấn [AC], nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,071067812 và gán vào biến nhớ A $(\text{Ans}\to\text{A})$.

```
Abs(VctC-VctB)          Ans→A
      7.071067812             7.071067812
```

Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 3,16227766 và gán vào biến nhớ B $(\text{Ans}\to\text{B})$.

```
Abs(VctC-VctA)          Ans→B
       3.16227766              3.16227766
```

Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,32455532 và gán vào biến nhớ C $(\text{Ans}\to\text{C})$.

```
Abs(VctB-VctA)          Ans→C
       6.32455532              6.32455532
```

Nhập vào màn hình $1\div(C^2+A^2-B^2)$:

1 ÷ (ALPHA hyp x² + ALPHA (−) x² − ALPHA °''' x²)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,0125 và gán vào D $(\text{Ans}\to\text{D})$.

```
1÷(C²+A²-B²)            Ans→D
           0.0125                  0.0125
```

Nhập vào màn hình $1\div(A^2+B^2-C^2)$:

1 ÷ (ALPHA (−) x² + ALPHA °''' x² − ALPHA hyp x²)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,05 và gán vào E $(\text{Ans}\to\text{E})$.

```
1÷(A²+B²-C²)            Ans→E
             0.05                    0.05
```

Nhập $(\text{DVctB}+\text{EVctC})\div(\text{D}+\text{E})$:

(ALPHA sin SHIFT 5 4 + ALPHA cos SHIFT 5 5) ÷ (ALPHA sin + ALPHA cos)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $[5,1]$.

```
Ans [5  1]
```

Vậy $A'(5;1)$.

Câu 22: Đáp án A.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=[3,-4],\ \text{VctB}=[-4,-2],\ \text{VctC}=[1,3]$.

```
VctA [3  -4]
VctB [-4  -2]
VctC [1  3]
```

Ấn [AC], nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,071067812 và gán vào biến nhớ A $(\text{Ans}\to\text{A})$.

```
Abs(VctC-VctB)          Ans→A
      7.071067812             7.071067812
```

Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,280109889 và gán vào biến nhớ B $(\text{Ans}\to\text{B})$.

```
Abs(VctC-VctA)          Ans→B
      7.280109889             7.280109889
```

Nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,280109889 và gán vào biến nhớ C $(\text{Ans}\to\text{C})$.

```
Abs(VctB-VctA)          Ans→C
      7.280109889             7.280109889
```

Nhập vào màn hình $1\div(C^2+A^2-B^2)$:

1 ÷ (ALPHA hyp x² + ALPHA (−) x² − ALPHA °''' x²)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,02 và gán vào D $(\text{Ans}\to\text{D})$.

```
1÷(C²+A²-B²)            Ans→D
             0.02                    0.02
```

Nhập vào màn hình $1\div(A^2+B^2-C^2)$:

1 ÷ (ALPHA (−) x² + ALPHA °''' x² − ALPHA hyp x²)

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 0,02 và gán vào E $(\text{Ans}\to\text{E})$.

```
1÷(A²+B²−C²)        Ans→E
        0.02                0.02
```

Nhập $(DVctB+EVctC)\div(D+E)$:

(ALPHA sin SHIFT 5 4 + ALPHA cos SHIFT 5 5) ÷ (ALPHA sin + ALPHA cos)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$.

```
Ans     0.5]
        -1.5
```

Vậy $H\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 23: Đáp án C.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $VctA=[2,6], VctB=[-3,-4], VctC=[5,0]$.

```
A [  2  ]      B [  -3  ]      C [  5  ]
      6              -4              0
```

Ấn AC, nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 8,94427191 và gán vào biến nhớ $A\,(Ans\to A)$.

```
Abs(VctC−VctB)      Ans→A
    8.94427191          8.94427191
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 6,708203932 và gán vào biến nhớ $B\,(Ans\to B)$.

```
Abs(VctC−VctA)      Ans→B
    6.708203932         6.708203932
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 11,18033989 và gán vào biến nhớ $C\,(Ans\to C)$.

```
Abs(VctB−VctA)      Ans→C
    11.18033989         11.18033989
```

Nhập $(AVctA+BVctB+CVctC)\div(A+B+C)$:

(ALPHA (−) SHIFT 5 3 + ALPHA °'" SHIFT 5 4 + ALPHA hyp SHIFT 5 5) ÷ (ALPHA (−) + ALPHA °'" + ALPHA hyp)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[2,1]$.

```
Ans     1]
        2
```

Vậy tâm đường tròn nội tiếp $J(2;1)$.

Câu 24: Đáp án D.

Sử dụng MODE 8 (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ: $VctA=\left[\frac{1}{2},4\right], VctB=[5,-2], VctC=[-2,-2]$.

```
A [  0.5  ]    B [  5  ]      C [  -2  ]
      4              -2             -2
```

Ấn AC, nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 4)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 7 và gán vào biến nhớ $A\,(Ans\to A)$.

```
Abs(VctC−VctB)      Ans→A
             7                   7
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 5 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 6,5 và gán vào biến nhớ $B\,(Ans\to B)$.

```
Abs(VctC−VctA)      Ans→B
           6.5                 6.5
```

Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3)

Ấn = máy hiện kết quả bằng 7,5 và gán vào biến nhớ $C\,(Ans\to C)$.

```
Abs(VctB−VctA)      Ans→C
           7.5                 7.5
```

Nhập $(-AVctA+BVctB+CVctC)\div(-A+B+C)$:

((−) ALPHA (−) SHIFT 5 3 + ALPHA °'" SHIFT 5 4 + ALPHA hyp SHIFT 5 5) ÷ ((−) ALPHA (−) + ALPHA °'" + ALPHA hyp)

Ấn = máy hiện kết quả bằng $[2,-8]$.

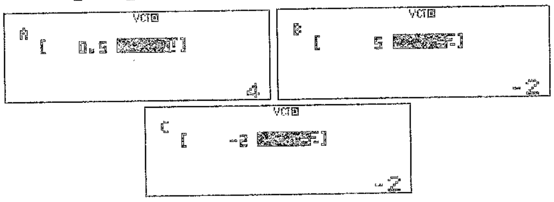
```
Ans     -8]
        2
```

Vậy tâm đường tròn bàng tiếp góc A là $K(2;-8)$.

Câu 25: Đáp án C.

Sử dụng [MODE] [8] (VECTOR), đưa vào máy các vec-tơ:

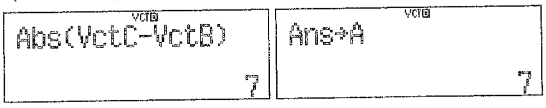
$VctA=\left[\frac{1}{2},4\right], VctB=\left[5,-2\right], VctC=\left[-2,-2\right]$.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctB)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]

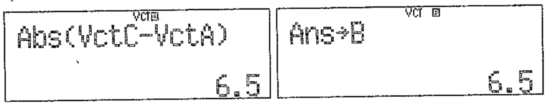
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7 và gán vào biến nhớ A $(Ans\rightarrow A)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctC-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

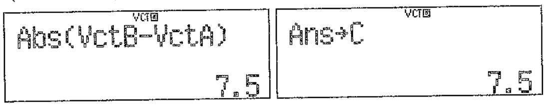
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6,5 và gán vào biến nhớ B $(Ans\rightarrow B)$.



Nhập vào màn hình $Abs(VctB-VctA)$:

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)]

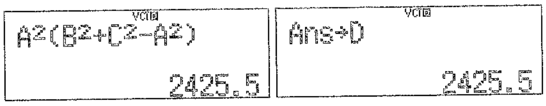
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 7,5 và gán vào biến nhớ C $(Ans\rightarrow C)$.



Nhập vào màn hình $A^2(B^2+C^2-A^2)$:

[ALPHA] [(−)] [x²] [(] [ALPHA] [°'"] [x²] [+] [ALPHA] [hyp] [x²] [−] [ALPHA] [(−)] [x²] [)]

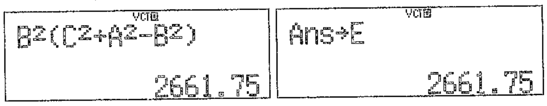
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 2425,5 và gán vào D $(Ans\rightarrow D)$.



Nhập vào màn hình $B^2(C^2+A^2-B^2)$:

[ALPHA] [°'"] [x²] [(] [ALPHA] [hyp] [x²] [+] [ALPHA] [(−)] [x²] [−] [ALPHA] [°'"] [x²] [)]

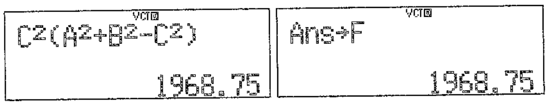
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 2661,75 và gán vào E $(Ans\rightarrow E)$.



Nhập vào màn hình $C^2(A^2+B^2-C^2)$:

[ALPHA] [hyp] [x²] [(] [ALPHA] [(−)] [x²] [+] [ALPHA] [°'"] [x²] [−] [ALPHA] [hyp] [x²] [)]

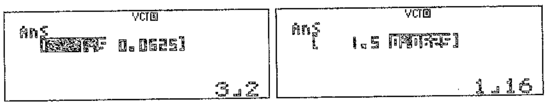
Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1968,75 và gán vào F $(Ans\rightarrow F)$.



Nhập $(DVctA+EVctB+FVctC)\div(D+E+F)$:

[(] [ALPHA] [sin] [SHIFT] [5] [3] [+] [ALPHA] [cos] [SHIFT] [5] [4] [+] [ALPHA] [tan] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [(] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [cos] [+] [ALPHA] [tan] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{3}{2},\frac{1}{16}\right]$.



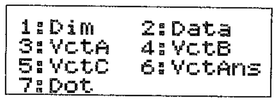
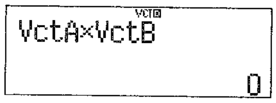
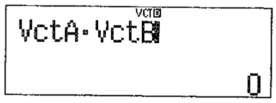
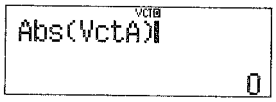
Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right)$.

CHỦ ĐỀ 11: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

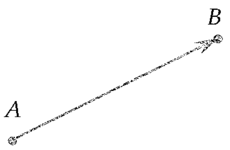
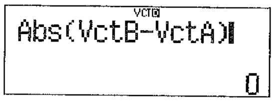
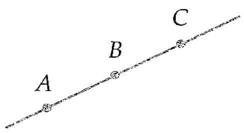
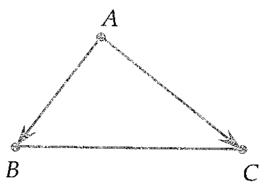
1. Các chế độ làm việc trên máy tính

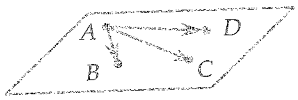
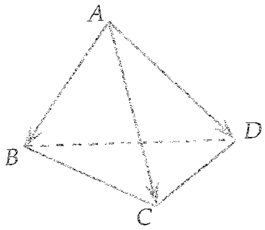
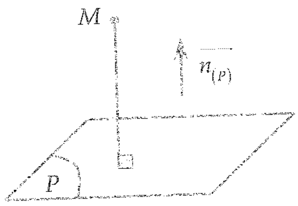
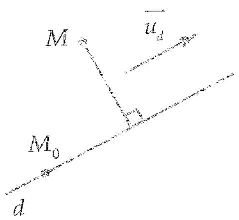
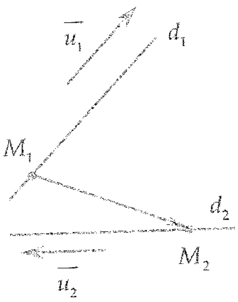
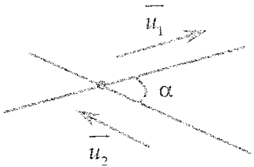
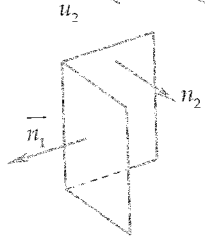
Các bài toán về phương pháp tọa độ trong không gian được thực hiện trên phương thức VECTOR của máy tính.

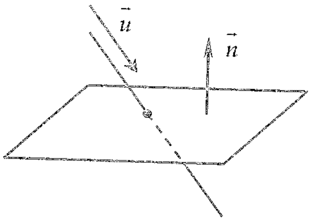
Ấn [MODE] [8] để đưa máy về phương thức VECTOR. Chọn [1](VctA), hoặc chọn [2](VctB), hoặc chọn [3](VctC), sau đó ấn [1](3) để đưa vào các phần tử (tọa độ) các vectơ trong không gian ba chiều.

1. Gán dữ liệu mới cho biến vectơ (nhập tọa độ vectơ) Ấn [SHIFT] [5](VECTOR). Sau đó chọn [1](Dim) hoặc [2](Data). Muốn nhập tọa độ các vectơ nào thì ấn [1](VctA), hoặc [2](VctB), hoặc [3](VctC), sau đó chọn [1](3) để đưa vào tọa độ trong không gian ba chiều.	
2. Tích có hướng của hai véctơ Dùng dấu [×] Chẳng hạn muốn tính tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} \equiv$ VctA và $\vec{b} \equiv$ VctB. Ấn [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4]	
5. Tích vô hướng của hai vectơ Dùng lệnh [SHIFT] [5](VECTOR) [7](Dot) Chẳng hạn muốn tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} \equiv$ VctA và $\vec{b} \equiv$ VctB. Ấn: [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4]	
6. Độ lớn (độ dài) của vectơ: $\left\|\vec{a}\right\| = \text{Abs}(\text{VctA})$ Dùng lệnh [SHIFT] [hyp](Abs) Chẳng hạn muốn tính độ dài của vectơ $\vec{a} \equiv$ VctA. Ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)]	

2. Một số công thức hình học Oxyz và dạng Casio tương ứng

	1. Độ lớn (độ dài) của vectơ $\overrightarrow{AB}$ Để tính $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, đưa vào tọa độ điểm A, B lần lượt là VctA và VctB.	Nhập $\text{Abs}(\text{VctB} - \text{VctA})$ 
	2. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$ Đưa vào tọa độ $A \equiv$ VctA, $B \equiv$ VctB và $C \equiv$ VctC.	Nhập vào $(\text{VctB} - \text{VctA}) \times (\text{VctC} - \text{VctA})$
	3. Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\|$ Đưa vào tọa độ điểm $A \equiv$ VctA, $B \equiv$ VctB và $C \equiv$ VctC.	Nhập $\text{Abs}((\text{VctB} - \text{VctA}) \times (\text{VctC} - \text{VctA})) \div 2$.

	4. Bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng khi $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\circ\overrightarrow{AD}=0$. Đưa vào tọa độ $\overrightarrow{AB}\equiv$ VctA, $\overrightarrow{AC}\equiv$ VctB và $\overrightarrow{AD}\equiv$ VctC.	Nhập (VctA × VctB) ∘ VctC
	5. Thể tích tứ diện: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\circ\overrightarrow{AD}\right\|$. Đưa vào máy tọa độ $\overrightarrow{AB}\equiv$ VctA, $\overrightarrow{AC}\equiv$ VctB và $\overrightarrow{AD}\equiv$ VctC.	Nhập Abs((VctA × VctB) ∘ VctC) ÷ 6.
	6. Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$. $d(M,(P))=\frac{\left\|Ax_M+By_M+Cz_M+D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $\longrightarrow d(M,(P))=\frac{\left\|M\circ\overrightarrow{n_{(P)}}+D\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_{(P)}}\right\|}$. Đưa vào máy tọa độ điểm M là VctA, tọa độ của vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}$ là VctB	Nhập Abs(VctA ∘ VctB + D) ÷ Abs(VctB).
	7. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d (đi qua M_0 và vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$) $d(M,d)=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{MM_0},\overrightarrow{u_d}\right]\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_d}\right\|}=\frac{\text{Abs}\left(\overrightarrow{MM_0}\times\overrightarrow{u_d}\right)}{\text{Abs}\left(\overrightarrow{u_d}\right)}$. Đưa vào máy $\overrightarrow{MM_0}\equiv$ VctA và $\overrightarrow{u_d}\equiv$ VctB	Nhập Abs(VctA × VctB) ÷ Abs(VctB).
	8. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: d_1 đi qua M_1 và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, d_2 đi qua M_2 và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$. $d(d_1,d_2)=\frac{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\circ\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right\|}{\left\|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right\|}$ $\longrightarrow d(d_1,d_2)=\frac{\text{Abs}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\circ\left(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right)\right)}{\text{Abs}\left(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right)}$. Đưa vào máy $\overrightarrow{M_1M_2}\equiv$ VctA, $\overrightarrow{u_1}\equiv$ VctB và $\overrightarrow{u_2}\equiv$ VctC.	Nhập Abs(VctA ∘ (VctB × VctC)) ÷ Abs(VctB × VctC).
 	9. Góc giữa hai đường thẳng (hoặc hai mặt phẳng): $\cos\alpha=\frac{\left\|\overrightarrow{u_1}\circ\overrightarrow{u_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_1}\right\|\left\|\overrightarrow{u_2}\right\|}\left(=\frac{\left\|\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\|\left\|\overrightarrow{n_2}\right\|}\right)$. Đưa vào máy $\overrightarrow{u_1}\equiv$ VctA (hay $\overrightarrow{n_1}\equiv$ VctA), $\overrightarrow{u_2}\equiv$ VctB (hay $\overrightarrow{n_2}\equiv$ VctB).	Nhập Abs(VctA ∘ VctB) ÷ (Abs(VctA) × Abs(VctB)).



10. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\sin\alpha = \dfrac{\left\|\vec{u}\bullet\vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{n}\right\|}$ Đưa vào máy $\vec{u}\equiv$ VctA và $\vec{n}\equiv$ VctB.	Nhập Abs(VctA • VctB) ÷ (Abs(VctA) × Abs(VctB))

3. Các dạng toán về phương pháp tọa độ trong không gian

a. Các phép tính tọa độ trong không gian

STUDY TIPS

Cần nhớ tọa độ của các vec-tơ đơn vị trong không gian *Oxyz* là $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$.

Tổng quát:

Nếu $\vec{u}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ thì $\vec{u}=(i;j;k)$.

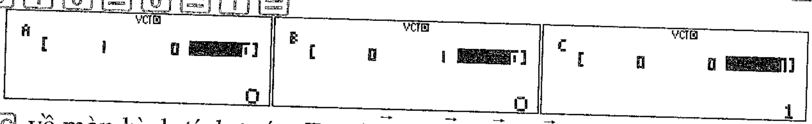
Ví dụ 1: Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=-6\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

A. $(-6;8;4)$ B. $(6;8;4)$ C. $(3;4;2)$ D. $(-3;4;2)$

Lời giải

Đưa vào máy các vectơ VctA $=[1,0,0]$, VctB $=[0,1,0]$ và VctC $=[0,0,1]$.

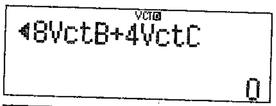
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [0] [=] [1] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [0] [=] [0] [=] [1] [=]

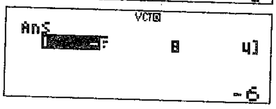


Ấn [AC] về màn hình tính toán. Ta có $\vec{a}=-6\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}=-6\text{VctA}+8\text{VctB}+4\text{VctC}$.

Ấn [(-)] [6] [SHIFT] [5] [3] [+] [8] [SHIFT] [5] [4] [+] [4] [SHIFT] [5] [5].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $[-6,8,4]$. Vậy $\vec{a}=(-6;8;4)$.





Đáp án A.

Ví dụ 2: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(5;7;2)$ và $B(3;0;4)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

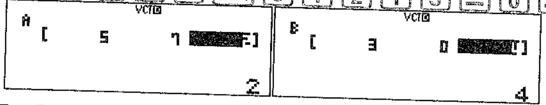
A. $\overrightarrow{AB}=(-2;-7;2)$ B. $\overrightarrow{AB}=(2;7;2)$

C. $\overrightarrow{AB}=(8;7;6)$ D. $\overrightarrow{AB}=(2;7;-2)$

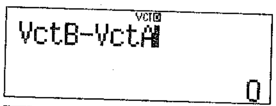
Lời giải

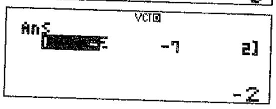
Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[5,7,2]$ và VctB $=[3,0,4]$.

[MODE] [8] [1] [1] [5] [=] [7] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [3] [=] [0] [=] [4] [=]



Khi đó $\overrightarrow{AB}=$ VctB – VctA.





Ấn [AC] để về màn hình tính toán. Nhập vào máy VctB – VctA, ấn [SHIFT] [5] [4] [–] [SHIFT] [5] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $[-2,-7,2]$. Vậy $\overrightarrow{AB}=(-2;-7;2)$.

Đáp án A.

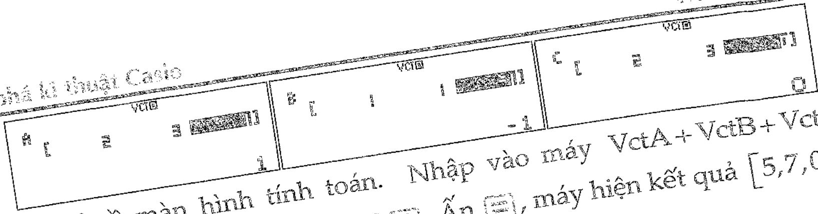
Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các vector $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(1;1;-1)$, $\vec{c}=(2;3;0)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{d}$ biết $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

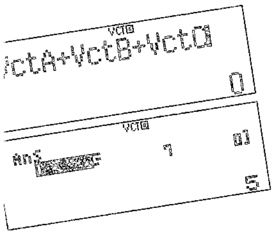
A. $(5;7;0)$ B. $(2;3;1)$ C. $(1;3;1)$ D. $(-2;-1;1)$

Lời giải

Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[2,3,1]$, VctB $=[1;1;-1]$, VctC $=[2;3;0]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [3] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [(-)] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [3] [=] [0] [=]





Ấn [AC] để về màn hình tính toán. Nhập vào máy VctA + VctB + VctC, ấn [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [+] [SHIFT] [5] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả $[5,7,0]$.

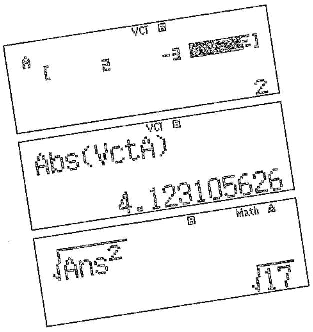
Vậy $\vec{d}=(5;7;0)$.

Đáp án A.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*. Cho vector $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, khi đó độ dài của của vecto $\vec{u}$ là:

A. $|\vec{u}|=\sqrt{17}$ B. $|\vec{u}|=4$ C. $|\vec{u}|=\sqrt{13}$ D. $|\vec{u}|=2\sqrt{3}$

Lời giải



Ta có $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ nên $\vec{u}=(2;-3;2)$. Đưa vào máy tính VctA $=[2,-3,2]$

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [-] [3] [=] [2] [=]

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình Abs(VctA):

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=], máy hiện kết quả là 4,123105626.

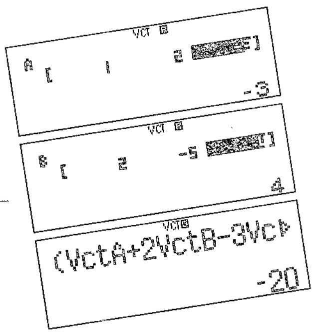
Ấn [MODE] [1] [√] [Ans] [x²] [=], máy hiện kết quả là $\sqrt{17}$. Vậy $|\vec{u}|=\sqrt{17}$.

Đáp án A.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai vector $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ và $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$. Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ của hai vector đó là:

A. 20 B. −20 C. 18 D. −18

Lời giải



Ta có $\begin{cases}\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\\ \vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{a}=(1;2;-3)\\ \vec{b}=(2;-5;4)\end{cases}$

Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[1,2,-3]$, VctB $=[2,-5,4]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [2] [=] [(-)] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [(-)] [5] [=] [4] [=]

Khi đó $\vec{a}.\vec{b}=(\text{VctA}+2\text{VctB}-3\text{VctC})\bullet(2\text{VctA}-5\text{VctB}+4\text{VctC})$.

Ấn [AC] về màn hình tính toán.

Nhập vào máy $(\text{VctA}+2\text{VctB}-3\text{VctC})\bullet(2\text{VctA}-5\text{VctB}+4\text{VctC})$:

[(] [SHIFT] [5] [3] [+] [2] [SHIFT] [5] [4] [-] [3] [SHIFT] [5] [5] [)] [SHIFT] [5] [7] [(] [2] [SHIFT] [5] [3] [-] [5] [SHIFT] [5] [4] [+] [4] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả −20.

Đáp á

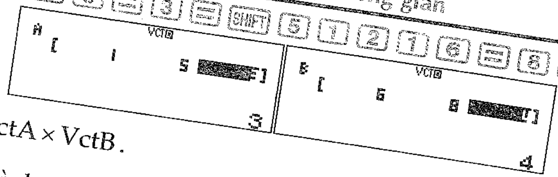
Ví dụ 6: Trong không gian *Oxyz*, cho hai vector $\vec{a}=(1;5;3)$ và $\vec{b}=(6;8;4)$. Tích có hướng $[\vec{a},\vec{b}]$ của hai vector đó là một vector có tọa độ:

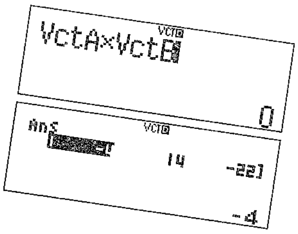
A. $(-4;14;22)$. B. $(-4;14;-22)$. C. $(4;-14;22)$. D. $(4;14;$

Lời giải

Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[1,5,3]$ và VctB $=[6,8,4]$.

MODE 8 1 1 1 = 5 = 3 = SHIFT 5 1 2 1 6 = 8 = 4 =





Khi đó $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \text{VctA} \times \text{VctB}$.

Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{VctA} \times \text{VctB}$, ấn: SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4. Ấn =, máy hiện kết quả là $\left[-4,14,-22\right]$.

Vậy $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (-4;14;-22)$.

Ví dụ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ và $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}$. Tích có hướng $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ của hai vector đó là:

Đáp án B.

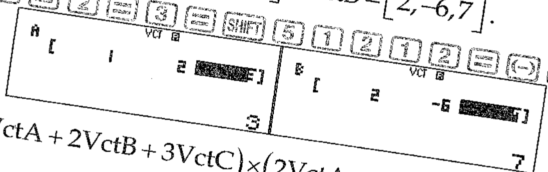
A. $(32;1;10)$ B. $(32;-1;10)$ C. $(32;-1;-10)$ D. $(32;1;-10)$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 7\vec{k}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (1;2;3) \\ \vec{b} = (2;-6;7) \end{cases}$

Đưa vào máy các vectơ: $\text{VctA} = [1,2,3]$, $\text{VctB} = [2,-6,7]$.

MODE 8 1 1 1 = 2 = 3 = SHIFT 5 1 2 1 2 = (−) 6 = 7 =

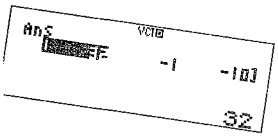


Khi đó $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (\text{VctA} + 2\text{VctB} + 3\text{VctC}) \times (2\text{VctA} - 6\text{VctB} + 7\text{VctC})$.

Ấn AC về màn hình tính toán.

Nhập $(\text{VctA} + 2\text{VctA} + 3\text{VctC}) \times (2\text{VctA} - 6\text{VctB} + 7\text{VctC})$ vào máy

(SHIFT 5 3 + 2 SHIFT 5 4 + 3 SHIFT 5 5) × (2 SHIFT 5 3 − 6 SHIFT 5 4 + 7 SHIFT 5 5). Ấn =, máy hiện kết quả là $(32;-1;-10)$.



Vậy $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = (32;-1;-10)$.

Ví dụ 8: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;-2;3), B(0;3;1), C(4;2;2)$.

Tính $\cos \widehat{BAC}$

Đáp án C.

A. $\dfrac{9}{2}$ B. $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$ C. $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$ D. $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$

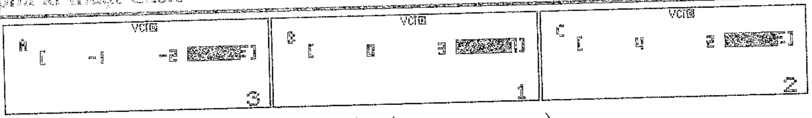
Lời giải

Ta có $\cos \widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

Đưa vào máy tọa độ các vectơ: $\text{VctA} = [-1,-2,3]$, $\text{VctB} = [0,3,1]$, $\text{VctC} = [4,2,2]$

MODE 8 1 1 (−) 1 = (−) 2 = 3 = SHIFT 5 1 2 1 0 = 3 = 1 =

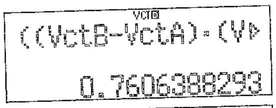
SHIFT 5 1 3 1 4 = 2 = 2 =

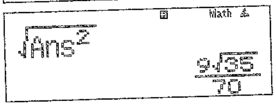


Khi đó $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{(\text{VctB}-\text{VctA})\bullet(\text{VctC}-\text{VctA})}{\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})}$

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình

$$((\text{VctB}-\text{VctA})\bullet(\text{VctC}-\text{VctA}))\div(\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA}))$$





[(] [(] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [SHIFT] [5] [7] [(] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả là 0,7606388293.

Ấn [MODE] [1] [√] [Abs] [x²] [=], máy hiện kết quả là $\dfrac{9\sqrt{35}}{70}=\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Vậy $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

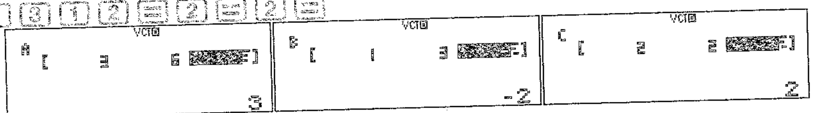
Đáp án D.

> Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ là
>
> A. 3   B. 2   C. 5   D. 6

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;6;3), \overrightarrow{AC}=(1;3;-2), \overrightarrow{AD}=(2;2;2)$. Đưa vào máy tính các vectơ: $\text{VctA}=[3,6,3]$, $\text{VctB}=[1,3,-2]$ và $\text{VctC}=[2,2,2]$.

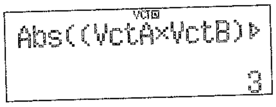
[MODE] [8] [1] [1] [3] [=] [6] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [3] [=] [−] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [2] [=] [2] [=]



Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ là

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|=\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div 6.$$

Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div 6$



[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [6].

Ấn [=], máy hiện kết quả là 3. Vậy $V_{ABCD}=3$.

Đáp án A.

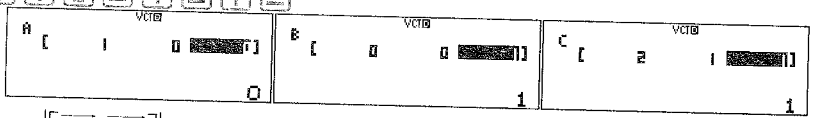
> Ví dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;1), C(2;1;1)$. Độ dài đường cao AH của ΔABC là
>
> A. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ B. $\sqrt{15}$ C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Lời giải

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}AH.BC\to AH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{BC}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

Đưa vào máy các vectơ: $\text{VctA}=[1,0,0]$, $\text{VctB}=[0,0,1]$ và $\text{VctC}=[2,1,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [0] [=] [0] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [1] [=] [1] [=]

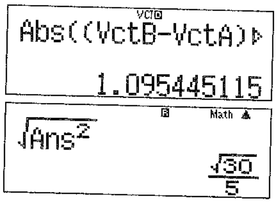


$\rightarrow AH = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \text{Abs}\left(\left(\text{VctB} - \text{VctA}\right)\times\left(\text{VctC} - \text{VctA}\right)\right) \div \text{Abs}\left(\text{VctC} - \text{VctB}\right)$

Ấn [AC] về màn hình tính toán.

Nhập vào máy $\text{Abs}\left(\left(\text{VctB} - \text{VctA}\right)\times\left(\text{VctC} - \text{VctA}\right)\right) \div \text{Abs}\left(\text{VctC} - \text{VctB}\right)$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [(] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [4] [)]



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1,095445115.

Ấn [MODE] [1] [√] [Ans] [x²] [=] máy hiện kết quả là $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. Vậy $AH = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Đáp án A.

b. Bài toán về đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vec-tơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u} = (a;b;c)$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$ thì có *phương trình tham số* là $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Để đơn giản hơn, ta quy phương trình đường thẳng Δ về "dạng tọa độ" là Δ: $(x;y;z) = (x_0+at; y_0+bt; z_0+ct)$, đưa về gọn hơn ta có:

$$\Delta: (x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + t(a;b;c) = A + t\vec{u}.$$

Như vậy, $\boxed{(x;y;z) = A + t\vec{u}}$.

CHÚ Ý

"Dạng tọa độ" của đường thẳng $\Delta: A + t\vec{u}$ chỉ là một kí hiệu mà tác giả quy ước để học sinh dễ dàng hình dung cách làm, chứ **không phải** là một quy ước toán học.

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm B' là hình chiếu của điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ lên đường thẳng Δ.

Cách 1: Ta có $B' \in \Delta \Rightarrow B' = A + t\vec{u} \longrightarrow$ Tìm t.

Do B' là hình chiếu của điểm B lên đường thẳng Δ nên $BB' \perp \Delta$.

Khi đó $\overrightarrow{BB'} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (B'-B)\bullet\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \left(A + t\vec{u} - B\right)\bullet\vec{u} = 0 \longrightarrow t$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Ấn [MODE] [8] để đưa máy về phương thức VECTOR. Nhập vào máy tọa độ điểm $A(=\text{VctA})$, vec-tơ $\vec{u}(=\text{VctB})$ và điểm $B(=\text{VctC})$.

* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán. Bấm $\left(\text{VctA} + \text{VctB}\times 100 - \text{VctC}\right)\bullet\text{VctB}$. Ấn [=], máy hiện kết quả $(*)$. Đưa kết quả $(*)$ về dạng $a_1t + b_1$ (với $t = 100$).

* **Bước 3:** Giải phương trình $a_1t + b_1 = 0 \rightarrow t = t_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}$

* **Bước 4:** Vậy $\boxed{B' = A + t_1\vec{u} = \text{VctA} + \text{VctB}\times\left(-b_1 \div a_1\right)}$.

CHÚ Ý

Để kiểm tra tính chính xác của giá trị $t = t_1 = -\dfrac{b_1}{a_1}$ tìm được ở bước 3. Ta quay lại biểu thức vừa nhập (bước 2), thay 100 bởi t_1, tức là nhập vào máy $\left(\text{VctA} + \text{VctB}\times t_1 - \text{VctC}\right)\bullet\text{VctB}$.

Ấn [=], nếu máy hiện kết quả bằng 0 thì giá trị $t = t_1$ đó là đúng. Còn nếu kết quả khác 0 thì nên kiểm tra lại xem kết quả $(*)$ xem có đưa được về dạng $a_2t + b_2$ khác hay không.

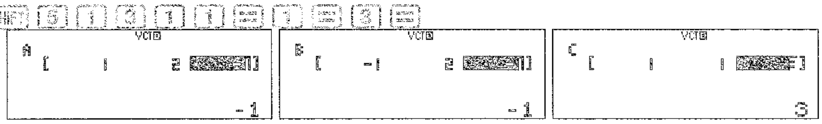
Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=-1-t\end{cases}$ và điểm $M(1;1;3)$. Tìm điểm M' là hình chiếu của M trên đường thẳng d

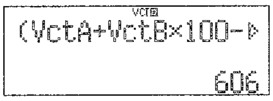
Lời giải

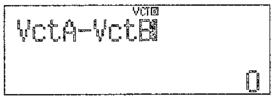
Ta có $d:(x;y;z)=(1;2;-1)+t.(-1;2;-1)=A+t\vec{u}$ với $A(1;2;-1)$ và $\vec{u}=(-1;2;-1)$.

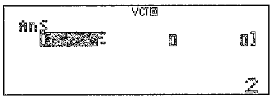
* Bước 1: Đưa vào máy các vectơ: $\text{VctA}=[1,2,-1]$, $\text{VctB}=[-1;2;-1]$ và $\text{VctC}=[1,1,3]$.

MODE 8 1 1 1 = 2 = (-) 1 = SHIFT 5 1 2 1 (-) 1 = 2 = (-) 1 = SHIFT 5 1 3 1 1 = 1 = 3 =









* Bước 2: Ấn AC về màn hình tính toán.

Nhập vào màn hình $(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC})\bullet\text{VctB}$, ấn (SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 × 1 0 0 − SHIFT 5 5) SHIFT 5 7 SHIFT 5 4. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $606=6.100+6=6t+6$ (do $t=100$).

* Bước 3: Giải phương trình $6t+6=0\to t=-1\to B'=A+\vec{u}\times(-1)=A-\vec{u}$.

* Bước 4: Ấn AC, nhập vào máy $\text{VctA}-\text{VctB}$, ấn SHIFT 5 3 − SHIFT 5 4. Ấn =, máy hiện kết quả là $[2,0,0]$

Vậy $M'(2;0;0)$.

Cách 2: Ta có $B'\in\Delta\Rightarrow B'=A+t\vec{u}$. Do B' là hình chiếu của B lên Δ nên $BB'=d(B,\Delta)=\min BB_0$ $(B_0\in\Delta)$.

Lại có, do $d(B,\Delta)\geq 0$ nên $d(B;\Delta)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d^2(B,\Delta)$ nhỏ nhất.

Mà $d^2(B,\Delta)=\left|\overrightarrow{BB'}\right|^2=\left|B'-B\right|^2=\left|A+t\vec{u}-B\right|^2\longrightarrow$ đưa được về dạng tam thức bậc hai ẩn $t\longrightarrow$ Tìm t để tam thức bậc hai này đạt giá trị nhỏ nhất.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Ấn MODE 8 để đưa máy về phương thức VECTOR. Nhập vào máy các tọa độ $\text{VctA}=A,\text{VctB}=\vec{u}$ và $\text{VctC}=B$.

* **Bước 2:** Ấn AC về màn hình tính toán.

Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC})^2$. Ấn =, máy hiện kết quả $(**)$.

Biến đổi kết quả $(**)$ về dạng $a_2t^2+b_2t+c_2=f(t)$ (với $t=100$). Khi đó $f(t)$ có dạng một tam thức bậc hai đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $\left(-\dfrac{b_2}{2a_2};-\dfrac{\Delta_t}{4a}\right)$.

* **Bước 3:** Vậy $B'=A+t_2\vec{u}$ với $t_2=-\dfrac{b_2}{2a_2}$. Tức là $\boxed{B'=\text{VctA}+\text{VctB}\times(-b_2\div 2a_2)}$.

Chú ý

Ta có thể dùng MODE 3 3 của máy tính CASIO fx-570 VN PLUS, hoặc dùng SHIFT 6 6 của VINACAL 570ES Plus II để tìm được X – Value Minimum $=-\dfrac{b_2}{2a_2}$ và Y – Value Minimum $=d^2(B,\Delta)$.

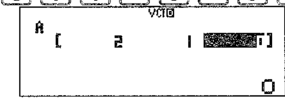
Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}$ và điểm $A(1;0;0)$. Tìm điểm H là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ

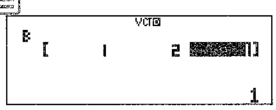
Lời giải

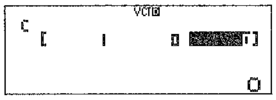
Ta có $\Delta:(x;y;z)=(2;1;0)+t(1;2;1)=A_0+t\vec{u}$ với $A_0(2;1;0)$ và $\vec{u}=(1;2;1)$.

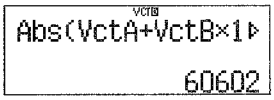
* Bước 1: Đưa vào máy các vectơ: $\text{VctA}=[2,1,0],\text{VctB}=[1,2,1]$ và $\text{VctC}=[1,0,0]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [1] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [1] [=] [0] [=] [0] [=]





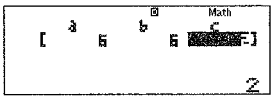




* Bước 2: Ấn [AC] về màn hình tính toán.

Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC})^2$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [x^2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $60602=6.100^2+6.100+2=6t^2+6t+2$ (do $t=100$). Vậy $d^2(A,\Delta)=6t^2+6t+2$.

Ấn [MODE] [5] [3] trên máy tính CASIO fx-570 VN PLUS, hoặc ấn [SHIFT] [6] [6] trên máy tính VINACAL 570ES Plus II. Đưa vào các hệ số của tam thức bậc hai $6t^2+6t+2$. Ấn [6] [=] [6] [=] [2] [=] $(a=6,b=6,c=2)$. Ấn [=], máy hiện x_1. Ấn [=] tiếp máy hiện x_2.



Ấn [=] tiếp máy hiện $\text{X}-\text{Value Minimum}=-\dfrac{1}{2}$. Ấn [=] tiếp máy hiện $\text{Y}-\text{Value Minimum}=\dfrac{1}{2}$. Điều này có nghĩa là $d^2(A,\Delta)=6t^2+6t+2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ tại $t=-\dfrac{1}{2}$. Khi đó $H=A_0+t\vec{u}=A_0-\dfrac{1}{2}\vec{u}$.





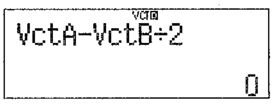
STUDY TIPS

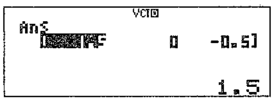
* Nếu tinh ý, ta thấy ngay rằng giá trị $\text{Y}-\text{Value Minimum}=\dfrac{1}{2}$ chính là bình phương khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ.

* Quy trình bấm cách 2 có thể lâu hơn cách 1, tuy nhiên cách 2 lại giúp ta tìm thêm được khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, đó chính là giá trị $\text{Y}-\text{Value Minimum}=$ trong bước sử dụng [MODE] [5] [3] (CASIO), hay [SHIFT] [6] [6] (VINACAL).

* Bước 3: Ấn [MODE] [8] để quay trở về phương thức VECTOR và nhập lại các VctA, VctB và VctC như trên. Ấn [AC] về màn hình tính toán.

Nhập vào máy $\text{VctA}-\text{VctB}\div 2$, ấn [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $[1,5;0;-0,5]$.





Vậy $H\left(\dfrac{3}{2};0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

CHÚ Ý

Theo ý kiến tác giả, độc giả nên giải theo cách 2 của dạng 1 với [MODE] [5] [3] (trên CASIO), hay [SHIFT] [6] [6] (trên VINACAL) để tìm được $\text{Y}-\text{Value Minimum}=d^2(B,\Delta)$. Sau đó lấy căn bậc hai của giá trị này ta được $d(B,\Delta)$.

Dạng 2: Tìm khoảng cách từ điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ đến đường thẳng Δ

Ta vẫn phải tìm t như ở dạng 1 (t_1 hoặc t_2).

Khi đó $d(B,\Delta)=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\left|B'-B\right|=\left|A+t\vec{u}-B\right|$ $\boxed{=\text{Abs}(\text{VctA}+t\times\text{VctB}-\text{VctC})}$ với giá trị t đã tìm được ở dạng 1 (t_1 hoặc t_2).

Nếu máy hiện kết quả là một số vô tỷ, ta có thể tìm giá trị chính xác của nó bằng cách gán vào biến X $(\text{Ans}\to\text{X})$. Sau đó vào phương thức [MODE] [1] (COMP) ấn [√] [ALPHA] [)] [x^2].

> **Ví dụ:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm $A(2;5;3)$ đến đường thẳng d.

Lời giải

Ta có $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=2+2t\end{cases}\rightarrow d:(x;y;z)=(1;0;2)+t(2;1;2)=B+t\vec{u}$ với $B(1;0;2)$ và $\vec{u}=(2;1;2)$.

* Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[1,0,2]$, VctB $=[2,1,2]$ và VctC $=[2,5,3]$.

MODE 8 1 1 1 = 0 = 2 = SHIFT 5 1 2 1 2 = 1 = 2 = SHIFT 5 1 3 1 2 = 5 = 3 =

VctA	VctB	VctC
A [1 0 2]	B [2 1 2]	C [2 5 3]

* Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào máy (VctA + VctB×100 − VctC) • VctB

(SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 × 1 0 0 − SHIFT 5 5) SHIFT 5 7 SHIFT 5 4. Ấn =, máy hiện kết quả bằng $891=900-9=9t-9$ (do $t=100$).

* Giải phương trình $9t-9=0\rightarrow t=1$. Khi đó $d(B,\Delta)=\left|B+t\vec{u}-A\right|=\left|B+\vec{u}-A\right|$

* Nhập vào máy Abs(VctA + VctB − VctC), ấn SHIFT hyp SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 − SHIFT 5 5). Ấn =, máy hiện kết quả là 4,242640687 .

Ấn tiếp SHIFT RCL) (Ans → X) để lưu kết quả đó vào biến nhớ X.

* Ấn MODE 1 để vào phương thức COMP. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn √ ALPHA) x². Ấn =, máy hiện kết quả là $3\sqrt{2}$.

> **STUDY TIPS**
> Ngoài ra, để tính khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng Δ (đi qua M_0, VTCP $\vec{u}$), ta dùng công thức:
> $$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$
> Đưa vào VctA $=M$, VctB $=M_0$ và VctC $=\vec{u}$. Nhập vào Abs((VctB − VctA)×VctC) ÷ Abs(VctC)

```
(VctA+VctB×100-▶
                891
```

```
Abs(VctA+VctB-V▶
        4.242640687
```

```
Ans→X
        4.242640687
```

```
√(X²)
               3√2
```

Dạng 3: Tìm điểm B'' đối xứng với điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ qua đường thẳng Δ

Ta dùng kết quả $t=t_1$ ở dạng 1.

Do hình chiếu B' của B lên đường thẳng Δ là trung điểm của BB'' nên ta có

$B'=\frac{B+B''}{2}\rightarrow B''=2B'-B=2(\text{VctA}+\text{VctB}\times t_1)-\text{VctC}$.

> **Ví dụ:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}$ và điểm $A(1;0;0)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng Δ.

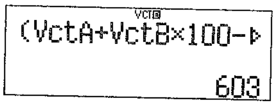
Lời giải

Ta có $\Delta:(x;y;z)=(2;1;0)+t.(1;2;1)=A_0+t\vec{u}$ với $A_0(2;1;0)$ và $\vec{u}=(1;2;1)$.

* Đưa vào máy các vectơ: VctA $=[2,1,0]$, VctB $=[1,2,1]$ và VctC $=[1,0,0]$.

MODE 8 1 1 2 = 1 = 0 = SHIFT 5 1 2 1 1 = 2 = 1 = SHIFT 5 1 3 1 1 = 0 = 0 =

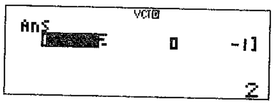
VctA	VctB	VctC
A [2 1 0]	B [1 2 1]	C [1 0 0]



* Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA} + \text{VctB}\times 100 - \text{VctC}) \bullet \text{VctB}$, ấn [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $603 = 6.100 + 3 = 6t + 3$ (do $t = 100$).

* Giải phương trình $6t + 3 = 0 \to t = -\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $A' = 2(\text{VctA} + \text{VctB}\times(-1\div 2)) - \text{VctC}$



* Nhập vào máy $2(\text{VctA} + \text{VctB}\times(-1\div 2)) - \text{VctC}$, ấn [2] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [(−)] [1] [÷] [2] [)] [)] [−] [SHIFT] [5] [5]. Ấn [=], máy hiện kết quả là $[2,0,-1]$. Vậy $A'(2;0;-1)$.

CHÚ Ý

Tương tự như đường thẳng, "dạng tọa độ" của mặt phẳng $\vec{n}\bullet(x;y;z)+d=0$ cũng chỉ là một kí hiệu mà tác giả quy ước để học sinh dễ dàng hình dung cách làm, chứ **không phải** là một quy ước toán học.

c. Bài toán về mặt phẳng

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Vec-tơ pháp tuyến (VTPT) của (P) là $\vec{n} = (a;b;c)(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$. Khi đó, ta có thể đưa (P) về "dạng tọa độ" $(P): (a;b;c)\bullet(x;y;z) + d = 0$

$\longrightarrow (P): \boxed{\vec{n}\bullet(x;y;z) + d = 0}$. $(P): \vec{n}\bullet(x;y;z) + d = 0$

Dạng 1: Tìm điểm B' là hình chiếu của điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ lên mặt phẳng (P)

Phân tích:

Do điểm B' là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (P) nên $BB' \perp (P)$

Khi đó đường thẳng BB' nhận $\vec{n}$ làm VTCP. Phương trình BB' có "dạng tọa độ" là $BB': (x;y;z) = B + t\vec{n}$.

Do $B' \in BB'$ nên tọa độ $B' = B + t\vec{n}$.

Mặt khác, $B' \in (P)$ nên $\vec{n}\bullet B' + d = 0 \to \vec{n}\bullet(B + t\vec{n}) + d = 0 \longrightarrow$ Tìm được t.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Ấn [MODE] [8] để đưa máy về phương thức VECTOR. Nhập vào máy các véc-tơ $\text{VctA} = B, \text{VctB} = \vec{n}$.

* **Bước 2:** Nhập và máy $(\text{VctA} + \text{VctB}\times 100)\bullet \text{VctB} + d$. Ấn [=], máy hiện kết quả $(*)$. Đưa kết quả $(*)$ về dạng $mt + n$ (với $t = 100$).

* **Bước 3:** Giải phương trình $mt + n = 0 \to t = -\dfrac{n}{m}$.

* **Bước 4:** Với $t = -\dfrac{n}{m}$ thì $B' = B + t\vec{n} = \boxed{\text{VctA} + \text{VctB}\times(-n\div m)}$. Nhập vào máy tính $\text{VctA} + \text{VctB}\times(-n\div m)$. Ấn [=], máy hiện kết quả chính là tọa độ của B'.

CHÚ Ý

Để kiểm tra tính chính xác của giá trị $t = -\dfrac{n}{m}$ tìm được ở bước 3. Ta quay lại biểu thức vừa nhập (bước 2), thay 100 bởi $-\dfrac{n}{m}$, tức là nhập vào máy $(\text{VctA} + \text{VctB}\times(-n\div m))\bullet \text{VctB} + d$. Ấn [=], nếu máy hiện kết quả bằng 0 thì giá trị $t = -\dfrac{n}{m}$ đó đúng. Còn nếu kết quả khác 0 thì nên kiểm tra lại xem kết quả $(*)$ xem có đưa được về dạng $m_1t + n_1$ khác hay không.

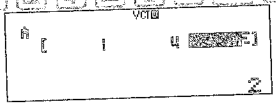
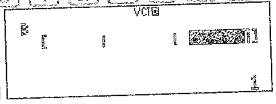
Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α).

Lời giải

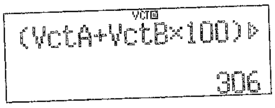
Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (1;1;1)$.

* **Bước 1:** Nhập vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=[1,4,2]$ và $\text{VctB}=[1,1,1]$.

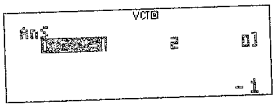
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=]

* **Bước 2:** Ấn [AC] về màn hình tính toán.



Nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100)\bullet\text{VctB}-1$, ấn [AC] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [1]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $306=3.100+6=3t+6$ (với $t=100$).



* **Bước 3:** Giải phương trình $3t+6=0\to t=-2$.

* **Bước 4:** Nhập vào máy $\text{VctA}+\text{VctB}\times(-2)$, ấn [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [(−)] [2] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $[-1,2,0]$. Như vậy $H(-1;2;0)$.

CHÚ Ý

Nếu máy hiện số vô tỷ, có thể gán kết quả vào X $(\text{Ans}\to\text{X})$ rồi qua phương thức COMP: [MODE] [1], ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Khi đó kết quả được hiển thị dưới dạng căn.

Dạng 2: Tính khoảng cách $d(B,(P))$ từ điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ đến mặt phẳng (P).

Ta sử dụng giá trị $t=-\frac{n}{m}$ tìm được ở dạng 1.

Khi đó $d(B,(P))=BB'=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\left|B'-B\right|=\left|(B+t\vec{n})-B\right|=\left|t\vec{n}\right|$

Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctB}\times(-n\div m))$. Ấn =, máy hiện kết quả chính là $d(B,(P))$.

STUDY TIPS

Ngoài ra, để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P), ta có thể sử dụng công thức:

$$d(M,(P))=\frac{\left|M\bullet\vec{n}+d\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

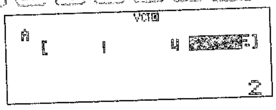
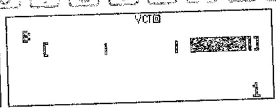
Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

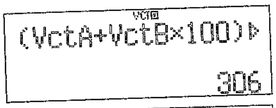
Lời giải

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Nhập vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=[1,4,2]$ và $\text{VctB}=[1,1,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=]

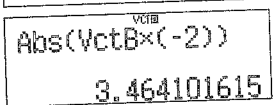





Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100)\bullet\text{VctB}-1$, ấn [AC] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [1].

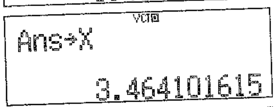
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $306=3.100+6=3t+6$ (với $t=100$).

Giải phương trình $3t+6=0\to t=-2$.

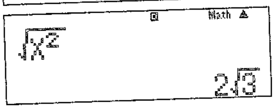


Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctB}\times(-2))$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [(−)] [2] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 3,464101615.



Ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [)] để gán kết quả vừa tìm được vào biến nhớ X.



Về phương thức COMP: [MODE] [1], ấn [√] [ALPHA] [)] [x²], sau đó ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2\sqrt{3}$.

Vậy $d(M,(\alpha))=2\sqrt{3}$.

Dạng 3: Tìm tọa độ điểm B'' đối xứng với điểm $B(x_1;y_1;z_1)$ qua mặt phẳng (P)

Ta sử dụng giá trị $t=-\frac{n}{m}$ tìm được ở dạng 1.

Vì B' là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (P) nên B' là trung điểm của BB''

Khi đó $B'=\frac{B+B''}{2}\to B''=2B'-B=2\left(B+t\vec{n}\right)-B$.

Nhập vào máy $2\left(\text{VctA}+\text{VctB}\times(-n\div m)\right)-\text{VctA}$. Ấn [=], máy hiện kết quả. Đó chính là tọa độ điểm B''.

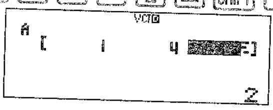
Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α).

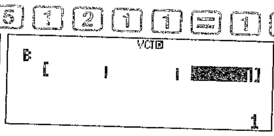
Lời giải

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}=(1;1;1)$.

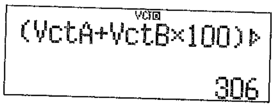
Nhập vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=[1,4,2]$ và $\text{VctB}=[1,1,1]$.

[MODE] [3] [1] [1] [1] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=]





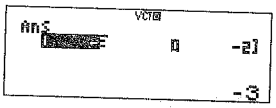
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times100)\bullet\text{VctB}-1$, ấn [AC] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [1].



Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $306=3.100+6=3t+6$ (với $t=100$).

Giải phương trình $3t+6=0\to t=-2$.

Nhập vào máy $2\left(\text{VctA}+\text{VctB}\times(-2)\right)-\text{VctA}$, ấn [2] [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [(−)] [2] [)] [)] [−] [SHIFT] [5] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $[-3;0;-2]$



Vậy $M'(-3;0;-2)$.

d. Bài toán về mặt cầu – Tương giao giữa đường thẳng với mặt phẳng và mặt cầu

CHÚ Ý

Tương tự đường thẳng và mặt phẳng, "dạng tọa độ" của mặt cầu (S) chỉ là kí hiệu tác giả quy ước để học sinh dễ dàng hình dung cách làm, chứ **không phải** là một quy ước toán học.

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R. Gọi $A(x;y;z)$ là một điểm thuộc mặt cầu (S). Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\Leftrightarrow IA^2=R^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{IA}\right|^2=R^2\Leftrightarrow|A-I|^2=R^2$ $\Leftrightarrow|(x;y;z)-I|^2=R^2$. Đây là "dạng tọa độ" của mặt cầu (S).

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+b_1t\\z=z_0+c_1t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):a_2x+b_2y+c_2z+d=0$.

Phân tích:

$\Delta:(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+t(a_1;b_1;c_1)=A+t\vec{u}\rightarrow$ Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP là $\vec{u}=(a_1;b_1;c_1)$.

$(P):(x;y;z)\bullet\vec{n}+d=0\rightarrow$ Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(a_2;b_2;c_2)$.

Vì $M\in\Delta$ nên $M=A+t\vec{u}$. Mặt khác, $M\in(P)$ nên $M\bullet\vec{n}+d=0$.

Suy ra $(A+t\vec{u})\bullet\vec{n}+d=0\longrightarrow t\longrightarrow M$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Ấn MODE 8 để đưa máy về phương thức VECTOR. Nhập vào máy các vec-tơ: $\text{VctA}=A, \text{VctB}=\vec{u}$ và $\text{VctC}=\vec{n}$.

* **Bước 2:** Ấn AC, nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times100)\bullet\text{VctC}+d$. Ấn =, máy hiện kết quả $(*)$. Đưa kết quả $(*)$ về dạng $mt+n$ (với $t=100$).

* **Bước 3:** Giải phương trình $mt+n=0\rightarrow t=-\dfrac{n}{m}$

* **Bước 4:** Nhập vào máy $\text{VctA}+\text{VctB}\times(-n\div m)$. Ấn =, máy hiện kết quả. Đó chính là tọa độ điểm M.

Chú ý

Để kiểm tra tính chính xác của giá trị $t=-\dfrac{n}{m}$ tìm được ở bước 3. Ta quay lại biểu thức vừa nhập (bước 2), thay 100 bởi $-\dfrac{n}{m}$, tức là nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times(-n\div m))\bullet\text{VctC}+d$. Ấn =, nếu máy hiện kết quả bằng 0 thì giá trị $t=-\dfrac{n}{m}$ đó đúng. Còn nếu kết quả khác 0 thì nên kiểm tra lại xem kết quả $(*)$ xem có đưa được về dạng m_1t+n_1 khác hay không.

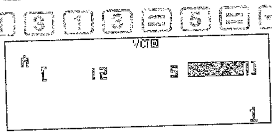
Ví dụ: Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}$. Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

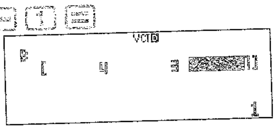
Lời giải

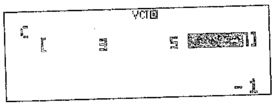
Đường thẳng d đi qua điểm $A(12;9;1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(4;3;1)$. Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}=(3;5;-1)$.

* **Bước 1:** Nhập vào máy các vectơ: $\text{VctA}=[12,9,1], \text{VctB}=[4,3,1]$ và $\text{VctC}=[3,5,-1]$.

MODE 8 1 1 1 2 = 9 = 1 = SHIFT 5 1 2 1 4 = 3 = 1 = SHIFT 5 1 3 1 3 = 5 = − 1 =



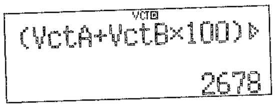




* **Bước 2:** Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào mành hình

$$(\text{VctA}+\text{VctB}\times100)\bullet\text{VctC}-2$$

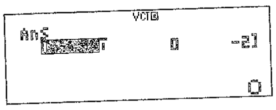
(SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 × 1 0 0) SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 − 2.



Ấn =, máy hiện kết quả bằng $2678=26.100+78=26t+78$ (với $t=100$).

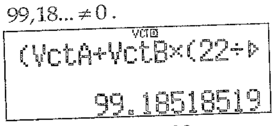
* **Bước 3:** Giải phương trình $26t+78=0\Leftrightarrow t=-3$.

* **Bước 4:** Nhập vào máy $\text{VctA}+\text{VctB}\times(-3)$, ấn SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 × ((−) 3). Ấn =, máy hiện kết quả bằng $[0,0,-2]$. Vậy $M(0;0;-2)$.



STUDY TIPS

Một số học sinh sẽ viết $2678=27t-22$ và sau khi giải $27t-22=0$, ta tìm được giá trị $t=\dfrac{22}{27}$. Khi thay giá trị này vào biểu thức vừa nhập (bước 2), tức nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}\times(22\div27))\bullet\text{VctC}-2$, ấn =, máy hiện kết quả là $99{,}18...\neq0$.



Vậy giá trị $t=\dfrac{22}{27}$ không chính xác.

Dạng 2: Tìm tọa độ các điểm M là giao điểm của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+b_1t\\z=z_0+c_1t\end{cases}$ với mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Phân tích:

Đường thẳng $\Delta:(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+t(a_1;b_1;c_1)=A+t\vec{u}$ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP là $\vec{u}=(a_1;b_1;c_1)$.

Mặt cầu $(S):|(x;y;z)-I|^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng R.

Do $M\in\Delta$ nên $M=A+t\vec{u}$. Mặt khác, do $M\in(S)\to|M-I|^2=R^2$

$\Leftrightarrow|A+t\vec{u}-I|^2-R^2=0\longrightarrow t\longrightarrow M$.

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Ấn MODE 8 để đưa máy về phương thức VECTOR. Nhập vào máy các vec-tơ: VctA $=A$, VctB $=\vec{u}$ và VctC $=I$.

* **Bước 2:** Ấn AC để về màn hình tính toán.

Nhập vào máy tính $\text{Abs}(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC})^2-R^2$. Ấn =, máy hiện kết quả $(*)$. Đưa kết quả $(*)$ về dạng mt^2+nt+p (với $t=100$).

* **Bước 3:** Giải phương trình $mt^2+nt+p=0$ bằng MODE 5 (EQN) 3 (trên CASIO) hay MODE 5 (EQN) ▼ 1 (trên VINACAL). Quan sát kết quả:

\+ Nếu tìm được hai nghiệm $t_1\neq t_2\to\Delta$ và (S) cắt nhau tại hai điểm $M_{1,2}=A+t_{1,2}\vec{u}$

\+ Nếu tìm được 1 nghiệm $t=t_0\to\Delta$ và (S) tiếp xúc nhau tại điểm $M=A+t_0\vec{u}$.

\+ Nếu phương trình vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ (nghiệm hiển thị có chữ i) $\to\Delta$ không cắt $(S)\to$ Không tồn tại giao điểm M.

> **CHÚ Ý**
>
> Sau khi giải phương trình $mt^2+nt+p=0$ ở bước 3, nếu tìm được nghiệm $t=t_0$, để kiểm tra tính chính xác của giá trị t_0 này, ta quay trở lại bước 2, thay vào biểu thức vừa nhập 100 bởi t_0, tức nhập vào màn hình $\text{Abs}(\text{VctA}+\text{VctB}\times t_0-\text{VctC})^2-R^2$. Ấn =, nếu máy hiện kết quả bằng 0 thì giá trị $t=t_0$ đó là chính xác. Còn nếu kết quả nhận được khác 0, thì kiểm tra lại kết quả $(*)$ xem có thể đưa về dạng $m't^2+n't+p'$ khác hay không.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và mặt cầu (S).

Lời giải

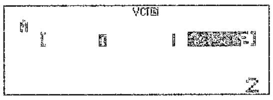
$\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=1+t\\z=2-t\end{cases}\to(x;y;z)=(0;1;2)+t(2;1;-1)=A+t\vec{u}\to$ Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;2)$ và có VTCP là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

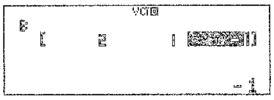
$(S):|(x;y;z)-(1;0;-2)|^2=2^2\Leftrightarrow|(x;y;z)-I|^2=2^2\to$ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

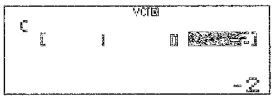
* **Bước 1:** Nhập vào máy các vectơ: VtcA $=[0,1,2]$, VctB $=[2,1,-1]$ và VctC $=[1,0,-2]$.

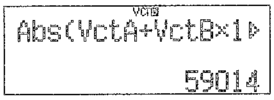
MODE 8 1 1 0 = 1 = 2 = SHIFT 5 1 2 1 2 = 1 = − 1 = SHIFT 5 1 3 1 1 = 0 = − 2 =

> **STUDY TIPS**
>
> Kỹ thuật để biến đổi $59014=6t^2-10t+14$ (với $t=100$) được tác giả đề cập một cách rõ ràng và chi tiết trong **PHỤ LỤC 1: KỸ THUẬT CALC ĐƠN VỊ.**







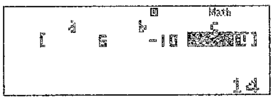


* **Bước 2:** Ấn [AC] để về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình

$$\text{Abs}\left(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC}\right)^2-2^2$$

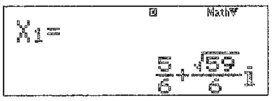
[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [x²] [−] [4].

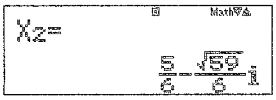
Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $59014=6.100^2-10.100+14=6t^2-10t+14$ (với $t=100$).



* **Bước 3:** Giải phương trình $6t^2-10t+14=0$. Ấn [MODE] [5] (EQN) [3] (trên CASIO) hay [MODE] [5] (EQN) [▼] [1] (trên VINACAL). Đưa vào các hệ số của phương trình bậc hai $a=6, b=-10, c=14$.

Ấn [=], máy hiện các nghiệm là $x_1=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{59}}{6}i$ và $x_2=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{59}}{6}i$.





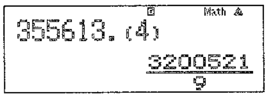
Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+4t\\y=3-2t\\z=-2+4t\end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-\frac{131}{9}=0$. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và mặt cầu (S).

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và có VTCP là $\vec{u}=(4;-2;4)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{185}}{3}$.

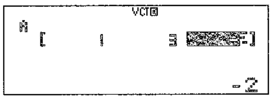
STUDY TIPS

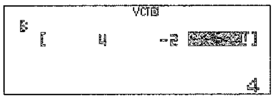
Ở bước 2, ta cũng có thể đưa kết quả 355613,4444... về dạng phân số bằng lệnh [ALPHA] [√] ((▪)). Ấn [3] [5] [5] [6] [1] [3] [.] [ALPHA] [√] [4] ấn [=] máy hiện kết quả bằng $\frac{3200521}{9}$.

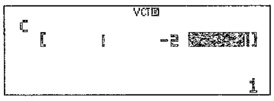


* **Bước 1:** Nhập vào máy các vectơ: $\text{VtcA}=[1,3,-2], \text{VctB}=[4,-2,4]$ và $\text{VctC}=[1,-2,1]$.

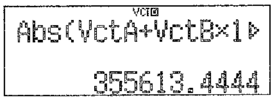
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [3] [=] [(−)] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [4] [=] [(−)] [2] [=] [4] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [1] [=] [(−)] [2] [=] [1] [=]

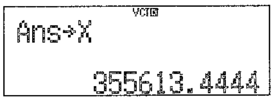


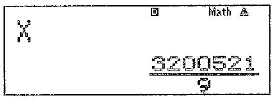




* **Bước 2:** Ấn [AC] để về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}\left(\text{VctA}+\text{VctB}\times 100-\text{VctC}\right)^2-(185\div 9)$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [x²] [−] [(] [1] [8] [5] [÷] [9] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 355613,4444.

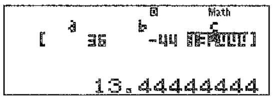


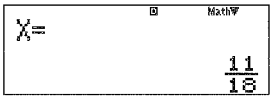




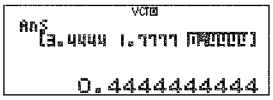
Ấn tiếp [SHIFT] [RCL] [)] (Ans → X) để lưu kết quả đó vào biến nhớ X. Về phương thức COMP: [MODE] [1], ấn [ALPHA] [)], sau đó ấn [=], máy hiện kết quả $\frac{3200521}{9}$.

Thấy $\frac{3200521}{9}=355613+\frac{4}{9}=36t^2-44t+13+\frac{4}{9}=36t^2-44t+\frac{121}{9}$ (với $t=100$).





* **Bước 3:** Giải phương trình $36t^2-44t+\frac{121}{9}=0$. Ấn [MODE] [5] (EQN) [3] (trên CASIO) hay [MODE] [5] (EQN) [▼] [1] (trên VINACAL). Đưa vào các hệ số của phương trình bậc hai $a=36,b=-44,c=\frac{121}{9}$. Ấn =, máy hiện một nghiệm là $X=\frac{11}{18}\to t=\frac{11}{18}$.

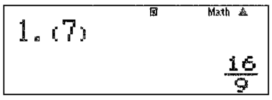


Như vậy, Δ và (S) tiếp xúc nhau tại điểm $M=A+t\vec{u}=A+\frac{11}{18}\vec{u}$. Tiếp tục bước 2 để thực hiện trên phương thức VECTOR. Tại màn hình tính toán, nhập vào máy $\text{VctA}+\text{VctB}\times(11\div 18)$, ấn [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [1] [1] [÷] [1] [8] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả $(3{,}444...;1{,}777...;0{,}444...)$.

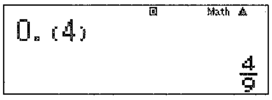
Đây là các số thập phân vô hạn tuần hoàn, để đưa nó về dạng phân số, tại phương thức COMP: [MODE] [1], ta dùng lệnh [ALPHA] [√■].



Ấn [3] [.] [ALPHA] [√■] [4], ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{31}{9}$.



Ấn [1] [.] [ALPHA] [√■] [7], ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{16}{9}$.



Ấn [0] [.] [ALPHA] [√■] [4], ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{4}{9}$.

Vậy tọa độ tiếp điểm của Δ và (S) là $M\left(\frac{31}{9};\frac{16}{9};\frac{4}{9}\right)$.

ĐỌC THÊM: Lệnh [ALPHA] [√■] ((▒)).

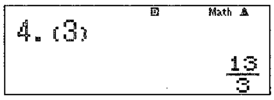
Chức năng: Ta có thể hiểu một cách đơn giản rằng lệnh [ALPHA] [√■] ((▒)) trên máy tính giúp đưa một số thập phân vô hạn tuần hoàn về dạng phân số.

Ví dụ: Để đưa số 4,333333333... về dạng phân số.

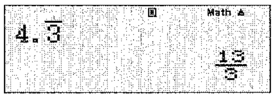
Trên máy CASIO fx-570VN PLUS (hay máy VINACAL 570ES PLUS II), ta nhập 4.(3) (hay $4.\overline{3}$), tức ấn [4] [.] [ALPHA] [√■] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả là $\frac{13}{3}$.

STUDY TIPS

Lệnh [ALPHA] [√■] trên máy tính CASIO fx-570VN PLUS và máy tính VINACAL 570ES PLUS II cơ bản hệt nhau về chức năng, cách bấm máy, tuy nhiên chỉ khác nhau về cách hiển thị trên màn hình.

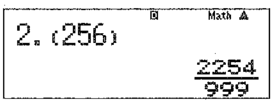


CASIO fx-570VN PLUS

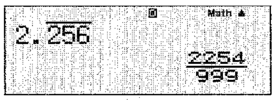


VINACAL 570ES PLUS

Hay để đưa số 2,256256256... về dạng phân số. Nhập vào máy 2.(256) (hay $2.\overline{256}$), ấn [2] [.] [ALPHA] [√■] [2] [5] [6]. Ấn [=], máy hiện kết quả là $\frac{2254}{999}$.



CASIO fx-570VN PLUS



VINACAL 570ES PLUS

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Phép tính tọa độ trong không gian

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vec-tơ $\vec{a}=(-2;2;5)$ và $\vec{b}=(0;1;2)$ là

A. 10 B. 13 C. 12 D. 14

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$. Khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. 0 B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $-\frac{2}{5}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3)$ và $B(0;1;1)$. Độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{12}$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vec-tơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$ và $\vec{c}=(-2;5;1)$. Vec-tơ $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ có tọa độ là

A. $(6;0;-6)$ B. $(-6;6;0)$

C. $(6;-6;0)$ D. $(0;6;-6)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-3)$, $B(2;4;-1)$ và $C(2;-2;0)$. Độ dài các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC lần lượt là

A. $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{37}$ B. $\sqrt{11},\sqrt{14},\sqrt{37}$

C. $\sqrt{21},\sqrt{14},\sqrt{37}$ D. $\sqrt{21},\sqrt{13},\sqrt{35}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-3)$, $B(2;4;-1)$ và $C(2;-2;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$ B. $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

C. $(5;2;4)$ D. $\left(\frac{5}{2};1;-2\right)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1)$, $N(2;3;4)$, $P(7;7;5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $Q(-6;5;2)$ B. $Q(6;5;2)$

C. $Q(6;-5;2)$ D. $Q(-6;-5;-2)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$ và $D(3;3;1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. 5 B. 4 C. 3 D. 6

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$ và $D(3;3;1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC)

A. $\frac{9}{7\sqrt{2}}$ B. $\frac{9}{7}$ C. $\frac{9}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{9}{14}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$ và $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$ B. $\frac{9}{\sqrt{35}}$ C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$ D. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$. Diện tích của ΔABC bằng

A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 12: Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1;1;1)$, $(2;3;4)$ và $(7;7;5)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng

A. $2\sqrt{83}$ B. $\sqrt{83}$ C. 83 D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(3;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$

C. $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-2;3;3)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC

A. $D(0;1;3)$ B. $D(0;3;1)$

C. $D(0;-3;1)$ D. $D(0;3;-1)$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$ và $D(2;-1;-2)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{13}}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Dạng 2: Các bài toán về góc và khoảng cách trong không gian

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;2;2)$ đến mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-4=0$ bằng

A. 3 B. 1 C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 17: Khoảng cách từ điểm $E(1;1;3)$ đến đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=4+3t\\z=-2-5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{35}}$ B. $\frac{4}{\sqrt{35}}$ C. $\frac{5}{\sqrt{35}}$ D. 0

Câu 18: Cho vec-tơ $\vec{u}=(-2;-2;0),\vec{v}=(\sqrt{2};\sqrt{2};2)$. Góc giữa vec-tơ $\vec{u}$ và vec-tơ $\vec{v}$ bằng

A. $135°$ B. $45°$ C. $60°$ D. $150°$

Câu 19: Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-t'\\y=2\\z=-2+t'\end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $30°$ B. $120°$ C. $150°$ D. $60°$

Câu 20: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):5x+11y+2z-4=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là

A. $60°$ B. $-30°$ C. $30°$ D. $-60°$

Câu 21: Cho hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z-1=0$ và $(\beta):x+2y-2z-3=0$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là

A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Câu 22: Cho mặt phẳng $(P):3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x-2y+1=0$ và $(\beta):x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó số đo góc φ là

A. $60°$ B. $45°$ C. $30°$ D. $90°$

Dạng 3: Các bài toán về mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng

Câu 23: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của Δ và (S) là

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 24: Cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=50$

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5\sqrt{2}$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5\sqrt{2}$

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$

Câu 25: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ cắt đường thẳng $d:\frac{x-11}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=16$ có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$

B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$

D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$

Câu 26: Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A,B sao cho ΔIAB đều là

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=\frac{20}{3}$ B. $(x-1)^2+y^2+z^2=\frac{20}{3}$

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=4$ D. $(x-1)^2+y^2+z^2=\frac{5}{3}$

Câu 27: Phương trình mặt cầu nào dưới đây có tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với $(P):x+2y+2z+2=0$?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$

D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$, tìm tọa độ hình chiếu của điểm M lên đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$

A. $(1;0;2)$ B. $(-1;1;2)$ C. $(0;-2;1)$ D. $(1;1;2)$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm $M(2;-1;5)$ lên đường thẳng $\Delta:\frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$

A. $H(4;0;2)$ B. $H(2;0;1)$

C. $H(4;1;2)$ D. $H(-4;0;2)$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm $M(1;4;2)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$

A. $H(2;-1;0)$ B. $H(1;-2;0)$

C. $H(-1;2;0)$ D. $H(1;2;0)$

Đáp án bài tập rèn luyện kỹ năng

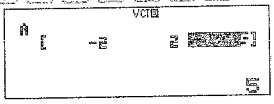
Dạng 1: Phép tính tọa độ trong không gian

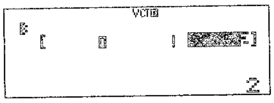
Câu 1: Đáp án C.

Đưa máy về chế độ VECTOR: MODE 8.

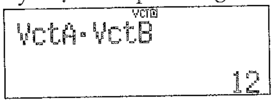
Nhập vào máy $VctA=[-2,2,5]$ và $VctB=[0,1,2]$.

MODE 8 1 1 (-) 2 = 2 = 5 = SHIFT 5 1 2 1 0 = 1 = 2 =





Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $VctA \bullet VctB$, ấn SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 12.



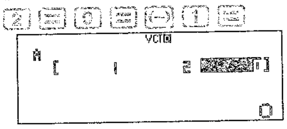
Vậy $\vec{a}.\vec{b}=12$.

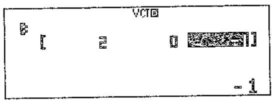
Câu 2: Đáp án B.

Công thức cần nhớ: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

Nhập vào máy $VctA=[1,2,0]$ và $VctB=[2,0,-1]$.

MODE 8 1 1 1 = 2 = 0 = SHIFT 5 1 2 1 2 = 0 = (-) 1 =

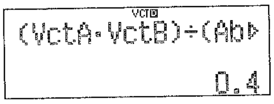




Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(VctA \bullet VctB)\div(Abs(VctA)\times Abs(VctB))$

(SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)).

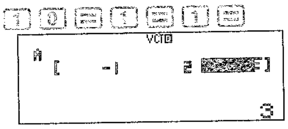
Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,4=\dfrac{2}{5}$.

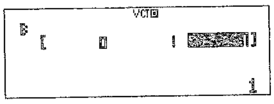


Câu 3: Đáp án A.

Nhập vào máy $VctA=[-1,2,3]$ và $VctB=[0,1,1]$.

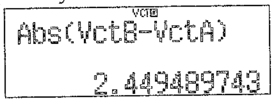
MODE 8 1 1 (-) 1 = 2 = 3 = SHIFT 5 1 2 1 0 = 1 = 1 =

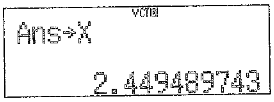




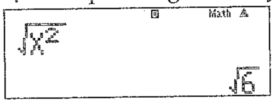
Khi đó $AB=|\overrightarrow{AB}|=Abs(VctB-VctA)$.

Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $Abs(VctB-VctA)$, ấn SHIFT hyp SHIFT 5 4 − SHIFT 5 3). Ấn =, máy hiện kết quả bằng 2,449489743. Ấn SHIFT RCL) $(Ans\rightarrow X)$ để lưu kết quả này vào biến X.





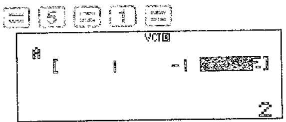
Tại phương thức COMP: MODE 1, ấn √ ALPHA) x². Ấn =, máy hiện kết quả bằng $\sqrt{6}$. Vậy $AB=\sqrt{6}$.

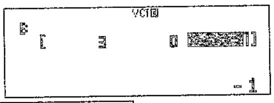


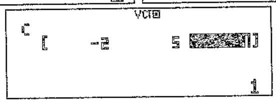
Câu 4: Đáp án C.

Nhập vào máy $VctA=[1,-1,2]$, $VctB=[3,0,-1]$ và $VctC=[-2,5,1]$.

MODE 8 1 1 1 = (-) 1 = 2 = SHIFT 5 1 2 1 3 = 0 = (-) 1 = SHIFT 5 1 3 1 (-) 2 = 5 = 1 =



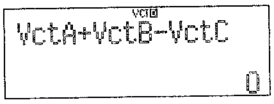


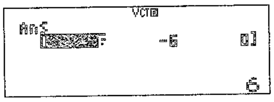


Khi đó $\vec{m}=VctA+VctB-VctC$.

Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $VctA+VctB-VctC$, ấn SHIFT 5 3 + SHIFT 5 4 − SHIFT 5 5. Ấn =, máy hiện kết quả $[6,-6,0]$

Vậy $\vec{m}=(6;-6;0)$.

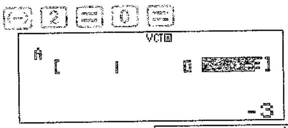


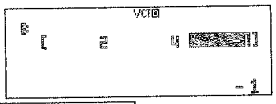


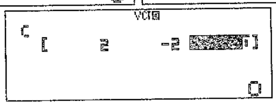
Câu 5: Đáp án C.

Nhập vào máy $VctA=[1,0,-3]$, $VctB=[2,4,-1]$ và $VctC=[2,-2,0]$.

MODE 8 1 1 1 = 0 = (-) 3 = SHIFT 5 1 2 1 2 = 4 = (-) 1 = SHIFT 5 1 3 1 2 = (-) 2 = 0 =

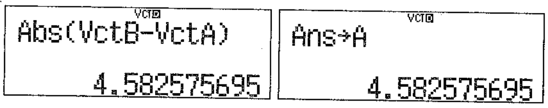




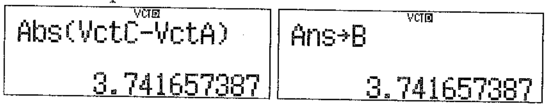


Khi đó $\begin{cases} AB=|\overrightarrow{AB}|=Abs(VctB-VctA) \\ AC=|\overrightarrow{AC}|=Abs(VctC-VctA) \\ BC=|\overrightarrow{BC}|=Abs(VctC-VctB) \end{cases}$

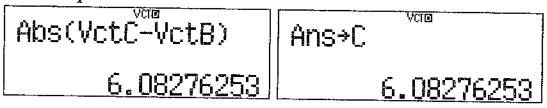
Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [–] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $4,582575695$. Ấn [SHIFT] [RCL] [(–)] $(\text{Ans}\to\text{A})$ để lưu kết quả đó vào biến nhớ A.



Nhập tiếp vào máy $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [SHIFT] [–] [SHIFT] [5] [3] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $3,741657387$. Ấn [SHIFT] [RCL] [°'"] $(\text{Ans}\to\text{B})$ để lưu kết quả đó vào biến nhớ B.



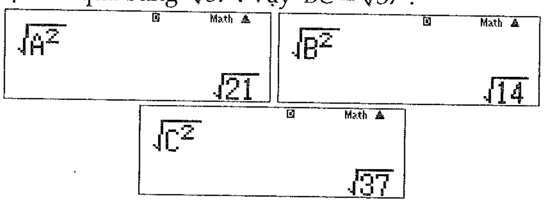
Nhập tiếp vào máy $\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctB})$, ấn [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [–] [SHIFT] [5] [4] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $6,08276253$. Ấn [SHIFT] [RCL] [hyp] $(\text{Ans}\to\text{C})$ để lưu kết quả đó vào biến nhớ C.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{A^2}$, ấn [√] [ALPHA] [(–)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{21}$. Vậy $AB=\sqrt{21}$.

Nhập vào máy $\sqrt{B^2}$, ấn [√] [ALPHA] [°'"] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{14}$. Vậy $AC=\sqrt{14}$.

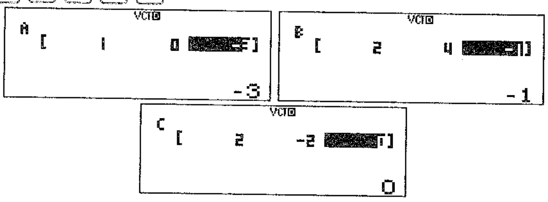
Nhập vào máy $\sqrt{C^2}$, ấn [√] [ALPHA] [hyp] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\sqrt{37}$. Vậy $BC=\sqrt{37}$.



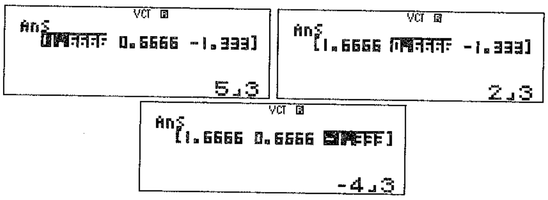
Câu 6: Đáp án A.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,0,-3]$, $\text{VctC}=[2,4,-1]$, $\text{VctC}=[2,-2,0]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [(–)] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [4] [=] [(–)] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [(–)] [2] [=] [0] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA}+\text{VctB}+\text{VctC})\div 3$, ấn [(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [+] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [3]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\left[\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{-4}{3}\right]$.



Vậy $G\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

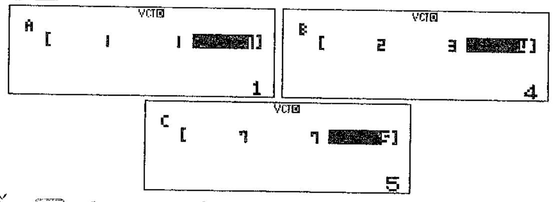
Câu 7: Đáp án B.

Để $MNPQ$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$

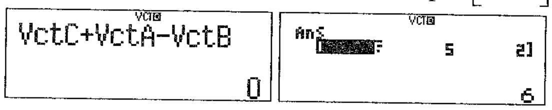
$\Leftrightarrow N-M=P-Q\Leftrightarrow Q=P+M-N$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,1,1]$, $\text{VctB}=[2,3,4]$ và $\text{VctC}=[7,7,5]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [3] [=] [4] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [7] [=] [7] [=] [5] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{VctC}+\text{VctA}-\text{VctB}$, ấn [SHIFT] [5] [5] [+] [SHIFT] [5] [3] [–] [SHIFT] [5] [4]. Ấn [=], máy hiện kết quả $[6,5,2]$



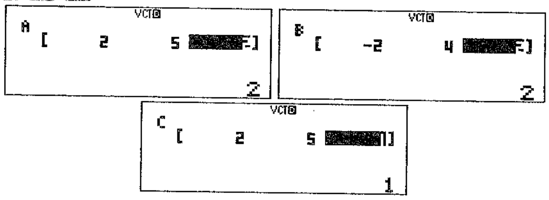
Vậy $Q(6;5;2)$.

Câu 8: Đáp án C.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;4;2)$ và $\overrightarrow{AD}=(2;5;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[2,5,2]$, $\text{VctB}=[-2,4,2]$ và $\text{VctC}=[2,5,1]$.

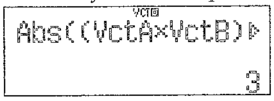
[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [5] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [(–)] [2] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [5] [=] [1] [=]



Khi đó $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

$\to V_{ABCD}=\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div 6$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div 6$, ấn [SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [6]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 3.



Vậy $V_{ABCD}=3$.

Câu 9: Đáp án A.

$$\begin{cases} V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{3}d\left(D,(ABC)\right).S_{\Delta ABC} \\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| \end{cases}$$

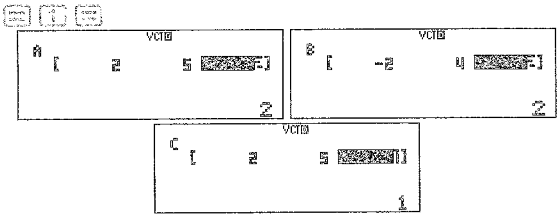
$$\rightarrow \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{3}d\left(D,(ABC)\right).\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

$$\rightarrow d\left(D,(ABC)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;5;2),\overrightarrow{AC}=(-2;4;2),\overrightarrow{AD}=(2;5;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[2,5,2],\text{VctB}=[-2,4,2]$ và $\text{VctC}=[2,5,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [5] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [(-)] [2] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [5] [=] [1] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình

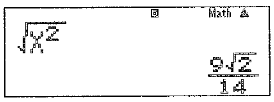
$$\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div\text{Abs}(\text{VctA}\times\text{VctB})$$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả 0,9091372901. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\rightarrow X)$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn [√■] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{9\sqrt{2}}{14}$.



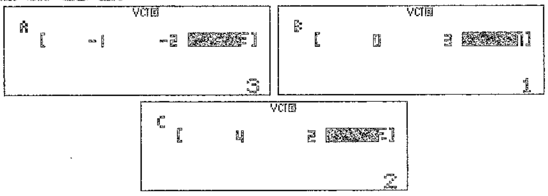
Câu 10: Đáp án A.

Công thức: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\widehat{BAC}$

$$\rightarrow \cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Nhập vào máy $\text{VctA}=[-1,-2,3],\text{VctB}=[0,3,1]$ và $\text{VctC}=[4,2,2]$.

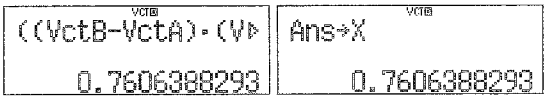
[MODE] [8] [1] [1] [(-)] [1] [=] [(-)] [2] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [0] [=] [3] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [4] [=] [2] [=] [2] [=]



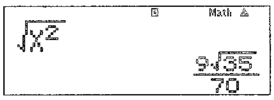
Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập $((\text{VctB}-\text{VctA})\bullet(\text{VctC}-\text{VctA}))\div(\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})$ $\times\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA}))$.

[(] [(] [SHIFT] [5] [4] [-] [SHIFT] [5] [3] [)] [SHIFT] [5] [7] [(] [SHIFT] [5] [5] [-] [SHIFT] [5] [3] [)] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [-] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [-] [SHIFT] [5] [3] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả 0,7606388293. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\rightarrow X)$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn [√■] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{9\sqrt{35}}{70}$.

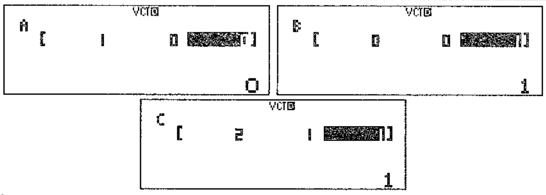


Câu 11: Đáp án C.

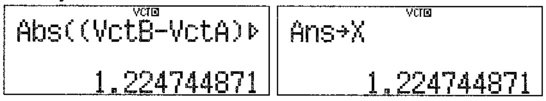
Công thức: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,0,0],\text{VctB}=[0,0,1]$ và $\text{VctC}=[2,1,1]$.

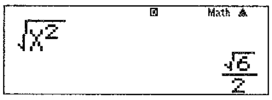
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [0] [=] [0] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [1] [=] [1] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctB}-\text{VctA})\times(\text{VctC}-\text{VctA}))\div 2$, ấn [SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [(] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)] [÷] [2]. Ấn [=], máy hiện kết quả $1,224744871$. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\to\text{X})$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



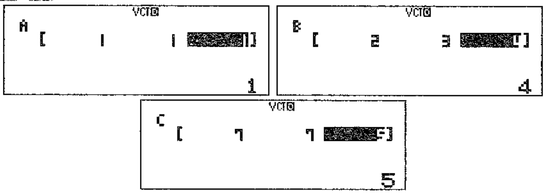
Câu 12: Đáp án A.

Công thức cần nhớ: $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=2.\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Giả sử hình bình hành $ABCD$ có tọa độ ba đỉnh là $A(1;1;1), B(2;3;4)$ và $C(7;7;5)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,1,1], \text{VctB}=[2,3,4]$ và $\text{VctC}=[7,7,5]$.

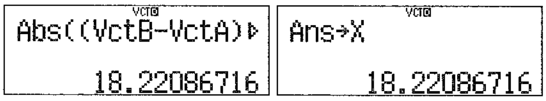
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [3] [=] [4] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [7] [=] [7] [=] [5] [=]



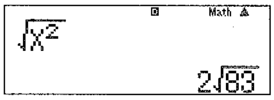
Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctB}-\text{VctA})\times(\text{VctC}-\text{VctA}))$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [(] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả $18,22086716$.

Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\to\text{X})$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $2\sqrt{83}$.

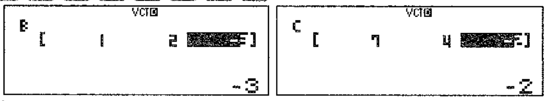


Câu 13: Đáp án A.

Từ $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Leftrightarrow E-C=2(B-E)\Leftrightarrow E=\frac{2B+C}{3}$

Nhập vào máy $\text{VctB}=[1,2,-3]$ và $\text{VctC}=[7,4,-3]$.

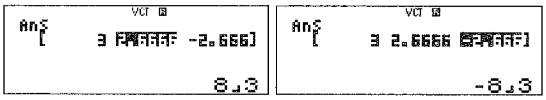
[MODE] [8] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [−] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [7] [=] [4] [=] [−] [3] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $(2\text{VctB}+\text{VctC})\div 3$

[(] [2] [SHIFT] [5] [4] [+] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [3].

Ấn [=], máy hiện kết quả là $\left[3,\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right]$.



Vậy $E\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$.

Câu 14: Đáp án A.

Do D là chân đường phân giác trong góc A của ΔABC nên $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\to\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$

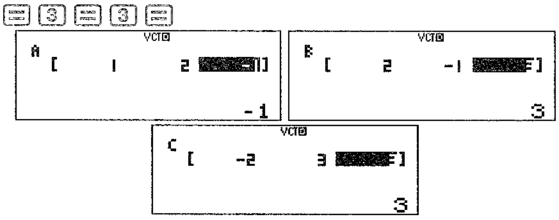
Suy ra $D-B=\frac{AB}{AC}.(C-D)$

$\Leftrightarrow\left(\frac{AB+AC}{AC}\right).D=\frac{AB.C+AC.B}{AC}$

$\Leftrightarrow D=\frac{AB.C+AC.B}{AB+AC}$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,2,-1], \text{VctB}=[2,-1,3]$ và $\text{VctC}=[-2,3,3]$.

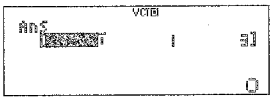
[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [2] [=] [(−)] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [(−)] [1] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [(−)] [2] [=] [3] [=] [3] [=]



Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})\times\text{VctC}+\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA})$ $\times\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctB}-\text{VctA})-\text{Abs}(\text{VctC}-\text{VctA}))$.

[(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [+] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [−] [SHIFT] [5] [3] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả là $\left[0,1,3\right]$.



Vậy $D\left(0;1;3\right)$.

Câu 15: Đáp án B.

Công thức cần nhớ:

$$\begin{cases} V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BA}\right|=\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD} \\ S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| \end{cases}$$

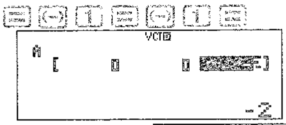
$$\rightarrow \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|$$

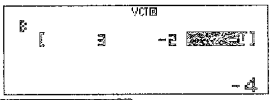
$$\rightarrow AH=d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

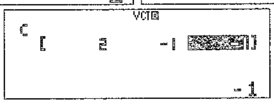
Lại có $\overrightarrow{BC}=\left(0;0;-2\right),\overrightarrow{BD}=\left(3;-2;-4\right),\overrightarrow{BA}=\left(2;-1;-1\right)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=\left[0,0,-2\right],\text{VctB}=\left[3,-2,-4\right]$ và $\text{VctC}=\left[2,-1,-1\right]$.

[MODE] [8] [1] [1] [0] [=] [0] [=] [(−)] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [3] [=] [(−)] [2] [=] [(−)] [4] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [(−)] [1] [=] [(−)] [1] [=]



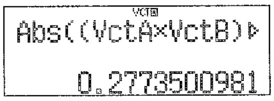


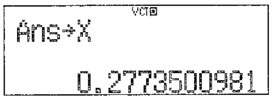


Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}\left(\left(\text{VctA}\times\text{VctB}\right)\bullet\text{VctC}\right)\div\text{Abs}\left(\text{VctA}\times\text{VctB}\right)$

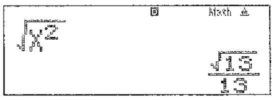
[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả $0,2773500981$. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $\left(\text{Ans}\rightarrow\text{X}\right)$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.





Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy $\sqrt{X^2}$, ấn [√] [ALPHA] [)] [x²]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.



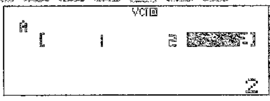
Dạng 2: Các bài toán về góc và khoảng cách trong không gian

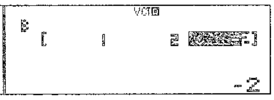
Câu 16: Đáp án B.

Mặt phẳng $\left(P\right)$ có VTPT là $\vec{n}=\left(1;2;-2\right)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=\left[1,2,2\right]$ và $\text{VctB}=\left[1,2,-2\right]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [2] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [(−)] [2] [=]

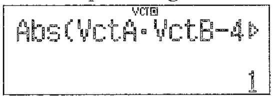




Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}\left(\text{VctA}\bullet\text{VctB}-4\right)\div\text{Abs}\left(\text{VctB}\right)$

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [4] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 1.



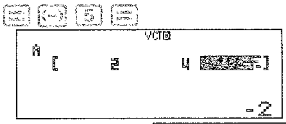
Vậy $d\left(I,\left(P\right)\right)=1$.

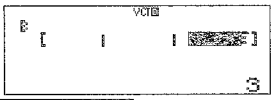
Câu 17: Đáp án D.

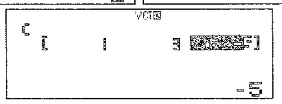
Đường thẳng d đi qua điểm $A\left(2;4;-2\right)$ và có VTCP là $\vec{u}=\left(1;3;-5\right)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=\left[2,4,-2\right],\text{VctB}=\left[1,1,3\right]$ và $\text{VctC}=\left[1,3,-5\right]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [4] [=] [(−)] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [1] [=] [3] [=] [(−)] [5] [=]





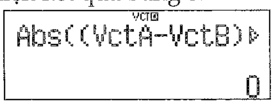


$$\rightarrow d\left(E,d\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{EA},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\text{Abs}\left(\left(\text{VctA}-\text{VctB}\right)\times\text{VctC}\right)}{\text{Abs}\left(\text{VctC}\right)}.$$

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}\left(\left(\text{VctA}-\text{VctB}\right)\times\text{VctC}\right)\div\text{Abs}\left(\text{VctC}\right)$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0.



Vậy $d\left(E,d\right)=0$.

Nhận xét: Thay tọa độ điểm $E(1;1;3)$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\begin{cases}1=2+t\\1=4+3t\\3=-2-5t\end{cases} \Leftrightarrow t=-1$ nên điểm $E\in d \rightarrow d(E,d)=0$.

Câu 18: Đáp án A.

Phân tích: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Nhập vào máy VctA $=[-2,-2,0]$, VctB $=[\sqrt{2},\sqrt{2},2]$.

[MODE] [8] [1] [1] [(-)] [2] [=] [(-)] [2] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [√] [2] [=] [√] [2] [=] [2] [=]

A [-2 -2 0]	B [1.4142 1.4142 2]

$\rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\text{VctA}\bullet\text{VctB}}{\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$:

[(] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $-0,7071067812$. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\rightarrow\text{X})$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.

(VctA·VctB)÷(Ab▸ -0.7071067812	Ans→X -0.7071067812

Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy [SHIFT] [cos] [ALPHA] [)] [)] $(\cos^{-1}(\text{X}))$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 135.

cos⁻¹(X)   135

Vậy $(\vec{u},\vec{v})=135°$.

Câu 19: Đáp án D.

Phân tích: Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có VTCP là $\vec{u_1},\vec{u_2}$ thì:

$$\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u_1},\vec{u_2})\right|=\frac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}.$$

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u_1}=(1;1;0)$ và đường thẳng $\vec{d_2}$ có VTCP là $\vec{u_2}=(-1;0;1)$.

Nhập vào máy VctA $=[1,1,0]$, VctB $=[-1,0,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [1] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [(-)] [1] [=] [0] [=] [1] [=]

A [1 1 0]	B [-1 0 1]

Khi đó $\cos(\widehat{d_1,d_2})=\dfrac{\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})}{\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$.

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0,5.

Abs(VctA·VctB)÷▸ 0.5	cos⁻¹(0.5) 60

Đưa máy về phương thức COMP, ấn [MODE] [1]. Nhập vào máy [SHIFT] [cos] [0] [.] [5] [)] $(\cos^{-1}(0.5))$. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 60. Vậy $(\widehat{d_1,d_2})=60°$.

Câu 20: Đáp án C.

Phân tích: Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u}$, mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}$ thì góc giữa đường thẳng và mặt phẳng được tính theo công thức:

$$\sin(\widehat{d,(P)})=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}.$$

Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u}=(1;-2;1)$ và mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(5;11;2)$.

Nhập vào máy VctA $=[1,-2,1]$, VctB $=[5,11,2]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [(-)] [2] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [5] [=] [1] [1] [=] [2] [=]

A [1 -2 1]	B [5 11 2]

Khi đó $\sin(\widehat{d,(P)})=\dfrac{\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})}{\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$.

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [×] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 0,5.

Abs(VctA·VctB)÷▸ 0.5	sin⁻¹(0.5) 30

Đưa máy về phương thức COMP, ấn MODE 1. Nhập vào máy SHIFT sin 0 . 5) $\left(\sin^{-1}(0.5)\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 30. Vậy $\left(\widehat{d,(P)}\right)=30°$.

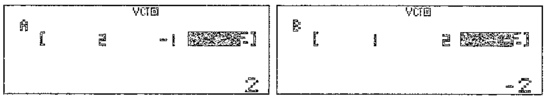
Câu 21: Đáp án A.

Phân tích: Hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng được tính theo công thức: $\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(2;-1;2)$ và $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-2)$.

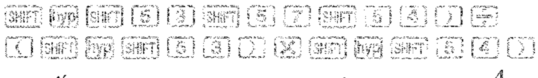
Nhập vào máy $\text{VctA}=[2,-1,2]$, $\text{VctB}=[1,2,-2]$.



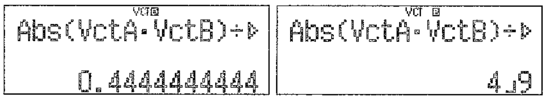


Khi đó $\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\dfrac{\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})}{\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB})}$.

Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA}\bullet\text{VctB})\div(\text{Abs}(\text{VctA})\times\text{Abs}(\text{VctB}))$:



Ấn =, máy hiện kết quả bằng $0,444...=\dfrac{4}{9}$.



Vậy $\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\dfrac{4}{9}$.

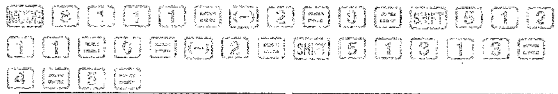
Câu 22: Đáp án A.

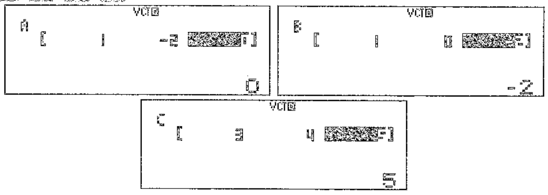
Phân tích: Nếu đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) thì nó có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$. Khi đó góc giữ đường thẳng d và mặt phẳng (P) được tính theo công thức:

$$\sin\left(\widehat{d,(P)}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(P)}}\right)\right|=\frac{\left|\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right].\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]\right|.\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}$$

Mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và (P) lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;-2;0),\overrightarrow{n_2}=(1;0;-2)$ và $\overrightarrow{n_3}=(3;4;5)$.

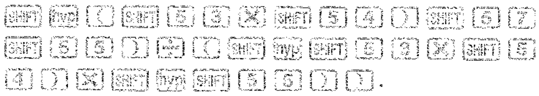
Nhập vào máy $\text{VctA}=[1,-2,0]$, $\text{VctB}=[1,0,-2]$ và $\text{VctC}=[3,4,5]$.



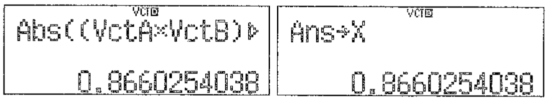


Khi đó $\sin\left(\widehat{d,(P)}\right)=\dfrac{\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctA}\times\text{VctB})\times\text{Abs}(\text{VctC})}$

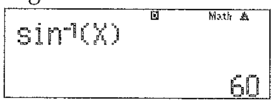
Ấn AC, đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}\times\text{VctB})\bullet\text{VctC})\div(\text{Abs}(\text{VctA}\times\text{VctB})\times\text{Abs}(\text{VctC}))$.



Ấn =, máy hiện kết quả bằng 0,8660254038. Ấn SHIFT RCL) $(\text{Ans}\to X)$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Đưa máy về phương thức COMP, ấn MODE 1. Nhập vào máy SHIFT sin ALPHA)) $\left(\sin^{-1}(X)\right)$. Ấn =, máy hiện kết quả bằng 60.



Vậy $\sin\left(\widehat{d,(P)}\right)=60°$.

Dạng 3: Các bài toán về mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng

Câu 23: Đáp án A.

Phân tích: Để xét số giao điểm của đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính bằng R. Ta tìm khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ là $d(I,\Delta)$

+ Nếu $d(I,\Delta)<R$ thì đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

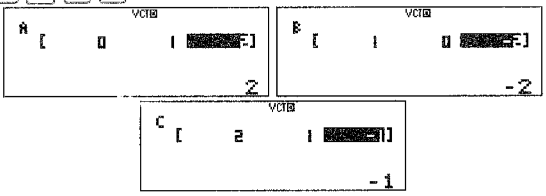
+ Nếu $d(I,\Delta)=R$ thì đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm.

+ Nếu $d(I,\Delta)>R$ thì đường thẳng và mặt cầu không cắt nhau.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;1;2)$ và có VTCP là $\vec{u}=(2;1;-1)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=2$. Ta có $d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Nhập vào máy: $\text{VctA}=[0,1,2], \text{VctB}=[1,0,-2]$ và $\text{VctC}=[2,1,-1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [0] [=] [1] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [0] [=] [(-)] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [1] [=] [(-)] [1] [=]

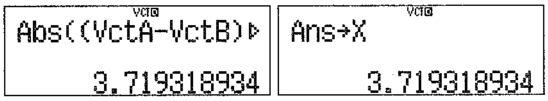


Khi đó $d(I,\Delta)=\dfrac{\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctC})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})\div\text{Abs}(\text{VctC})$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 3,719318934. Ấn [SHIFT] [RCL] [)] $(\text{Ans}\to\text{X})$ để gán kết quả này vào biến nhớ X.



Vậy $d(I,\Delta)=3,719...>2=R\to$ Đường thẳng Δ và mặt cầu (S) không cắt nhau.

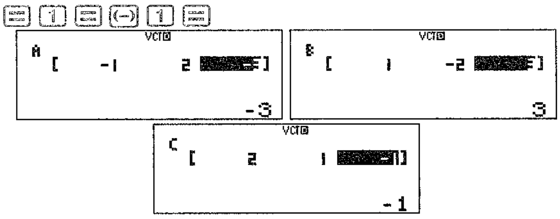
Câu 24: Đáp án D.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;2;-3)$ và có VTCP là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R\to R=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[-1,2,-3], \text{VctB}=[1,-2,3]$ và $\text{VctC}=[2,1,-1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [(-)] [1] [=] [2] [=] [(-)] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [(-)] [2] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [1] [=] [(-)] [1] [=]

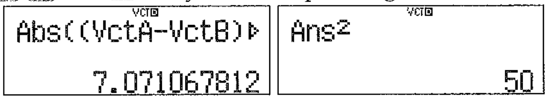


Khi đó $d(I,d)=\dfrac{\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctC})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})\div\text{Abs}(\text{VctC})$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 7,071067812. Ấn [Ans] [x^2], ấn [=], máy hiện kết quả bằng 50.



Vậy $d^2(I,d)=50=R^2$ và phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=50$.

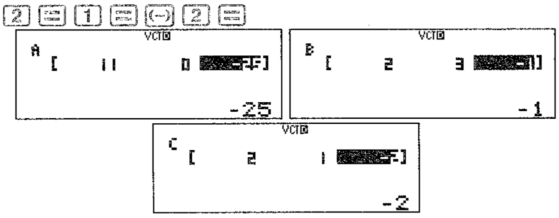
Câu 25: Đáp án C.

> Phân tích: Giả sử mặt cầu cần tìm là (S) có tâm I, bán kính R.
>
> Gọi H là trung điểm $AB\to IH\perp AB\to IH=d(I,d)$.
>
> Khi đó $IA^2=IH^2+HA^2\Leftrightarrow R^2=d^2(I,d)+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$
>
> $\Leftrightarrow R^2=d^2(I,d)+64$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(11;0;-25)$ và có VTCP là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

Nhập vào máy $\text{VctA}=[11,0,-25], \text{VctB}=[2,3,-1]$ và $\text{VctC}=[2,1,-2]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [(-)] [2] [5] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [=] [3] [=] [(-)] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [1] [=] [(-)] [2] [=]

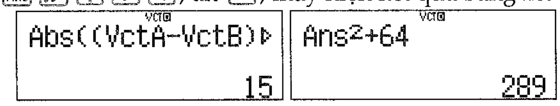


Khi đó $d(I,d)=\dfrac{\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctC})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA}-\text{VctB})\times\text{VctC})\div\text{Abs}(\text{VctC})$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 15. Ấn [Ans] [x^2] [+] [6] [4], ấn [=], máy hiện kết quả bằng 289.



Vậy $R^2 = 289$ và phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289.$$

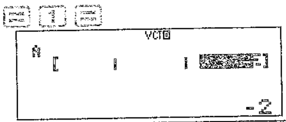
Câu 26: Đáp án B.

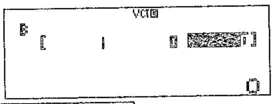
> Phân tích: Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R.
>
> Gọi H là trung điểm $AB \rightarrow IH \perp AB$ và $IH = d(I,d)$.
>
> Do ΔIAB đều nên $IH = \dfrac{IA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \rightarrow R = \dfrac{2IH}{\sqrt{3}}$
>
> $\rightarrow R^2 = \dfrac{4IH^2}{3} = \dfrac{4.d^2(I,d)}{3}$.

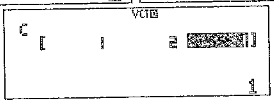
Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;-2)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1;2;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA} = [1,1,-2], \text{VctB} = [1,0,0]$ và $\text{VctC} = [1,2,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [1] [=] [(−)] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [0] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [1] [=] [2] [=] [1] [=]





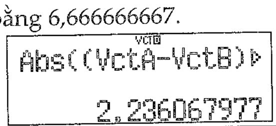


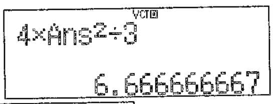
Khi đó $d(I,d) = \dfrac{\text{Abs}((\text{VctA} - \text{VctB}) \times \text{VctC})}{\text{Abs}(\text{VctC})}$.

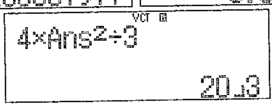
Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}((\text{VctA} - \text{VctB}) \times \text{VctC}) \div \text{Abs}(\text{VctC})$

[SHIFT] [hyp] [(] [SHIFT] [5] [3] [−] [SHIFT] [5] [4] [)] [×] [SHIFT] [5] [5] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [5] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 2,236067977.

Ấn [4] [×] [Ans] [x^2] [÷] [3], ấn [=], máy hiện kết quả bằng 6,666666667.







Vậy $R^2 = \dfrac{20}{3}$ và phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$.

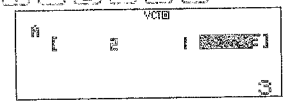
Câu 27: Đáp án A.

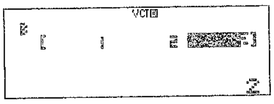
> Phân tích: Mặt cầu (S) tâm I, bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi $R = d(I,(P))$.

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (1;2;2)$.

Nhập vào máy $\text{VctA} = [2,1,3]$ và $\text{VctB} = [1,2,2]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [=] [1] [=] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [2] [=]



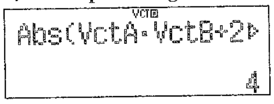


Khi đó $d(I,(P)) = \dfrac{\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB} + 2)}{\text{Abs}(\text{VctB})}$.

Ấn [AC], đưa máy về màn hình tính toán. Nhập vào máy $\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB} + 2) \div \text{Abs}(\text{VctB})$

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [+] [2] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng 4.



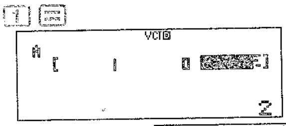
Vậy $d(I,(P)) = 4 \rightarrow R = 4 \rightarrow R^2 = 16$ và phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16$.

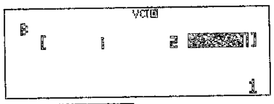
Câu 28: Đáp án A.

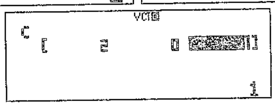
Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;2)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1;2;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA} = [1,0,2], \text{VctB} = [1,2,1]$ và $\text{VctC} = [2,0,1]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [2] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [0] [=] [1] [=]



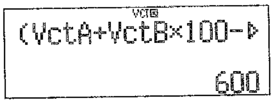




Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $(\text{VctA} + \text{VctB} \times 100 - \text{VctC}) \bullet \text{VctB}$:

[(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $600 = 6t$ (với $t = 100$).



Giải phương trình $6t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d

Với $t = 0 \rightarrow H = A + 0.\vec{u} = A = \text{VctA} = (1;0;2)$.

Chú ý: Nhận thấy các điểm $(-1;1;2)$ và $(1;1;2)$ không thuộc d nên không thể là hình chiếu của M trên đường thẳng d. Loại B và D.

Nếu $H(0;-2;1) \to \overrightarrow{MH} = (-2;-2;0) \to \begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH}.\vec{u} = -6 \neq 0 \end{cases}$

$\to H(0;-2;1)$ không là hình chiếu của M trên d.

Nếu $H(1;0;2) \to \overrightarrow{MH} = (-1;0;1) \to \begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

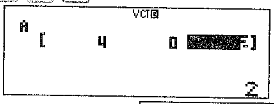
$\to \begin{cases} H \in d \\ MH \perp d \end{cases} \to H(1;0;2)$ là hình chiếu của M trên d

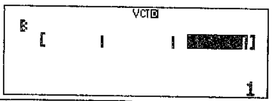
Câu 29: Đáp án A.

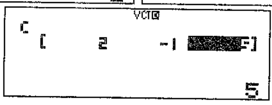
Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(4;0;2)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1;1;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA} = (4;0;2)$, $\text{VctB} = (1;1;1)$ và $\text{VctC} = (2;-1;5)$.

[MODE] [8] [1] [1] [4] [=] [0] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [SHIFT] [5] [1] [3] [1] [2] [=] [(−)] [1] [=] [5] [=]



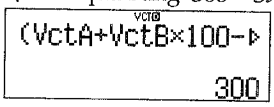




Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào máy $(\text{VctA} + \text{VctB} \times 100 - \text{VctC}) \bullet \text{VctB}$

[(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [−] [SHIFT] [5] [5] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $300 = 3t$ (với $t = 100$).



Giải phương trình $3t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Với $t = 0$ thì tọa độ hình chiếu H là $H = A + 0.\vec{u} = A = (4;0;2)$.

Chú ý: Ta có thể sử dụng phương pháp thử đáp án và loại trừ để tìm đáp án một cách nhanh hơn. Nhận thấy các điểm $(2;0;1)$, $(4;1;2)$ và $(-4;0;2)$ không thuộc Δ nên không thể là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ. Ta loại ngay B, C và D.

Với $H(4;0;2) \to \overrightarrow{MH} = (2;1;-3) \to \begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

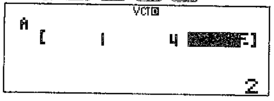
$\to \begin{cases} H \in \Delta \\ MH \perp \Delta \end{cases} \to$ H là hình chiếu của M trên Δ.

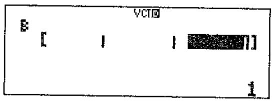
Câu 30: Đáp án C.

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (1;1;1)$.

Nhập vào máy $\text{VctA} = (1;4;2)$ và $\text{VctB} = (1;1;1)$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [4] [=] [2] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [1] [=] [1] [=] [1] [=]

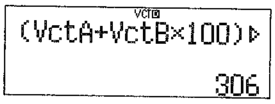




Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $(\text{VctA} + \text{VctB} \times 100) \bullet \text{VctB} - 1$

[(] [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [1] [0] [0] [)] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [1].

Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $306 = 3.100 + 6 = 3t + 6$ (với $t = 100$).



Giải phương trình $3t + 6 = 0 \to t = -2$.

Nhập vào máy $\text{VctA} + \text{VctB} \times (-2)$, ấn [SHIFT] [5] [3] [+] [SHIFT] [5] [4] [×] [(] [(−)] [2] [)]. Ấn [=], máy hiện kết quả bằng $(-1;2;0)$. Như vậy $H(-1;2;0)$.

Chú ý: Nhận thấy các điểm $(1;-2;0)$ và $(1;2;0)$ không thuộc (α) nên không thể là hình chiếu của điểm M trên (α). Loại B và D.

Nếu $H(2;-1;0) \to \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH} = (1;-5;-2) \end{cases} \to \overrightarrow{MH}$ không cùng phương với $\vec{n} = (1;1;1)$. Vậy MH không vuông góc với (α) nên $H(2;-1;0)$ không phải là hình chiếu.

Nếu $H(-1;2;0) \to \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH} = (-2;-2;-2) \end{cases} \to \overrightarrow{MH}$ cùng phương với $\vec{n} = (1;1;1) \to MH \perp (\alpha)$. Vậy $H(-1;2;0)$ là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α).

PHẦN 3

Các phụ lục

PHỤ LỤC 1. KĨ THUẬT CALC ĐƠN VỊ

1. Giới thiệu tổng quan về kĩ thuật

"CALC đơn vị" tức là gắn vào một biểu thức những giá trị được quy ước làm đơn vị (có dạng 10^n), thường là $\left\{\frac{1}{1000};\frac{1}{1000};10;100;1000\right\}$.

Công dụng: Thường dùng để khai triển, rút gọn,... những biểu thức một biến hay nhiều biến một cách nhanh chóng. Đây thường là những khâu biến đổi trung gian quan trọng, tuy nhiên nếu biến đổi thuần túy bằng tay sẽ mất nhiều thời gian. Kĩ thuật được kết hợp với nhiều tính năng và phương thức của máy, ví dụ như COMP, CMPLX,...; được sử dụng để giải quyết nhanh các bài toán liên quan đến có chứa ẩn như giải phương trình, hệ phương trình, đạo hàm, hàm số, số phức, hình học tọa độ,...; bao hàm ở hầu hết các chuyên đề quan trọng trong chương trình Toán THPT. Có thể nói, đây là một kỹ năng chủ đạo và quan trọng trong giải toán bằng máy tính cầm tay.

2. Cách thức xây dựng kĩ thuật

Dựa vào sự phân bậc của biến mà khi thay những giá trị "đơn vị" vào, kết quả nhận được sẽ có sự phân tách rõ ràng về hệ số của các thành phần trong biểu thức → Dễ xác định chính xác các thành phần của biểu thức từ kết quả đó.

Ví dụ 1: Thay các giá trị $\left\{\frac{1}{1000};\frac{1}{100};10;100;1000\right\}$ vào các biểu thức $1;x;x^2;x^3$ và $5x^3+4x^2+3x+2$ ta nhận được kết quả như bảng dưới đây

	$10=10^1$	$100=10^2$	$1000=10^3$	$\frac{1}{100}=0,01=10^{-2}$	$\frac{1}{1000}=0,001=10^{-3}$
1	1	1	1	1	1
x	1 0	1 00	1 000	0, 01	0, 001
x^2	1 0 0	1 00 00	1 000 000	0, 00 01	0, 000 001
x^3	1 0 0 0	1 00 00 00	1 000 000 000	0, 00 00 01	0, 000 000 001
$5x^3+4x^2+3x+2$	5 4 3 2	5 04 03 02	5 004 003 002	2, 03 04 05	2, 003 004 005

Nhận xét:

Nhận thấy rõ, khi thay các giá trị đơn vị vào biểu thức $5x^3+4x^2+3x+2$ thì kết quả nhận được có sự phân tách rõ ràng về hệ số của các thành phần trong biểu thức đó. Từ đó, ta đưa ra hai quy tắc dưới đây.

CHÚ Ý QUY TẮC 1

Số $\overline{a_1a_2...a_n}$ còn được viết là $\overline{a_1a_2...a_n},000...$ nên ta nói rằng "tách kết quả thành cặp $|n|$ số từ trước dấu phẩy".

Quy tắc 1: Khi CALC một biểu thức với giá trị 10^n thì ta sẽ tách kết quả ra từng cặp $|n|$ số kể từ hàng đơn vị. Cụ thể:

* Với $n>0$ $(n=1,2,3)$: Theo chiều *từ phải sang trái*, tách kết quả thành từng cặp $|n|$ số từ trước dấu phẩy, bậc của biến tăng dần từ x^0.

* Với $n<0$ $(n=-2,-1)$: Theo chiều từ *trái sang phải*, tách kết quả thành từng cặp $|n|$ số từ sau dấu phẩy, bậc của biến tăng dần từ x^0.

CHÚ Ý QUY TẮC 2

Quy tắc 2 được dùng chung cho cả $n>0$ và cả $n<0$.

Quy tắc 2: Nếu một cặp $|n|$ số nào đó lớn bất thường (kí hiệu cặp đó là số M) thì $\left(M-10^{|n|}\right)$ chính là hệ số cần tìm tại đó, đồng thời cộng thêm 1 vào cặp số trước đó (cặp số phía bên trái cặp số đó).

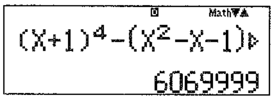
Ví dụ 2: Khai triển đa thức $(x+1)^4-(x^2-x-1)^2-2x-1$ bằng kĩ thuật CALC đơn vị $x=100, x=1000, x=0,01$ và $x=0,001$.

Phân tích, lời giải:

Nhập vào màn hình $(X+1)^4-(X^2-X-1)^2-2X-1$:

[(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [$x^{■}$] [4] [▶] [−] [(] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [x^2] [−] [2] [ALPHA] [)] [−] [1]

** CALC đơn vị* $x=100$



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6069999.

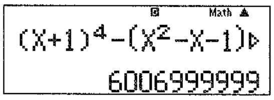
Do $100=10^2 \to n=2>0$ nên theo **quy tắc 1**: Theo chiều từ phải sang trái, tách kết quả thành từng cặp 2 số và bậc của biến tăng dần, tức là $\underset{x^3}{6}/\underset{x^2}{06}/\underset{x^1}{99}/\underset{x^0}{99}$.

Nhận thấy 99 là một số lớn bất thường, nên theo **quy tắc 2**, ta có:

$$\underset{x^3}{6}/\underset{x^2}{06+1}/\underbrace{99+1-10^2}_{x^1}/\underbrace{99-10^2}_{x^0} \longrightarrow \underset{x^3}{6}/\underset{x^2}{7}/\underset{x^1}{0}/\underset{x^0}{-1}$$

Như vậy $(x+1)^4-(x^2-x-1)^2-2x-1=6x^3+7x^2-1$.

** CALC đơn vị* $x=1000$



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] [0] $(X=1000)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 6006999999.

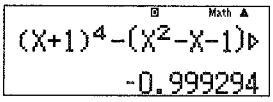
Do $1000=10^3 \to n=3>0$ nên theo **quy tắc 1**: Theo chiều từ phải sang trái, tách kết quả thành từng cặp 3 số và bậc của biến tăng dần, tức là $\underset{x^3}{6}/\underset{x^2}{006}/\underset{x^1}{999}/\underset{x_0}{999}$.

Nhận thấy 999 là số lớn bất thường, nên theo **quy tắc 2** ta có

$$\underset{x^3}{6}/\underbrace{006+1}_{x^2}/\underbrace{999+1-10^3}_{x^1}/\underbrace{999-10^3}_{x_0} \longrightarrow \underset{x^3}{6}/\underset{x^2}{7}/\underset{x^1}{0}/\underset{x_0}{-1}$$

Như vậy $(x+1)^4-(x^2-x-1)^2-2x-1=6x^3+7x^2-1$.

** CALC đơn vị* $x=0,01$



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] [.] [0] [1] $(X=0,01)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-0,999294$.

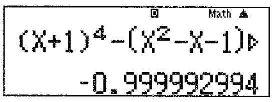
Do $0,01=10^{-2} \to n=-2<0$ nên theo **quy tắc 1:** Theo chiều từ trái sang phải, tách kết quả thành từng cặp 2 số từ sau dấy phẩy, bậc của biến tăng dần từ x^0. Tức là $-\left(\underset{x^0}{0}/\underset{x^1}{99}/\underset{x^2}{92}/\underset{x^3}{94}\right)$.

Nhận thấy các số 99, 92 và 94 lớn bất thường nên theo **quy tắc 2** ta có:

$$-\left(\underset{x^0}{0+1}/\underbrace{99+1-10^2}_{x^1}/\underbrace{92+1-10^2}_{x^2}/\underbrace{94-10^2}_{x^3}\right) \longrightarrow -\left(\underset{x^0}{1}/\underset{x}{0}/\underset{x^2}{-7}/\underset{x}{-6}\right)$$

Như vậy $(x+1)^4-(x^2-x-1)^2-2x-1=-(1-7x^2-6x^3)=6x^3+7x^2-1$.

** CALC đơn vị* $x=0,001$



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] [.] [0] [0] [1] $(X=0,001)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng $-0,999992994$.

Do $0{,}001 = 10^{-3} \to n = -3 < 0$ nên theo quy tắc 1: Theo chiều Theo chiều từ trái sang phải, tách kết quả thành từng cặp 3 số từ sau dấy phẩy, bậc của biến tăng dần từ x^0. Tức là $-\left(\underset{x^0}{0} / \underset{x^1}{999} / \underset{x^2}{992} / \underset{x^3}{994}\right)$.

Nhận thấy các số 999, 992 và 994 lớn bất thường nên theo **quy tắc 2** ta có:

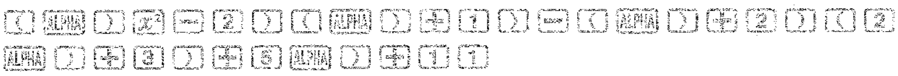
$$-\left(\underset{x^0}{0+1} / \underset{x^1}{\underbrace{999+1-10^3}} / \underset{x^2}{\underbrace{992+1-10^3}} / \underset{x^3}{\underbrace{994-10^3}}\right) \longrightarrow -\left(\underset{x^0}{1} / \underset{x^1}{0} / \underset{x^2}{-7} / \underset{x^3}{-6}\right)$$

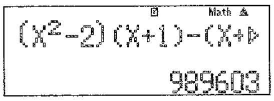
Như vậy $(x+1)^4 - (x^2 - x - 1)^2 - 2x - 1 = -(1 - 7x^2 - 6x^3) = 6x^3 + 7x^2 - 1$.

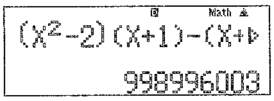
> Ví dụ 3: Khai triển đa thức $(x^2-2)(x+1)-(x+2)(2x+3)+5x+11$ bằng kĩ thuật CALC đơn vị.

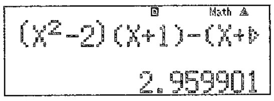
Lời giải

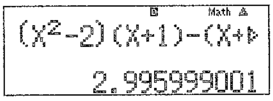
Nhập vào màn hình $(X^2-2)(X+1)-(X+2)(2X+3)+5X+11$:











* CALC $X = 100 \to \underset{x^2}{98} / \underset{x_1}{96} / \underset{x_0}{03} \to \underset{x^3}{1} / \underset{x^2}{\underbrace{98+1-10^2}} / \underset{x_1}{\underbrace{96-10^2}} / \underset{x_0}{03} \to \underset{x^3}{1} / \underset{x^2}{-1} / \underset{x_1}{-4} / \underset{x_0}{3}$.

* CALC $X = 1000 \to \underset{x^2}{998} / \underset{x^1}{996} / \underset{x^0}{003} \to \underset{x^3}{1} / \underset{x^2}{\underbrace{998+1-10^3}} / \underset{x^1}{\underbrace{996-10^3}} / \underset{x^0}{003}$

$\to \underset{x^3}{1} / \underset{x^2}{-1} / \underset{x^1}{-4} / \underset{x^0}{3}$.

* CALC $X = 0{,}01 \to \underset{x^0}{2} / \underset{x^1}{95} / \underset{x^2}{99} / \underset{x^3}{01} \to \underset{x^0}{2+1} / \underset{x^1}{\underbrace{95+1-10^2}} / \underset{x^2}{\underbrace{99-10^2}} / \underset{x^3}{01}$

$\to \underset{x^0}{3} / \underset{x^1}{-4} / \underset{x^2}{-1} / \underset{x^3}{1}$.

* CALC $X = 0{,}001 \to \underset{x^0}{2} / \underset{x^1}{995} / \underset{x^2}{999} / \underset{x^3}{001} \to \underset{x^0}{2+1} / \underset{x^1}{\underbrace{995+1-10^3}} / \underset{x^2}{\underbrace{999-10^3}} / \underset{x^3}{001}$

$\to \underset{x^0}{3} / \underset{x^1}{-4} / \underset{x^2}{-1} / \underset{x^3}{1}$.

Vậy $(x^2-2)(x+1)-(x+2)(2x+3)+5x+11 = x^3 - x^2 - 4x + 3$.

3. Kĩ thuật CALC đơn vị với đa thức hai biến

Kĩ thuật CALC đơn vị cũng được sử dụng với các biểu thức chứa hai, ba hay nhiều biến. Tuy nhiên, để xử lý tốt bài toán này, ta cần kết hợp nhiều kĩ thuật CALC đơn vị khác nhau.

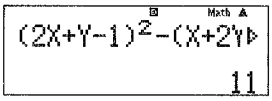
Một đa thức hai biến *x,y* có dạng $ax^2 + bx + cxy + d + ey + fy^2$ với *a, b, c, d, e, f* là các hệ số.

> Phương pháp bấm máy:
>
> ***Cách 1:***
>
> * CALC $X = 0, Y = 0$ ta tìm được hệ số tự do *d*.
>
> * CALC $X = 10^n$ và $Y = 0$ ta tìm được *a, b* (do khi này biểu thức chỉ chứa ẩn X).
>
> * CALC $X = 0$ và $Y = 10^n$ ta tìm được *e, f* (do khi này biểu thức chỉ chứa ẩn Y)
>
> * CALC $X = 10^n$ và $Y = 1$ ta tìm được *c* (hoặc có thể CALC $X = 10^n$ và $Y = 10^{-n}$).
>
> ***Cách 2:***
>
> * CALC $X = 0, Y = 0$ ta tìm được hệ số tự do *d*.
>
> * CALC $X = 10^n$ và $Y = 10^{-n}$ ta tìm được các hệ số *a, b, c, e, f*.

> Ví dụ: Khai triển đa thức $(2x+y-1)^2 - (2y+x+3)(2x-y-2) + 3x - 5y^2 + 4$ bằng kĩ thuật CALC đơn vị

Lời giải

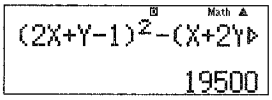
Cách 1:



* Nhập vào màn hình $(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4$:

[(] [2] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [)] [x²] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [ALPHA] [S⇔D] [+] [3] [)] [(] [2] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [S⇔D] [−] [2] [)] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [5] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [+] [4]

* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [0] $(Y=0)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 11 là hệ số tự do.



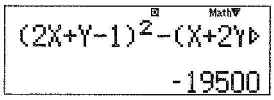
* Sửa biểu thức thành $(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4-11$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [0] $(Y=0)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 19500

$\to \underset{x^2}{1}/\underset{x^1}{95}/\underset{x^0}{00} \to \underset{x^2}{1+1}/\underbrace{95-10^2}_{x^1}/\underset{x^0}{00} \to \underset{x^2}{2}/\underset{x^1}{-5}/\underset{x^0}{00} \to 19500 = 2x^2-5x$.

* Nhập vào màn hình

$$(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4-11-2X^2+5X$$

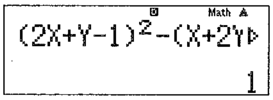


Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [1] [0] [0] $(Y=100)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng –19500

$\to -\left(\underset{x^2}{1}/\underset{x^1}{95}/\underset{x^0}{00}\right) \to -\left(\underset{x^2}{1+1}/\underbrace{95-100}_{x^1}/\underset{x^0}{00}\right) \to -\left(\underset{x^2}{2}/\underset{x^1}{-5}/\underset{x^0}{00}\right) \to -19500 = -2y^2+5y$

* Nhập vào màn hình

$(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4-11-2X^2+5X+2Y^2-5Y$



Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [0] [.] [0] [1] $(Y=0,01)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 1 chính là hệ số của *xy*.

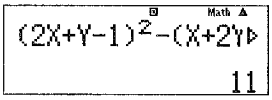
Vậy

$(2x+y-1)^2-(2y+x+3)(2x-y-2)+3x-5y^2+4 = 2x^2-5x+xy-2y^2+5y+11$.

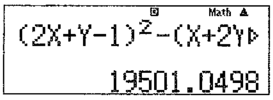
Cách 2:

* Nhập vào màn hình $(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4$:

[(] [2] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [)] [x²] [−] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [ALPHA] [S⇔D] [+] [3] [)] [(] [2] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [S⇔D] [−] [2] [)] [+] [3] [ALPHA] [)] [−] [5] [ALPHA] [S⇔D] [x²] [+] [4]



* Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [0] $(X=0)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [0] $(Y=0)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 11 là hệ số tự do.



* Sửa biểu thức thành $(2X+Y-1)^2-(X+2Y+3)(2X-Y-2)+3X-5Y^2+4-11$

Ấn [CALC], máy hỏi X? Ấn [1] [0] [0] $(X=100)$. Ấn [=] máy hỏi Y? Ấn [0] [.] [0] [1] $(Y=0,01)$. Ấn [=] máy hiện kết quả bằng 19501,0498.

Theo **quy tắc 1**, ta tách như sau $\underset{x^2}{1}/\underset{x^1}{95}/\underset{xy}{01}/\underset{y}{04}/\underset{y^2}{98}$

$\to \underset{x^2}{1+1}/\underbrace{95-100}_{x^1}/\underset{xy}{01}/\underset{y}{04+1}/\underbrace{98-100}_{y^2} \to \underset{x^2}{2}/\underset{x^1}{-5}/\underset{xy}{1}/\underset{y}{5}/\underset{y^2}{-2}$

$\to 19501,0498 = 2x^2-5x+xy+5y-2y^2$.

Vậy

$(2x+y-1)^2-(2y+x+3)(2x-y-2)+3x-5y^2+4 = 2x^2-5x+xy-2y^2+5y+11$.

STUDY TIPS

Ở cách 2, kết quả sau khi phân tách theo **quy tắc 1** sẽ được sắp xếp theo thứ tự hệ số của x^2, x, xy, y, y^2. Tiếp đó, ta sử dụng **quy tắc 2** để xác định biểu thức thu gọn chính xác.

PHỤ LỤC 2.
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN VỚI HỆ TRỤC OXYZ

1. Giới thiệu tổng quan về kĩ thuật

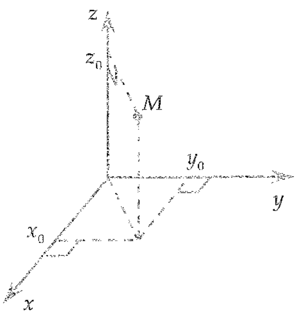
Hình học không gian cổ điển là một phần quan trọng không thể thiếu trong chương trình Toán THPT cũng như trong các đề thi THPT Quốc Gia. Tất nhiên, không thể tránh khỏi việc có nhiều học sinh gặp khó khăn trong việc tiếp cận các bài toán này vì khó tưởng tượng.

Nhờ việc ứng dụng các lý thuyết, công thức trong không gian tọa độ *Oxyz* mà ta có thể giải các bài toán về hình học không gian cổ điển như: tính thể tích, khoảng cách, góc,... một cách dễ dàng hơn bằng kỹ thuật ***gắn hệ trục tọa độ***.

CHÚ Ý

Trên máy tính cầm tay, để xử lý các bài toán trong không gian *Oxyz*, ta đưa máy về phương thức VECTOR: [MODE] [8]

2. Một số lý thuyết cơ bản trong hình học tọa độ Oxyz



Hệ trục tọa độ Descartes trong không gian: Là hệ trục bao gồm ba trục tọa độ *Ox*, *Oy* và *Oz* đôi một vuông góc với nhau.

Tọa độ của một điểm: Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có tọa độ được xác định như hình bên.

Các công thức tính tọa độ của hai vector

1. Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ thì $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

2. Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ thì $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$.

3. Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ thì $\vec{a}\pm\vec{b}=(x\pm x';y\pm y';z\pm z')$.

4. Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $k\in\mathbb{R}$ thì $k\vec{a}=(kx;ky;kz)$.

5. Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Tích vô hướng của hai vector: Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$.

1. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

2. $\vec{a}.\vec{b}=xx'+yy'+zz'$

3. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$.

CHÚ Ý

Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vector vuông góc với cả hai vector đó. Tức là $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$ và $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$.

Tích có hướng của hai vector: Cho $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$.

Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vector, kí hiệu là $[\vec{a},\vec{b}]$ và được xác định bởi công thức: $[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z & x\\ z' & x'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\right)$.

Các tính chất quan trọng trong hình học Oxyz:

1) Thể tích:

* Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.

* Thể tích khối tứ diện *ABCD* là $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$.

2) Khoảng cách:

* Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB: $d(M,AB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d(AB,CD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$.

* Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$:

$$d(M,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3) Góc:

* Góc giữa hai đường thẳng AB và CD: $\cos\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$

* Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng: $\sin\left(\widehat{AB,(P)}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}$

* Góc giữa hai mặt phẳng: $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}$.

4) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp:

Cách 1:

* ***Bước 1:*** Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy và vuông góc với mặt đáy.

* ***Bước 2:*** Gọi I là tâm mặt cầu nên I thuộc d. Tham số hóa tọa độ điểm I (1 ẩn).

* ***Bước 3:*** Sử dụng tính chất cách đều của tâm I đến các đỉnh. Thiết lập phương trình tìm ẩn. Ta tìm được tọa độ tâm I. Từ đó suy ra bán kính.

Cách 2: (Nếu biết trước tọa độ các đỉnh của hình chóp)

Giả sử phương trình mặt cầu có dạng $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$.

Dựa vào tính chất tâm I cách đều các đỉnh, ta thiết lập được hệ phương trình gồm bốn ẩn a,b,c,d. Giải hệ tìm bốn ẩn này. Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

> **CHÚ Ý**
>
> Nếu đáy của hình chóp là một tam giác đã biết trước tọa độ ba đỉnh, ta sử dụng **Phương pháp tọa độ tam tuyến** được đề cập ở chủ đề 10 để tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

3. Đối với các hình đa diện có mô hình tam diện vuông

Phương pháp chọn hệ trục tọa độ:

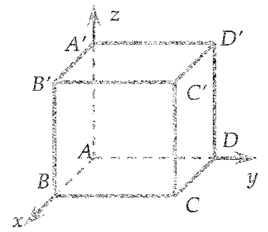
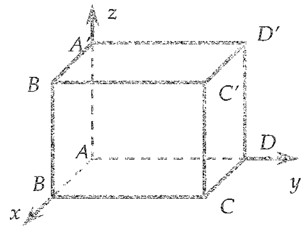
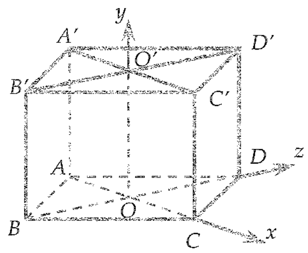
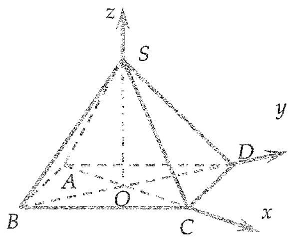
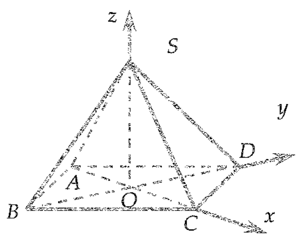
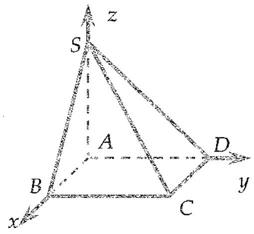
* **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tâm O trùng với đỉnh của tam diện vuông.

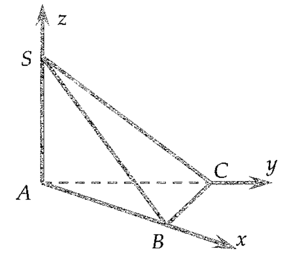
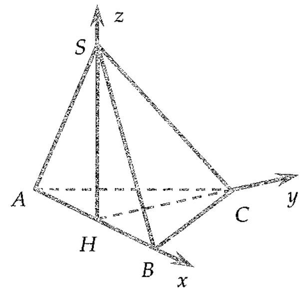
* **Bước 2:** Xác định tọa độ các đỉnh liên quan từ dữ kiện đề bài.

* **Bước 3:** Sử dụng các công thức, tính chất trong tọa độ $Oxyz$ để giải quyết bài toán **(có thể kết hợp với máy tính cầm tay)**.

> **TAM DIỆN VUÔNG**
>
> Một hình đa diện có mô hình tam diện vuông có nghĩa là hình đó tồn tại ba cạnh đôi một vuông góc với nhau. Giao điểm của ba cạnh này được gọi là đỉnh của tam diện vuông.

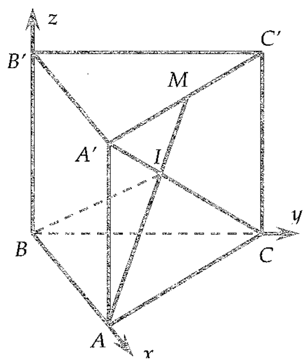
Một số hình đa diện có mô hình tam diện vuông thường gặp:

<table>
<tr><th>Giả thiết và chọn hệ trục Oxyz tương ứng</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td>1. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0)$,
$A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=a, AD=b$ và $AA'=c$.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0)$,
$A'(0;0;c), B'(a;0;c), C'(a;b;c), D'(0;b;c)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
* Gốc tọa độ O trùng với giao điểm của hai đường chéo AC và BD $(O=AC\cap BD)$.
* Điểm C thuộc tia Ox, điểm D thuộc tia Oy.
* Trục Oz đi qua hai tâm của hai đáy.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a, đường cao $SO=h$ với $O=AC\cap BD$.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
$O(0;0;0), A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,
$C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;h)$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SO=h$ với $SO\perp(ABCD)$ và $O=AC\cap BD$.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
* Gốc tọa độ là $O=AC\cap BD$.
* Điểm C thuộc tia Ox, điểm D thuộc tia Oy, điểm S thuộc tia Oz.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình chữ nhật), $SA\perp(ABCD)$
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
* Gốc tọa độ là $A\equiv O(0;0;0)$.
* Các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.</td><td>
</td></tr>
</table>

7. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA\perp(ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho: * Gốc tọa độ là $A\equiv O(0;0;0)$. * Các điểm B, C, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.	
8. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều (hoặc cân tại C). Biết $(SAB)\perp(ABCD)$ và ΔSAB đều (hoặc cân tại S). Gọi H là trung điểm $AB \to CH\perp AB$ và $SH\perp(ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho: * Gốc tọa độ là $H\equiv O(0;0;0)$. * Các điểm B, C, H lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.	

Ví dụ: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết $AB=a, AA'=2a$ và $A'C=3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) theo a.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AC=\sqrt{A'C^2-A'A^2}=\sqrt{(3a)^2-(2a)^2}=a\sqrt{5} \\ BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(a\sqrt{5})^2-a^2}=2a \end{cases}$

Chuẩn hóa $a=1$, ta có $AB=1, BC=AA'=2, AC=\sqrt{5}, A'C=3$.

Chọn hệ trục tọa đô $Oxyz$ như hình vẽ:

$B\equiv O(0;0;0), A(1;0;0), C(0;2;0), A'(1;0;2), B'(0;0;2), C'(0;2;2)$.

M là trung điểm của $A'C'$ nên $M\left(\frac{1}{2};1;2\right)\to\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2};1;2\right)\to$ Phương trình

$AM: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=-4t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

$\overrightarrow{A'C}=(-1;2;-2)\to$ Phương trình $A'C: \begin{cases} x=-t' \\ y=2+2t' \\ z=-2t' \end{cases}, (t'\in\mathbb{R})$.

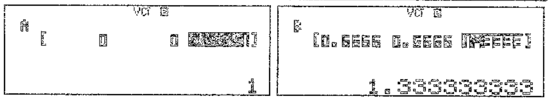
Ta có $I=AM\cap A'C\to I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. Lại có $(ABC)\equiv(Oxy): z=0$

Nhập vào máy VctA $=[0,0,1]$ và VctB $=\left[\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$.

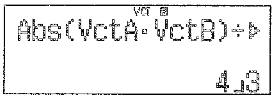
MODE 8 1 1 0 = 0 = 1 = SHIFT 5 1 2 1 2 ÷ 3 = 2 ÷ 3 =
4 ÷ 3 =

STUDY TIPS

Do tất cả các dữ kiện của bài toán đều liên quan đến a, nên ta có thể chuẩn hóa $a=1$ để quá trình nhập vào máy tính dễ dàng hơn.
Nếu đề bài yêu cầu tính độ dài thì ta lấy kết quả thu được nhân với a, nếu yêu cầu tính diện tích thì lấy kết quả nhận được nhân với a^2, nếu yêu cầu tính thể tích thì nhân kết quả với a^3.



Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctA \bullet VctB) \div Abs(VctA)$:



[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)]

Ấn [=] máy hiện kết quả là $\frac{4}{3}$. Suy ra $d(I;(ABC)) = \frac{4}{3}$.

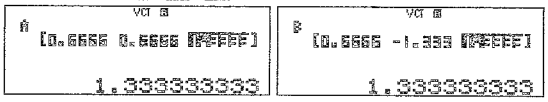
STUDY TIPS
Ngoài ra thể tích tứ diện *IABC* cũng có thể được tính theo công thức:
$V_{IABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right].\overrightarrow{IC}\right|$

Do $A \in Ox, C \in Oy \to BA = 1, BC = 2 \to S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 1$ (đvdt).

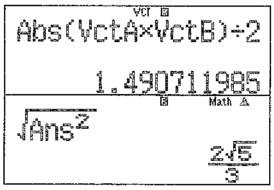
$\longrightarrow V_{IABC} = \frac{1}{3}d(I;(ABC)).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{4}{3}.1 = \frac{4}{9}$.

Ta có $\overrightarrow{BI} = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ và $\overrightarrow{CI} = \left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$. Nhập vào máy $VctA = \left[\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]$ và $VctB = \left[\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right]$.

[MODE] [8] [1] [1] [2] [÷] [3] [=] [2] [÷] [3] [=] [4] [÷] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [2] [÷] [3] [=] [(-)] [4] [÷] [3] [=] [4] [÷] [3] [=]



Ấn [AC], nhập vào màn hình $Abs(VctA \times VctB) \div 2$:



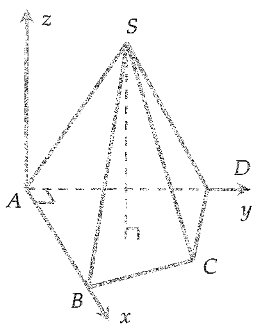
[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [2]

Ấn [=] máy hiện kết quả là 1,490711985. Ấn [MODE] [1] [√] [Ans] [x²] [=], máy hiện kết quả là $\frac{2\sqrt{5}}{3} \to S_{\Delta IBC} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Ta có $V_{IABC} = \frac{1}{3}d(A;(IBC)).S_{\Delta IBC}$

$\to d(A;(IBC)) = \frac{3V_{IABC}}{S_{\Delta IBC}} = \frac{4}{3}:\frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

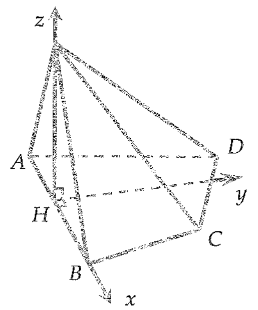
Vậy $V_{IABC} = \frac{4a^3}{9}$ và $d(A;(IBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.



4. Đối với các hình đa diện tạo thêm mô hình tam diện vuông

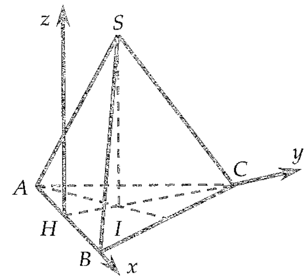
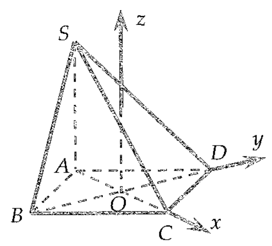
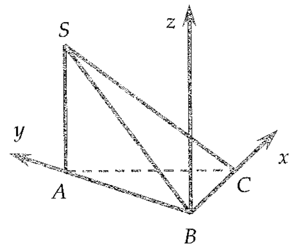
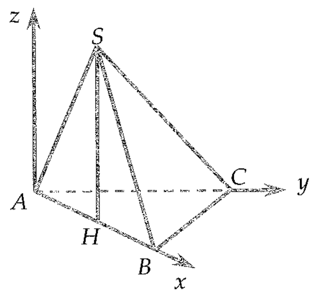
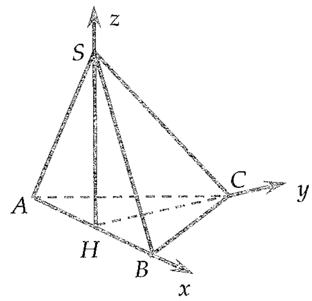
Định hướng chọn hệ trục tọa độ đối với các hình chóp, hình lăng trụ:

Định hướng 1: Vẽ hình theo yêu cầu, giả thiết bài toán. Trong mặt đáy, tìm mối quan hệ vuông góc, khi đó điểm có yếu tố vuông góc ở mặt đáy chính là điểm ta chọn làm gốc tọa độ *O*, đồng thời hai đường thẳng tương ứng vuông góc tại điểm đó được chọn làm hai trục tọa độ *Ox* và *Oy*. Từ *O* dựng tia vuông góc với mặt đáy (thẳng đứng) ta được trục *Oz*.



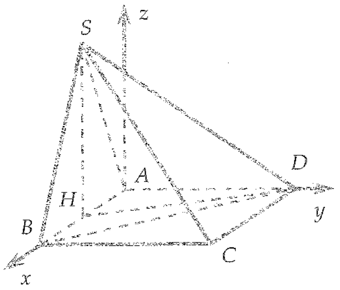
Định hướng 2: Từ chân hình chiếu của đỉnh của hình chóp ta chọn làm gốc tọa độ, đồng thời đường cao này ta chọn làm trục *Oz*. Trong mặt đáy, tại *O* tạo ra hai đường thẳng vuông góc thích hợp, và hai đường này tương ứng chọn làm *Ox* và *Oy*.

Một số hình đa diện tạo thêm mô hình tam diện vuông thường gặp:

Giả thiết và chọn hệ trục $Oxyz$ tương ứng	Hình vẽ
1. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với đáy là ΔABC đều cạnh a, đường cao $SI=h$ với I là tâm của ΔABC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: $H\equiv O(0;0;0), A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$ $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right).$	
2. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA\perp(ABCD)$ và $SA=h$. Gọi $O=AC\cap BD\rightarrow AC\perp BD$ tại O. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $O(0;0;0)$ * $Oz//SA\rightarrow Oz\perp(ABCD)$. * Hai điểm C, D lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy.	
3. Hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và ΔABC vuông tại B. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho: * $B\equiv O(0;0;0)$ và $Bz//SA\rightarrow Bz\perp(ABC)$. * Hai điểm C, A lần lượt nằm trên các tia Bx và By.	
4. Hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều (hoặc cân tại S), $(SAB)\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi H là trung điểm $AB\rightarrow SH\perp(ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: * $A\equiv O(0;0;0)$ và $Az//SH$. * Các điểm B, C lần lượt nằm trên hai tia Ax và Ay.	
5. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao h, mặt bên (SAB) là tam giác đều (hoặc cân tại S), $(SAB)\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại cân tại C, $CA=CB=a$ Gọi H là trung điểm $AB\rightarrow SH\perp(ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: $H\equiv O(0;0;0), A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),$ $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;h).$	

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính thể tích khối chóp $ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Lời giải



Chuẩn hóa $a=1$ thì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1 và $SD=\frac{3}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB thì $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $HD=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+AD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\to SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=1.$

$\to S_{ABCD}=1$ (đvdt) $\to V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}$ (đvtt).

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Trong đó $A\equiv O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Có $\overrightarrow{SC}=\left(\frac{1}{2};1;-1\right)$, $\overrightarrow{BD}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)\to d(SC,BD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$.

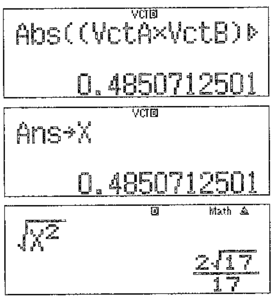
Đưa máy về phương thức VECTOR: MODE 8. Nhập vào máy các vector: $\text{VctA}=\left[\frac{1}{2},1,-1\right]$, $\text{VctB}=[-1,1,0]$ và $\text{VctC}=[0,1,0]$.

MODE 8 1 1 1 ÷ 2 = 1 = (–) 1 = SHIFT 5 1 2 1 (–) 1 = 1 = 0 = SHIFT 5 1 3 1 0 = 1 = 0 =

Ấn AC về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình

$$\text{Abs}\left(\left(\text{VctA}\times\text{VctB}\right)\bullet\text{VctC}\right)\div\text{Abs}\left(\text{VctA}\times\text{VctB}\right)$$

SHIFT hyp (SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4) SHIFT 5 7 SHIFT 5 5) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4)



Ấn = máy hiện kết quả bằng 0,4850712501 gán vào X: Ans SHIFT RCL)

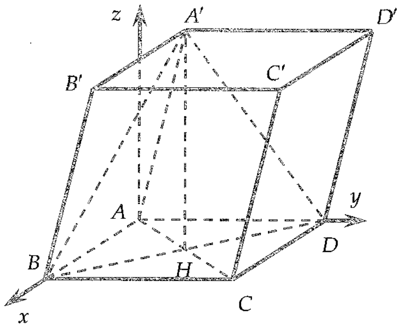
Về phương thức COMP: MODE 1. Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$: √ ALPHA) x²

Ấn = máy hiện kết quả là $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{3}$ và $d(SC,BD)=\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a, AD=2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H trùng với giao điểm của AC và BD, $A'H=3a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

Lời giải



Chuẩn hóa $a=1$ thì $AB=1, AD=2$ và $A'H=3$.

Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$V = A'H.S_{ABCD} = A'H.AB.AD = 3.1.2 = 6$ (đvtt).

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5} \to HA = HC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó:

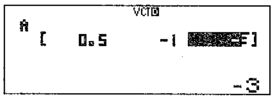
$A \equiv O(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0), A'\left(\dfrac{1}{2};1;3\right)$.

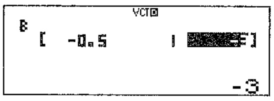
Từ $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} \to B'\left(\dfrac{3}{2};1;3\right)$.

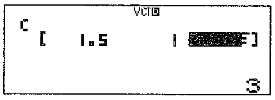
Ta có $\overrightarrow{A'B} = \left(\dfrac{1}{2};-1;-3\right)$ và $\overrightarrow{A'D} = \left(-\dfrac{1}{2};1;-3\right)$.

Đưa máy về phương thức VECTOR: [MODE] [8]. Nhập vào máy các vector: $\text{VctA} = \left[\dfrac{1}{2},-1,-3\right]$, $\text{VctB} = \left[-\dfrac{1}{2},1,-3\right]$.

[MODE] [8] [1] [1] [1] [÷] [2] [=] [(−)] [1] [=] [(−)] [3] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [(−)] [1] [÷] [2] [=] [1] [=] [(−)] [3] [=]

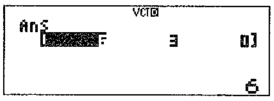






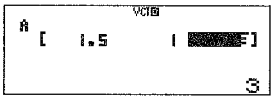
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình $\text{VctA} \times \text{VctB}$:

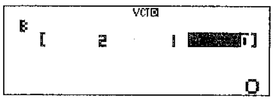
[SHIFT] [5] [3] [×] [SHIFT] [5] [4]



Ấn [=] máy hiện kết quả là $[6;3;0] \to \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}\right] = (6;3;0) \to$ Mặt phẳng $(A'BD)$ có VTPT là $\vec{n} = (2;1;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(A'BD)$ là: $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$.



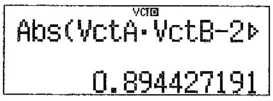


Nhập lại vào máy tính các vector: $\text{VctA} = \left[\dfrac{3}{2},1,3\right]$ và $\text{VctB} = [2;1;0]$.

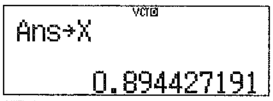
Ấn [AC] về màn hình tính toán. Nhập vào màn hình

$$\text{Abs}(\text{VctA} \bullet \text{VctB} - 2) \div \text{Abs}(\text{VctB})$$

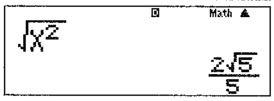
[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [−] [2] [)] [÷] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)]



Ấn [=] máy hiện kết quả là 0,894427191 gán vào X: [Ans] [SHIFT] [RCL] [)]



Về phương thức COMP: [MODE] [1]. Nhập vào màn hình $\sqrt{X^2}$: [√■] [ALPHA] [)] [x²]



Ấn [=] máy hiện kết quả là $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $V = 6a^3$ (đvtt) và $d\left(B',(A'BD)\right) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

PHỤ LỤC 3. TUYỂN TẬP CÔNG THỨC GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM TOÁN

VẤN ĐỀ 1: CÁC CÔNG THỨC THỂ TÍCH TỨ DIỆN KHÓ

1. Tứ diện $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$ và $\widehat{ASB}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{CSA}=\varphi$:

$$V_{S.ABC}=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$$

2. Tứ diện $ABCD$ có $AB=a, CD=b, d(AB,CD)=d$ và $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\alpha$ thì

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}abd\sin\alpha.$$

3. Tứ diện $S.ABC$ có $S_{\Delta SAB}=S_1, S_{\Delta SAC}=S_2, SA=a$ và $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\alpha$ thì

$$V_{SABC}=\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$$ (Công thức thể tích góc nhị diện)

4. Tứ diện $S.ABC$ có $SA=a, SB=b, SC=c$ và $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\alpha$, $\widehat{ASB}=\beta$, $\widehat{ASC}=\varphi$ thì

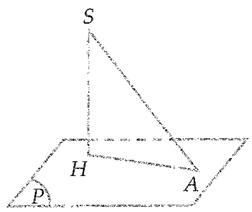
$$V_{S.ABC}=\frac{abc}{6}\sin\alpha.\sin\beta.\sin\varphi.$$

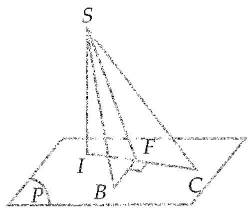
5. Thể tích tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a là $V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

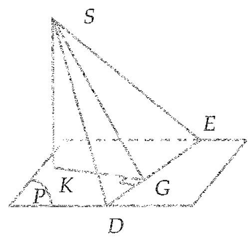
6. Tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, BC=AD=b, AC=BD=c$ thì

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$$ (Thể tích tứ diện gần đều).

VẤN ĐỀ 2: GÓC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

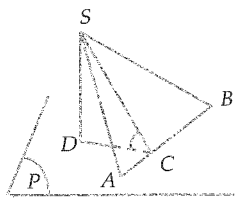


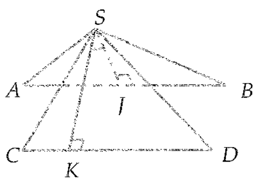


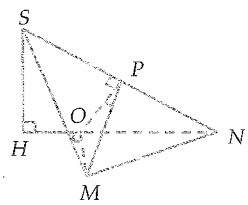


1. Góc loại 1: $\left(\widehat{SA,(P)}\right)=\widehat{SAH}$ (Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy)
2. Góc loại 2: $\left(\widehat{SB,(SIC)}\right)=\widehat{BSF}$ (Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đứng chứa đường cao SI)
3. Góc loại 3: $\left(\widehat{SK,(SDE)}\right)=\widehat{KSG}$ (Góc giữa đường cao SK và mặt bên (SDE))

VẤN ĐỀ 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



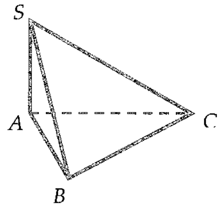


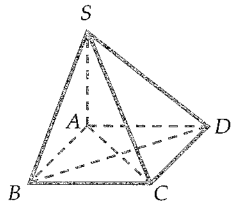


1. Góc loại 1: $\left(\widehat{(SAB),(P)}\right)=\widehat{SCD}$ (Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy)
2. Góc loại 2: $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\widehat{KSJ}$ (Góc giữa hai mặt bên có hai cạnh song song AB và CD)
3. Góc loại 3: $\left(\widehat{(SMN),(SHN)}\right)=\widehat{OPM}$ (Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đứng chứa đường cao SH)

VẤN ĐỀ 4: CÁC VẤN ĐỀ VỀ MẶT CẦU

Mặt cầu loại 1: Các đỉnh *A, B, D* cùng nhìn *SC* dưới một góc vuông thì bán kính mặt cầu $R=\frac{SC}{2}$





Ví dụ 1: Cho hình chóp *S.ABC* có ΔABC vuông tại *B*, $SA\perp(ABC)$ và $SC=2a$. Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$ B. $\frac{1}{3}\pi a^3$ C. $\frac{8}{3}\pi a_3$ D. $\frac{32}{3}\pi a^3$

Lời giải

Ta có $BC\perp AB, BC\perp SA\to BC\perp(SAB)\to BC\perp SB\to\widehat{SBC}=90^\circ=\widehat{SAC}$. Suy ra các đỉnh *A, B* cùng nhìn cạnh *SC* dưới một góc vuông.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=\frac{SC}{2}=a\to$ Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi a^3$ (đvtt).

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$ và $SC=2a$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*

A. $\frac{\pi a^3}{3}$ B. $\frac{4\pi a^3}{3}$ C. $\frac{5\pi a^3}{3}$ D. $\frac{8\pi a^3}{3}$

Lời giải

Ta có $BC\perp AB, BC\perp SA\to BC\perp(SAB)\to BC\perp SB\to\widehat{SBC}=90^\circ$.

Lại có $CD\perp AD, CD\perp SA\to CD\perp(SAD)\to CD\perp SD\to\widehat{SDC}=90^\circ$.

Như vậy $\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=\widehat{SAC}=90^\circ$. Các đỉnh *A, B, D* cùng nhìn cạnh *SC* dưới một góc vuông.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=\frac{SC}{2}=a\to V=\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Đáp án B.

Mặt cầu loại 2: Nếu *SA* vuông góc với đáy thì: $R^2=R_D^2+\frac{SA^2}{4}$. Các vấn đề cần chú ý về R_D (bán kính đường tròn ngoại tiếp mặt đáy):

1. Nếu đáy là tam giác vuông thì $R_D=\frac{1}{2}$ cạnh huyền và nếu đáy là tam giác đều thì $R_D=\frac{a\sqrt{3}}{3}$
2. Nếu đáy là hình vuông thì $R_D=\frac{a\sqrt{2}}{2}$
3. Nếu đáy là hình chữ nhật thì $R_D=\frac{1}{2}$ đường chéo
4. Nếu đáy là tam giác cân có góc 120^0 cạnh bên bằng a thì cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ còn $R_D=a$
5. Nếu đáy là tam giác thường thì áp dụng công thức Herong: $R_D=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=2a$ và $ABCD$ là hình chữ nhật với đường chéo có độ dài bằng $a\sqrt{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Lời giải

Ta có $R_D=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ được tính theo công thức:

$$R=\sqrt{R_D^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{(2a)^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}+a^2}=\frac{3a}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$ và ΔABC đều cạnh bằng a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Ta có $R_D=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ được tính theo công thức:

$$R=\sqrt{R_D^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{(2a)^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+a^2}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$ và ΔABC vuông tại A, $BC=2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Ta có $R_D=\frac{BC}{2}=\frac{2a}{2}=a$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ được tính theo công thức:

$$R=\sqrt{R_D^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{a^2+\frac{(2a)^2}{4}}=a\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SA=2a$ à ΔABC cân tại A, $AB=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Theo định lý hàm số cosin ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos BAC}=\sqrt{a^2+a^2-2a.a.\cos 120°}=a\sqrt{3}$.

Từ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{AB.AC.BC}{4R_D}\Leftrightarrow R_D=\frac{BC}{2\sin BAC}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sin 120°}=a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ được tính theo công thức:

$$R=\sqrt{R_D^2+\frac{SA^2}{4}}=\sqrt{a^2+\frac{(2a)^2}{4}}=a\sqrt{2}.$$

Mặt cầu loại 3: Nếu $O.ABC$ là tam diện vuông tại O thì $R^2=\frac{1}{4}\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)$

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=a, SB=2a$ và $SC=3a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp được tính theo công thức:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+SB^2+SC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Mặt cầu loại 4: Nếu chóp có các cạnh bên bằng nhau (hình chóp đều) thì $R=\frac{SA^2}{2SO}$. Trong đó O là tâm của đáy và:

1. Nếu đáy là tam giác đều thì O là trong tâm, trực tâm.
2. Nếu đáy là tam giác vuông thì O là trung điểm cạnh huyền.
3. Nếu đáy là hình vuông, hình O là giao điểm hai đường chéo và là trung điểm mỗi đường.

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $AB=a, SA=2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $SG\perp(ABC)$ và $GA=\frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{AB\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ được tính theo công thức:

$$R=\frac{SA^2}{2SG}=\frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2-GA^2}}=\frac{(2a)^2}{2\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{2a\sqrt{33}}{11}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$ và $SA=2a$. Tính bán kính mặt cầuoa nại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD\rightarrow SO\perp(ABCD)$ và $OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}.AB\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ được tính theo công thức:

$$R=\frac{SA^2}{2SO}=\frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2-OA^2}}=\frac{(2a)^2}{2\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{2a\sqrt{14}}{7}.$$

Mặt cầu loại 5: Nếu hai mặt vuông góc với nhau (mặt bên vuông góc với mặt đáy) thì $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{AB^2}{4}$ trong đó AB là giao tuyến.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết ΔSAB đều và ầm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Lời giải

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB là $R_1=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là $R_2=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Giao tuyến của (SAB) và $(ABCD)$ là $AB=a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ được tính theo công thức:

$$R=\sqrt{R_1^2+R_2^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $(SAB)\perp(ABC)$, ΔSAB cân tại S và $SA=2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp AB \to SH \perp (ABCD)$.

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Từ $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{SA.SB.AB}{4R_1}$

$\to R_1 = \frac{SA.SB}{2SH} = \frac{2a.2a}{2.\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{15}}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R_2 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Giao tuyến của (SAB) và (ABC) là $AB = a$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ được tính theo công thức:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{4a}{\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{115}}{10}.$$

Mặt cầu loại 6: Chóp $S.ABC$ tổng quát có chiều cao SH và tâm đáy là O thì ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$ để tìm x. Với x tìm được ta có $R^2 = x^2 + R_D^2$

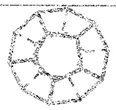
Mặt cầu loại 7: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$

Một số vấn đề khác của mặt cầu:

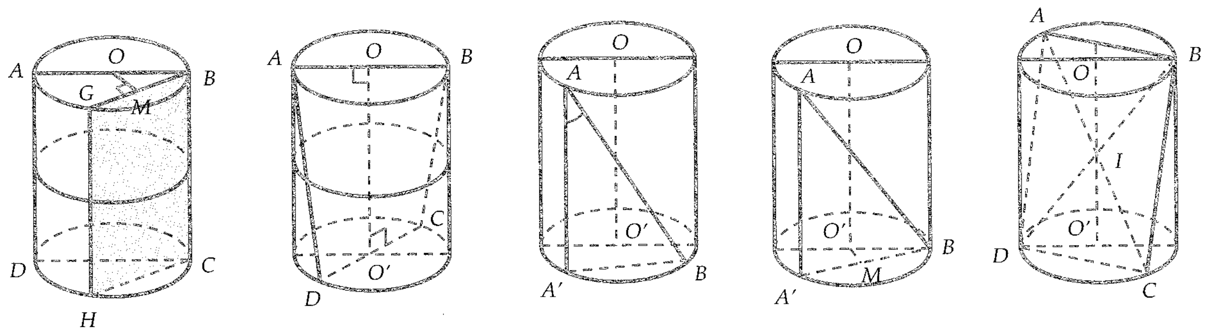
1. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều: $R = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều: $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện gần đều: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

VẤN ĐỀ 5: NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ VỀ ĐA DIỆN ĐỀU

Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại	MPĐX
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
8 mặt đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
12 mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
20 mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

VẤN ĐỀ 6: CÁC VẤN ĐỀ VỀ MẶT TRỤ, HÌNH NÓN VÀ KHỐI TRỤ



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4 Hình 5

1. Hình 1:

* Thiết diện vuông góc trục là một đường tròn bán kính R

* Thiết diện chứa trục là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$

* Thiết diện song song với trục và không chứa trục là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO',\left(BGHC\right)\right) = OM$

2. Hình 2:

* Nếu AB, CD là hai đường kính bất kì trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(AB,CD\right)$.

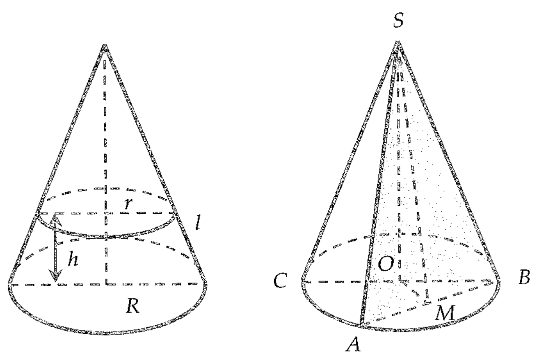
* Đặc biệt nếu AB và CD vuông góc với nhau thì: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'$

3. Hình 3: $(\widehat{AB,OO'}) = \widehat{A'AB}$

4. Hình 4: $d\left(AB,OO'\right) = O'M$

5. Hình 5: Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là: Đường chéo hình vuông bằng $\sqrt{4R^2 + h^2}$

VẤN ĐỀ 7: CÁC VẤN ĐỀ VỀ HÌNH NÓN, KHỐI NÓN VÀ NÓN CỤT



Hình 1 Hình 2

1. Hình 1:

* Các công thức nón cụt: $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right), S_{xq} = \pi l\left(R + r\right), S_{tp} = \pi\left(R^2 + r^2 + l\left(R + r\right)\right)$

* Thiết diện vuông góc trục cách đỉnh một khoảng x cắt hình nón theo một đường tròn có bán kính là r.

* Nếu h là chiều cao của hình nón ban đầu thì ta có tỉ số: $\frac{r}{R}=\frac{x}{h}$

* Thiết diện chứa trục là một tam giác cân

* Nếu tam giác đó vuông cân thì $h=R$. Nếu tam giác đó là tam giác đều thì $h=R\sqrt{3}$

2. Hình 2:

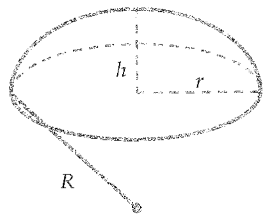
+ Thiết diện đi qua đỉnh mà không chứa trục cắt hình nón theo một tam giác cân SAB:

+ $\left(\widehat{SO,(SAB)}\right)=\widehat{OSM}$, $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=\widehat{SMO}$

+ Nếu M là trung điểm của AB thì $AB\perp(SMO)$

VẤN ĐỀ 8: CÁC VẬT THỂ TRÒN XOAY TRONG KHÔNG GIAN

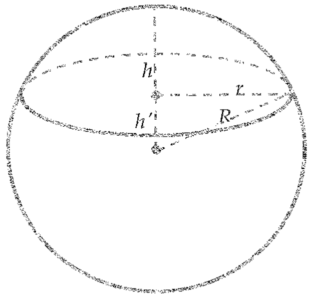
Các công thức chỏm cầu: $S_{xq}=2\pi Rh=\pi\left(r^2+h^2\right)$ và $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right)$.



Ví dụ: Một khối cầu bằng thủy tinh có bán kính bằng 4 dm. Người ta muốn cắt bỏ một chỏm cầu có diện tích mặt cắt là $15\pi\left(dm^2\right)$ để lấy phần còn lại làm bể nuôi cá. Hỏi thể tích tối đa mà bể cá này có thể chứa là bao nhiêu?

A. $\frac{175\pi}{4}\left(dm^3\right)$ B. $\frac{175\pi}{3}\left(dm^3\right)$ C. $\frac{125\pi}{4}\left(dm^3\right)$ D. $\frac{125\pi}{3}\left(dm^3\right)$

Lời giải



Gọi V, V_C và C_{Ch} lần lượt là thể tích tối đa của bể nsuôi cá có thể chứa, thể tích khối cầu bằng thủy tinh và thể tích khối chỏm cầu bị cắt bỏ.

Khi đó $V=V_C-V_{Ch}=\frac{4}{3}\pi R^3-\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$.

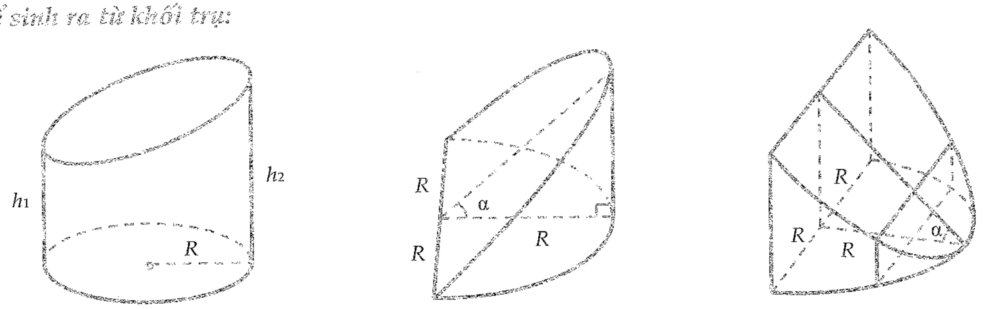
Ta có $\begin{cases}R=4\,dm\\ S=\pi r^2=15\pi\left(dm^2\right)\rightarrow r^2=15\end{cases}$

$\longrightarrow h'=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{4^2-15}=1\rightarrow h=R-h'=4-1=3(dm)$.

Vậy thể tích nước tối đa mà bể cá này có thể chứa là: $V=\frac{4}{3}\pi.4^3-\pi.3^2.\left(4-\frac{3}{3}\right)=\frac{175\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

Đáp án B.

Các vật thể sinh ra từ khối trụ:

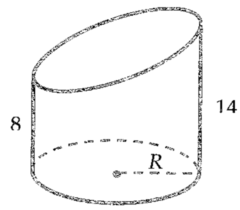


1. Khối trụ cụt: $S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$ và $V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right)$.

2. Hình nêm loại 1: $V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha$

3. Hình nêm loại 2: $V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha$

Ví dụ 1: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng được khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (hình vẽ). Tính thể tích của (H)



A. $V_{(H)} = 192\pi$ B. $V_{(H)} = 275\pi$

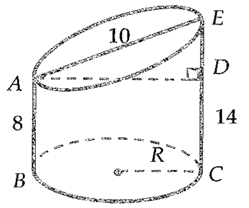
C. $V_{(H)} = 704\pi$ D. $V_{(H)} = 176\pi$

Lời giải

Ta có các kích thước: $AB = CD = 8,\ CE = 14,\ AE = 10 \to DE = CE - CD = 14 - 8 = 6$

$\longrightarrow AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \to R = \dfrac{AD}{2} = 4$.

Vậy thể tích của (H) là $V_{(H)} = \pi R^2\left(\dfrac{AB + CE}{2}\right) = \pi.4^2.\left(\dfrac{8 + 14}{2}\right) = 176\pi$ (đvtt).



Đáp án D.

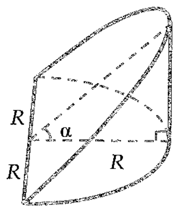
Ví dụ 2: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc bằng $45°$ để lấy một hình nêm (hình vẽ). Thể tích V của hình nêm bằng:

A. $V = 2250\left(\text{cm}^3\right)$ B. $V = \dfrac{225\pi}{4}\left(\text{cm}^3\right)$ C. $V = 1250\left(\text{cm}^3\right)$ D. $V = 1350\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

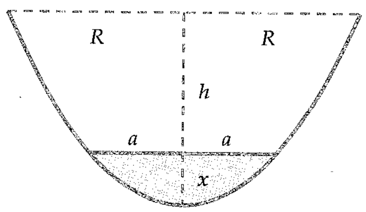
Hình nêm có các kích thước là $\begin{cases} R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{30}{2} = 15(\text{cm}) \\ \alpha = 45° \end{cases}$.

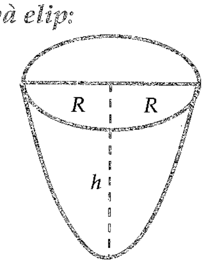
Thể tích hình nêm là $V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha = \dfrac{2}{3}.15^3.\tan 45° = 2250\left(\text{cm}^3\right)$.

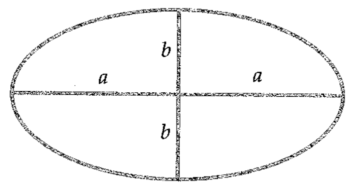


Đáp án A.

Các công thức liên quan đến parabol bậc 2 và elip:

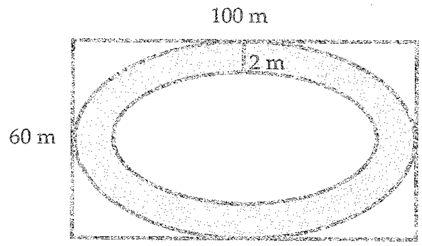






$$S_{parabol} = \frac{4}{3}Rh;\ \frac{S'}{S} = \left(\sqrt{\frac{x}{h}}\right)^3 = \left(\frac{a}{R}\right)^3;\ V_{parabol} = \frac{1}{2}\pi R^2 h;\ S_{elip} = \pi ab$$

Ví dụ: Một sân chơi trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và chiều rộng bằng 60 m. Người ta dự định làm một con đường nằm trong sân như hình vẽ. Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip. Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh của hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m. Kinh phí mỗi m^2 làm đường là 600.000 đồng. Số tiền làm con đường đó là:



A. 294.053.000 đồng B. 294.050.000 đồng
C. 293.804.000 đồng D. 283.604.000 đồng

Lời giải

Elip của đường viền ngoài có $a_1 = 50(\mathrm{m}), b_1 = 30(\mathrm{m}) \to S_1 = \pi a_1 b_1 = \pi.50.30 = 1500\pi(\mathrm{m}^2)$.

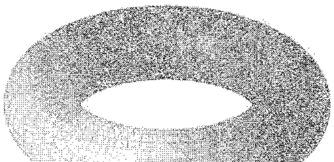
Elip của đường viền trong có có $a_2 = 48(\mathrm{m}), b_2 = 28(\mathrm{m}) \to S_2 = \pi a_2 b_2 = \pi.48.28 = 1344\pi(\mathrm{m}^2)$.

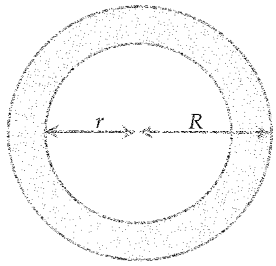
Diện tích của mặt đường cần làm là $S = S_1 - S_2 = 156\pi(\mathrm{m}^2)$.

Số tiền làm con đường này là: $T = 156\pi.600000 = 294053072,4 \approx 294053000$ (đồng).

Đáp án A.

Thể tích cái phao: $V = \frac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$





VẤN ĐỀ 9: CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN CỦA OXYZ

Xác định điểm thông qua hệ thức vector:

* Lý thuyết cơ bản: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ thì $\begin{cases} 2(x_A - x_M) - 3(x_B - x_M) = 0 \\ 2(y_A - y_M) - 3(y_B - y_M) = 0 \\ 2(z_A - z_M) - 3(z_B - z_M) = 0 \end{cases}$

* Tuy nhiên để tìm tọa độ M đơn giản hơn, ta bấm máy: $\frac{2A - 3B}{2 - 3}$ và bấm CALC và nhập lần lượt x_A, x_B ta được x_M. Tương tự như vậy nếu nhập y_A, y_B ta được y_M và nhập z_A, z_B ta được z_M

Xác định tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác:

1. Tọa độ trực tâm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0; \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$

2. Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Chân đường phân giác trong D của góc A: $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

3. Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Chân đường phân giác ngoài E: $b\overrightarrow{ED} - c\overrightarrow{EC} = 0$

4. Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Tâm nội tiếp: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$

Các ứng dụng của tích có hướng:

1. Ba vector đồng phẳng: $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$ (Nếu $\neq 0$ là không đồng phẳng)

2. Bốn điểm đồng phẳng: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$ (Nếu $\neq 0$ là không đồng phẳng)

3. Thể tích: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$, diện tích tam giác: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

4. Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

<u>Chú ý:</u> Nếu một hình hộp chữ nhật biết diện tích ba mặt thì thể tích của nó: $V=\sqrt{S_1S_2S_3}$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng: $d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$ với $A\in d_1, B\in d_2$.

+ Khoảng cách từ 1 điểm tới đường thẳng: $d(A;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}(M\in d)$

Mối quan hệ song song và vuông góc:

1. Mối quan hệ song song: $P//P'\Rightarrow \vec{n}=\vec{n'}, d//d'\Rightarrow \vec{u}=\vec{u'}, P//d\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$

2. Mối quan hệ vuông góc: $P\perp P'\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n'}, d\perp d'\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{u'}, P\perp d\Rightarrow \vec{n}=\vec{u}$

Nếu $d\subset P\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{u}$, $A,B\subset P\Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

3. Mối quan hệ vuông góc của 2 cặp vector: $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow \vec{a}=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$

Tương giao mặt phẳng và mặt cầu:

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu $(S):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

1. Trường hợp 1: (P) không cắt (S) nếu $d(I;(P))>R$.

2. Trường hợp 2: (P) tiếp xúc với (S) nếu $d(I;(P))=R$ và khi đó tiếp điểm sẽ là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mặt phẳng (P)

3. Trường hợp 3: (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn giao tuyến khi $d(I;(P))<R$. Khi đó tâm đường tròn sẽ là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mặt phẳng (P) đồng thời bán kính r của đường tròn thỏa mãn hệ thức: $R^2=r^2+\left[d(I;(P))\right]^2$

Tương giao đường thẳng và mặt cầu:

1. Đường thẳng d cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi $d(I;(d))<R$

2. Chú ý 1: Hệ thức liên hệ $R^2=\frac{1}{4}AB^2+\left[d(I;(d))\right]^2$

3. Chú ý 2: Nếu ΔABI vuông cân thì $R=\sqrt{2}d(I;(d))$

4. Chú ý 3: Nếu ΔABI đều thì $R=\frac{2}{\sqrt{3}}d(I;(d))$

Cách xác định hình chiếu vuông góc của A trên (P):

* **Bước 1:** Xác định giá trị $t=-\frac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}$

* **Bước 2:** Tọa độ hình chiếu H là: $H(at+x_A;bt+y_A;ct+z_A)$

Các dạng toán về phương trình mặt chắn:

Giả sử mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục tọa độ tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Khi đó:

1. Nếu M là trọng tâm tam giác ABC thì: $a=3x_M, b=3y_M, c=3z_M$

2. Nếu M là trực tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{n_P}$

3. Nếu $V_{O.ABC}$ min thì M là trọng tâm của tam giác ABC

4. Nếu $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ min thì M là trực tâm của tam giác ABC

5. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$. Bán kính: $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Chú ý về tam diện vuông: Tổng bình phương diện tích các mặt bên bằng bình phương diện tích mặt còn lại: $S_{OAB}^2+S_{OBC}^2+S_{OCA}^2=S_{ABC}^2$

VẤN ĐỀ 10: CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG OXYZ

1. Viết (P) chứa d sao cho $(\widehat{d',(P)})$ lớn nhất: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d},\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$

2. Viết d nằm trong (P) sao cho $(\widehat{d,d'})$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$

3. Viết (P) chứa d sao cho $(\widehat{(P),(Q)})$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d},\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_Q}\right]\right]$

4. Viết d nằm trong (P) và qua A sao cho $d(M,d)$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AM}\right]\right]$

5. Viết (P) chứa d sao cho $d(M,(P))$ lớn nhất: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d},\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]\right]$ với A bất kỳ trên d

6. Viết d nằm trong (P) và qua A sao cho $d(M,d)$ lớn nhất: $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AM}\right]$

VẤN ĐỀ 11: CÁC DẠNG TOÁN SỐ PHỨC HAY VÀ KHÓ

1. Nếu quỹ tích của $M(z)$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R đồng thời module của số phức cần tìm max-min là JM thì: $\begin{cases}\max=IJ+R\\ \min=|IJ-R|\end{cases}$

2. Nếu $|z-c|=|z+c|=2a$ thì quỹ tích của $M(z)$ là elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ trong đó $b^2=a^2-c^2$

3. Nếu $|z|=k$ thì $\begin{cases}|f(z)|^2=f(z)f(\bar{z})\\ |z-a|^2=a^2+k^2-2ax\\ |z+a|^2=a^2+k^2+2ax\end{cases}$

4. z là một số thực nếu $z=\bar{z}$ và z là một số thuần ảo nếu $z=-\bar{z}$

5. Nếu $az^2+bz+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có hai nghiệm phức thực sự $z_1;z_2$ thì đây là hai số phức liên hợp của nhau, đồng thời $|z_1|^2=|z_2|^2=z_1z_2=\frac{c}{a}$

6. $(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i, \left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$

7. Một số tổng đặc biệt: $1+i+i^2+...+i^n=\frac{i^{n+1}-1}{i-1}$ và $1+2i+3i^2+...+(n+1)i^n=\frac{ni^{n+1}-(n+1)i^n+1}{(i-1)^2}$

8. Một số đẳng thức đặc biệt: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ và $z\bar{z'}+\bar{z}z'=2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$

9. Nếu $\frac{z}{z'}$ là số thuần ảo thì $\Delta OMM'$ là tam giác vuông tại O

VẤN ĐỀ 12: MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TÍCH PHÂN

1. $\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C$

Phân tích: Tồn tại hai số α,β thỏa mãn $1=\alpha.(ax+b)+\beta.(cx+d) \Leftrightarrow (a.\alpha+c.\beta)x+(b.\alpha+d.\beta)=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.\alpha+c.\beta=0 \\ b.\alpha+d.\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab.\alpha+bc.\beta=0 \\ ab.\alpha+ad.\beta=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)\beta=a \\ \alpha=-\frac{c}{a}.\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\frac{a}{ad-bc} \\ \alpha=-\frac{c}{ad-bc} \end{cases}$$

Khi đó $\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx = \int \frac{-\frac{c}{ad-bc}(ax+b)+\frac{a}{ad-bc}(cx+d)}{(ax+b)(cx+d)}dx = \frac{a}{ad-bc}\int\frac{dx}{ax+b} - \frac{c}{ad-bc}\int\frac{dx}{cx+d}$

$$= \frac{a}{ad-bc}\int\frac{d(ax+b)}{a(ax+b)} - \frac{c}{ad-bc}\int\frac{d(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\left(\ln|ax+b|-\ln|cx+d|\right)+C = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|+C.$$

2. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{|a|}\arctan\frac{x}{|a|}+C$ hoặc $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = -\frac{1}{|a|}\text{arccot}\frac{x}{|a|}+C$

Phân tích:

* Đặt $x=|a|.\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $dx = d(|a|.\tan t) = \frac{|a|}{\cos^2 t}dt$

$$\longrightarrow \int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \int\frac{1}{a^2(\tan^2 t+1)}\frac{|a|}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{|a|}\int\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 t}.\cos^2 t}dt = \frac{1}{|a|}\int dt = \frac{1}{|a|}t+C = \frac{1}{|a|}\arctan\frac{x}{|a|}+C.$$

* Đặt $x=|a|.\cot t$ với $t\in(0;\pi)$. Ta có $dx = d(|a|\cot t) = -\frac{|a|}{\sin^2 t}dt$.

$$\longrightarrow \int\frac{1}{x^2+a^2}dx = -\int\frac{1}{a^2(\cot^2 t+1)}\frac{|a|}{\sin^2 t}dt = -\frac{1}{|a|}\int\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t}.\sin^2 t}dt = -\frac{1}{|a|}\int dt = -\frac{1}{|a|}t+C = -\frac{1}{|a|}\text{arccot}\frac{x}{|a|}+C.$$

3. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{|a|}+C$ hoặc $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\arccos\frac{x}{|a|}+C$

Phân tích:

* Đặt $x=|a|.\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $dx = d(|a|.\sin t) = |a|.\cos t dt$

$$\longrightarrow \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\frac{|a|\cos t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt = \int\frac{|a|\cos t}{|a|\sqrt{\cos^2 t}}dt = \int dt = t+C = \arcsin\frac{x}{|a|}+C.$$

* Đặt $x=|a|\cos t$ với $t\in[0;\pi]$. Ta có $dx = d(|a|\cos t) = -|a|\sin t dt$

$$\longrightarrow \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int\frac{|a|\sin t}{\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}}dt = -\int\frac{|a|\sin t}{|a|\sqrt{\sin^2 t}}dt = -\int dt = -t+C = -\arccos\frac{x}{|a|}+C.$$

4. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$ và $\int\frac{u'}{u}dx = \ln|u|+C$

Phân tích:

* $\int \frac{u'}{u}\mathrm{d}x = \int \frac{u'}{u}\frac{\mathrm{d}u}{u'} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$.

* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}+x}$

$\longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$.

* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\sqrt{x^2-a^2}.\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$

$\longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$.

5. $\int xe^x\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$ và $\int \ln x\mathrm{d}x = (x-1)\ln x + C$

Phân tích:

* Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow \int xe^x\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$.

* Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases} \rightarrow \int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$.

6. Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Phân tích:

Ta có $I = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

* Đặt $x = -t \rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \rightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t$. Nếu $f(x)$ là ***hàm số lẻ*** thì $f(-t) = -f(t)$

$\longrightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

* Đặt $x = -t \rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \rightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t$. Nếu $f(x)$ là ***hàm số chẵn*** thì $f(-t) = f(t)$

$\longrightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

7. Dạng toán tìm hằng số C: $F(b) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + F(a)$

Phân tích: $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a) \rightarrow F(b) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + F(a)$.

8. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{p+q}\int_a^b\left(pf(x)+qf(a+b-x)\right)dx$

Phân tích: Đặt $t=a+b-x\rightarrow dt=-dx$.

* $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

* $\frac{1}{p+q}\int_a^b\left(pf(x)+qf(a+b-x)\right)dx=\frac{p}{p+q}\int_a^b f(x)dx+\frac{q}{p+q}\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{p}{p+q}\int_a^b f(x)dx+\frac{q}{p+q}\int_a^b f(x)dx$

$\longrightarrow\frac{1}{p+q}\int_a^b\left(pf(x)+qf(a+b-x)\right)dx=\frac{p+q}{p+q}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

9. Nếu tích phân phân thức có bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu phải chia đa thức.

Ví dụ: $I=\int\frac{2x^3-10x^2+16x-1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(2x+\frac{4x-1}{(x-2)(x-3)}\right)dx$.

10. Cách tách phân thức loại 1: $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

Ví dụ: $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Sử dụng kỹ thuật đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình sau $\begin{cases}A+B+C=1\\5A+4B+3C=0\\6A+3B+2C=1\end{cases}$

Trên máy tính cầm tay, sử dụng phương thức EQN: MODE 5 để giải hệ phương trình này. Ấn MODE 5 2 và nhập các hệ số của hệ phương trình. Ta tìm được nghiệm $A=1,B=-5,C=5$.

Vậy $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}$.

11. Cách tách phân thức loại 2: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-1)^2}$

Ví dụ: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)(x-2)+B(x-1)^2+C(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}$

$=\frac{A(x^2-3x+2)+B(x^2-2x+1)+C(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{(A+B)x^2-(3A+2B-C)x+2A+B-2C}{(x-1)^2(x-2)}$

Sử dụng kỹ thuật đồng nhất hệ số, ta có hệ phương trình sau $\begin{cases}A+B=1\\3A+2B-C=0\\2A+B-2C=1\end{cases}$

Trên máy tính cầm tay, sử dụng phương thức EQN: MODE 5 để giải hệ phương trình này. Ấn MODE 5 2 và nhập các hệ số của hệ phương trình. Ta tìm được nghiệm $A=-4,B=5,C=-2$.

Vậy $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{-4}{x-1}+\frac{5}{x-2}-\frac{2}{(x-1)^2}$.

12. $v=\int a(t)\mathrm{d}t$: Vận tốc là nguyên hàm của gia tốc theo thời gian

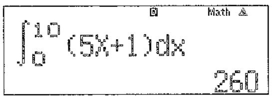
13. $s=\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$: Quãng đường là tích phân của vận tốc giữa hai thời điểm $t=a$ và $t=b$

Ví dụ 1: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t)=5t+1$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị mét. Quãng đường vật đó đi được trong 10 giây đầu tiên là:

A. 15 mét B. 620 mét C. 51 mét D. 260 mét

Lời giải

Quãng đường vật đó đi được trong 10 giây đầu tiên là $s=\int\limits_0^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{10}(5t+1)\mathrm{d}t=260$ (mét).



Đáp án D.

Ví dụ 2: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}\left(m/s^2\right)$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30 $\left(m/s\right)$. Tính quãng đường vặt đó di chuyển sau 2 giây.

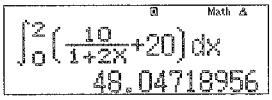
A. 46 mét B. 48 mét C. 47 mét D. 49 mét

Lời giải

Vận tốc của vật là $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=-20\int\frac{1}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t=\frac{10}{1+2t}+C$. Do $v(0)=30\rightarrow\frac{10}{1+2.0}+C=30\Leftrightarrow C=20$.

$\longrightarrow v(t)=\frac{10}{1+2t}+20\left(m/s\right)$.

Quãng đường của vật di chuyển được sau 2 giây là: $s=\int\limits_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^2\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)\mathrm{d}t\approx 48$ (mét).



Đáp án B.

14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x), x=a$ và $x=b$: $S=\int\limits_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

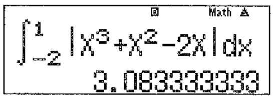
Ví dụ: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là

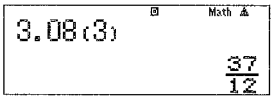
A. $S=\frac{37}{12}$ B. $S=\frac{9}{4}$ C. $S=\frac{81}{12}$ D. $S=13$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$ (đvdt).





Đáp án A.

15. Thể tích tròn xoay quanh trục hoành: $V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$

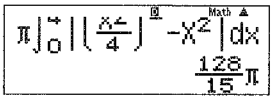
Ví dụ: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ và $y=x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V=\frac{124\pi}{15}$ B. $V=\frac{126\pi}{15}$ C. $V=\frac{128\pi}{15}$ D. $V=\frac{131\pi}{15}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^2}{4}=x\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Thể tích cần tính là $V=\pi\int_0^4\left|\left(\frac{x^2}{4}\right)^2-x^2\right|dx=\frac{128\pi}{15}$ (đvtt).



Đáp án C.

16. Thể tích tròn xoay quanh trục tung: $V=2\pi\int_a^b\left|xf(x)\right|dx$

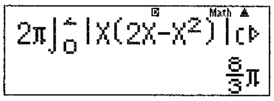
Ví dụ: Cho hình phẳng D giới hạn bởi trục hoành và parabol $(P): y=2x-x^2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục tung.

A. $V=\frac{8\pi}{3}$ B. $V=\frac{7\pi}{3}$ C. $V=\frac{10\pi}{3}$ D. $V=\frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $2x-x^2=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích cần tính là $V_{Oy}=2\pi\int_0^2\left|x\left(2x-x^2\right)\right|dx=\frac{8\pi}{3}$ (đvtt).



Đáp án A.

17. Thể tích của vật thể có thiết diện với diện tích $S(x): V=\int_a^b S(x)dx$

Ví dụ: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ thì ta được thiết diện là một phần tư hình tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}x^2$.

A. $V=32\pi$ B. $V=64\pi$ C. $V=\frac{16}{5}\pi$ D. $V=8\pi$

Lời giải

Thiết diện là $\frac{1}{4}$ hình tròn có bán kính $\sqrt{2}x^2$, nên diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}x^2\right)^2=\frac{1}{2}\pi x^4$ (đvdt).

Thể tích cần tính là $V=\int_0^2\frac{1}{2}\pi x^4\mathrm{d}x=\frac{16}{5}\pi$ (đvdt).

$\int_0^2\frac{1}{2}\pi X^4\mathrm{d}X$ → $\frac{16}{5}\pi$

Đáp án C.

18. Độ dài đường cong: $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$

Ví dụ: Luồng gió thổi ổn định con diều về hướng Tây, chiều cao của con diều phụ thuộc vào vị trí tính theo phương ngang từ $x=0$ đến $x=80$ mét được cho bởi phương trình $y=150-\frac{1}{40}(x-50)^2$. Tìm quãng đường của con diều.

A. 122,776 (mét) B. 122,767 (mét) C. 122,677 (mét) D. 122,771 (mét)

Lời giải

Ta có $y'=-\frac{1}{20}(x-50)$.

Quãng đường của con diều là: $L=\int_0^{80}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{80}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{20}(x-50)\right)^2}\mathrm{d}x\approx 122,776$ (mét).

$\int_0^{80}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{20}(X-50)\right)^2}$ → 122.7761383

Đáp án A.

19. Diện tích mặt cong vật thể tròn xoay trục hoành: $S=2\pi\int_a^b\left|f(x)\right|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x$

Ví dụ: Tính diện tích mặt tròn xoay khi $9y^2=x(3-x)^2$ với $0\le x\le 3$ quay quang trục Ox.

A. 6π B. 3π C. 2π D. π

Lời giải

Ta có $\begin{cases}9y^2=x(3-x)^2\\0\le x\le 3\end{cases}\to y=\pm\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$.

Suy ra đường cong gồm hai nhánh đối xứng nhau qua trục hoành.

Xét đường cong $y=f(x)=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\to f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$.

Diện tích cần tính là: $S=2\pi\int_0^3\left|\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\right|\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\frac{\pi}{3}\int_0^3(3-x)(x+1)\mathrm{d}x=3\pi$ (đvdt).

$\frac{\pi}{3}\int_0^3(3-X)(X+1)\mathrm{d}X$ → 3π

Đáp án B.

VẤN ĐỀ 13: HÀM SỐ BẬC 3 CÓ 2 CỰC TRỊ

Cho hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 cực trị là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. Khi đó ta có các chú ý sau:

1. Điều kiện có 2 cực trị: $\Delta = b^2 - 3ac > 0$

Ví dụ: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$ có hai điểm cực đại, cực tiểu là

A. $m \ge 0$ B. $m > 0$ C. $m \le 0$ D. $m < 0$

Lời giải

Hệ số: $a = 1, b = -3$ và $c = 3(1-m)$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac = (-3)^2 - 3.1.3(1-m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Đáp án B.

2. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\left[\begin{array}{l} b^2 - 3ac \le 0, a > 0 \\ a = b = 0, c > 0 \end{array}\right.$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $\left[\begin{array}{l} b^2 - 3ac \le 0, a < 0 \\ a = b = 0, c < 0 \end{array}\right.$

Ví dụ 1: Giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $-1 < m < 0$ B. $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -1 \end{array}\right.$ D. $-1 \le m \le 0$

Lời giải

Hệ số: $a = \frac{1}{3} > 0, b = m$ và $c = -m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $b^2 - 3ac = m^2 - 3.\frac{1}{3}(-m) \le 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m \le 0 \Leftrightarrow m(m+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$.

Đáp án D.

Ví dụ 2: Giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

A. $-9 < m < 3$ B. $-9 \le m \le -3$ C. $\left[\begin{array}{l} m > -3 \\ m < -9 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} m \ge -3 \\ m \le -9 \end{array}\right.$

Lời giải

Hệ số: $a = -1 < 0, b = -m$ và $c = 4m + 9$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $b^2 - 3ac \le 0$

$\Leftrightarrow (-m)^2 - 3(-1)(4m+9) \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(4m+9) \le 0 \Leftrightarrow (m+3)(m+9) \le 0 \Leftrightarrow -9 \le m \le -3$.

Đáp án B.

3. Đồng biến trên đoạn có độ dài δ: $\begin{cases} a < 0 \\ |x_2 - x_1| = \delta \end{cases}$ và nghịch biến trên đoạn có độ dài δ: $\begin{cases} a > 0 \\ |x_2 - x_1| = \delta \end{cases}$

Ví dụ: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 là

A. $m = 2$ B. $m = 4$ C. $m = -1$ D. $m = 0$

Lời giải

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 $\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - 3m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ (-2)^2 - \frac{4m}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Đáp án D.

4. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là $y=mx+n$ trong đó $mx+n$ là dư thức trong phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$. Thực hiện phép chia $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ cho $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$, ta được thương là $\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}$ và dư thức $-2x-m$.

Tức là $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}\right)y'-2x-m$. Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x-m$.

5. Phương trình đường thẳng qua hai cực trị: $y=-\frac{2(b^2-3ac)}{9a}x+d-\frac{bc}{9a}$

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+7x+3$

Lời giải

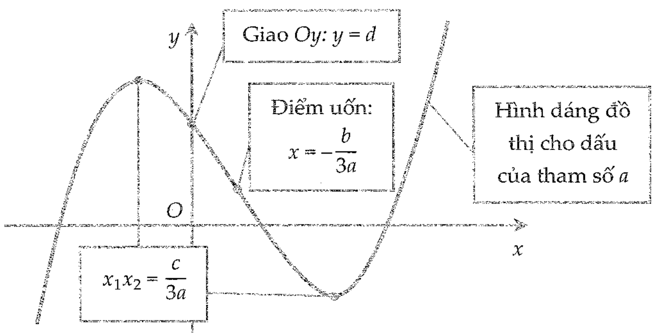
Hệ số: $a=1,b=m,c=7$ và $d=3$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của độ thị hàm số được tính theo công thức $y=-\frac{2(b^2-3ac)}{9a}x+d-\frac{bc}{9a}=-\frac{2(m^2-3.1.7)}{9.1}x+3-\frac{m.7}{9.1}$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{9}(m^2-21)x+3-\frac{7m}{9}\Leftrightarrow y=\left(\frac{14}{3}-\frac{2}{9}m^2\right)x+\frac{27-7m}{9}$.

6. Định lí Viet với cực trị: $x_1+x_2=-\frac{b}{3a}$, $x_1x_2=\frac{c}{3a}$

7. Phương trình bậc 3 có ba nghiệm lập thành cấp số cộng khi có 1 nghiệm là $x=-\frac{b}{3a}$, lập thành cấp số nhân nếu 1 nghiệm là $x=-\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$

Cách nhận diện đồ thị hàm số bậc 3:



1. Để xác định của a ta chú ý đến hình dáng của đồ thị hàm số. Đồ thị đi lên $+\infty$ ở bên phải thì $a>0$. Đồ thị đi xuống $-\infty$ ở bên phải thì $a<0$

2. Để xác định dấu của b ta chú ý vào vị trí của điểm uốn và hoành độ tương ứng là $x=-\frac{b}{3a}$

3. Để xác định dấu của c ta xét tích hai hoành độ cực trị $x_1x_2 = \frac{c}{3a}$. Nếu hai cực trị có hoành độ cùng dấu thì a,c cùng dấu và ngược lại nếu hai cực trị có hoành độ trái dấu thì a,c trái dấu

4. Để xác định dấu của d ta xét vị trí tương giao của đồ thị với trục tung Oy, tại đó tung độ giao điểm chính là $y = d$ để xét dấu

VẤN ĐỀ 14: HÀM SỐ BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG CÓ 3 CỰC TRỊ

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị

1. Điều kiện có ba cực trị: $ab < 0$ (a,b trái dấu)

Ví dụ: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là

A. $m \geq 0$ B. $m \leq 0$ C. $m > 0$ D. $m < 0$

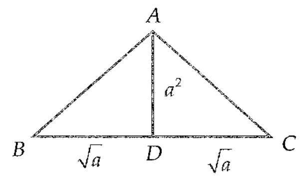
Lời giải

Hệ số: $a = 1, b = -2m$. Hàm số có ba điểm cực trị khi $ab = -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Đáp án C.

2. Luôn có 1 cực trị là $A(0;c)$ và hai cực trị còn lại đối xứng qua trục tung

3. Tam giác tạo thành ba cực trị có các tính chất dưới đây:



* Tam giác ABC vuông cân tại A khi $8a + b^3 = 0$

* Tam giác ABC đều khi $24a + b^3 = 0$

* Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$ khi $8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0$

* Tam giác ABC có diện tích là S_0 khi $32a^3S_0^2 + b^5 = 0$

* Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{abc}{4S}$, bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{2S}{a+b+c}$ (với a,b,c là độ dài các cạnh của tam giác.

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^4 + (m-2015)x^2 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A.

A. $m = 2017$ B. $m = 2014$ C. $m = 2016$ D. $m = 2015$

Lời giải

Hệ số $a = -1, b = m - 2015$ và $c = 2017$. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -(m-2015) < 0 \Leftrightarrow m > 2015$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8(-1) + (m-2015)^3 = 0 \Leftrightarrow (m-2015)^3 = 8 \Leftrightarrow m - 2015 = 2 \Leftrightarrow m = 2017$

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có ba cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = 2015$ B. $m = 2016$ C. $m = 2017$ D. $m = -2017$

Lời giải

Hệ số $a = \frac{9}{8}, b = 3(m-2017)$ và $c = -2016$. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab = \frac{9}{8}.3(m-2017) < 0 \Leftrightarrow m < 2017$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 24a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 24.\frac{9}{8} + 27(m-2017)^3 = 0 \Leftrightarrow m - 2017 = -1 \Leftrightarrow m = 2016$.

Đáp án B.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=3x^4+2(m-2018)x^2+2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng $120°$

A. $m=-2018$ B. $m=-2017$ C. $m=2017$ D. $m=2018$

Lời giải

Hệ số $a=3, b=2(m-2018)$ và $m=2017$.

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab=3.2(m-2018)<0 \Leftrightarrow m<2018$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 8.3+8(m-2018)^3.\tan^2 60° \Leftrightarrow (m-2018)^3=-1$

$\Leftrightarrow m-2018=-1 \Leftrightarrow m=2017$.

Đáp án C.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+4x^2+12$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích $S=4\sqrt{2}$.

A. $m=-2$ B. $m=4$ C. $m=1$ D. $m=-1$

Lời giải

Hệ số $a=m, b=4$ và $c=12$.

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab=m.4<0 \Leftrightarrow m<0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 32a^3.S^2+b^5 \Leftrightarrow 32.m^3.\left(4\sqrt{2}\right)^2+4^5=0$

$\Leftrightarrow m^3=-1 \Leftrightarrow m=-1$.

Đáp án D.

4. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ 9b^2=100ac \end{cases}$

Ví dụ: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^4+2(m+2)x^2-2m-3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=-13$ B. $m=9$ C. $m=3$ D. $m=-1$

Lời giải

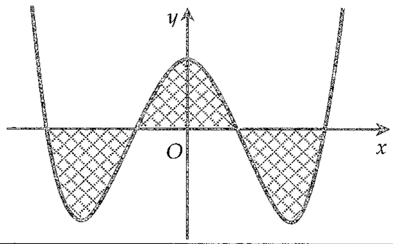
Hệ số $a=-1, b=2(m+2)$ và $c=-2m-3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4ac=4(m+2)^2-4(2m+3)=4m^2+8m+4>0 \\ 2(m+2)>0 \\ 2m+3>0 \\ 9b^2=100ac \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1)^2>0 \\ m>-2 \\ m>-\dfrac{3}{2} \\ 36m^2-56m-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}<m\neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{13}{9} \end{array}\right. \end{cases}$

Đáp án C.

5. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tạo thành ba miền diện tích có diện tích phần trên và diện tích phần dưới bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}>0 \\ 5b^2=36ac \end{cases}$



Ví dụ: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau

A. $m=0$ B. $m=9$ C. $m=\frac{20}{9}$ D. $m=-2$

Lời giải

Hệ số $a=1, b=-4$ và $c=m$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4ac=(-4)^2-4m>0 \\ -\frac{b}{a}=4>0 \\ \frac{c}{a}=m>0 \\ 5b^2=36ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-4m>0 \\ m>0 \\ 5(-4)^2=36m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<4 \\ m=\frac{20}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{20}{9}$.

Đáp án C.

VẤN ĐỀ 15: HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT

Cho hàm số phân thức hữu tỷ bậc nhất trên bậc nhất $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

1. Hàm số đồng biến trên D nếu $ad-bc>0, -\frac{d}{c}\in D$ và nghịch biến trên D nếu $ad-bc<0, -\frac{d}{c}\notin D$.

2. Tiếp tuyến với tiệm cận:

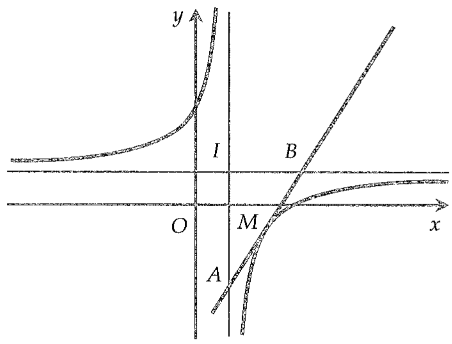
* Tiếp tuyến tại M cắt các tiệm cận tại A và B thì M là trung điểm của AB

* Khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng: $\frac{1}{|c|}|cx_M+d|$

* Khoảng cách từ M tới tiệm cận ngang: $\frac{|ad-bc|}{|c|}\frac{1}{|cx_M+d|}$

* $IA=\frac{|ad-bc|}{|c|}\frac{2}{|cx_M+d|}$ và $IB=\frac{2}{|c|}|cx_M+d|$ với I là giao 2 tiệm cận

* Diện tích tam giác IAB không đổi: $S_{IAB}=\frac{2}{c^2}|ad-bc|$



Đặc biệt chú ý: Điểm M thỏa mãn một trong các yếu tố: Tổng khoảng cách đạt giá trị nhỏ nhất/ Chu vi tam giác IAB nhỏ nhất/ Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất/ Khoảng cách từ I tới tiếp tuyến đạt giá trị lớn nhất thì điểm M đó phải thỏa mãn tính chất: $IA = IB \Leftrightarrow |y'(x_M)| = 1$

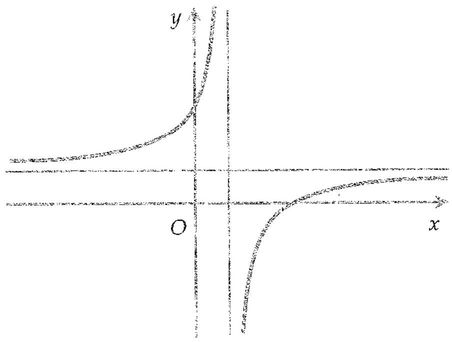
3. Cách nhận diện đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất:

* Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$. Nếu tiệm cận ngang nằm trên Ox thì $ac > 0$ còn nếu nằm dưới thì $ac < 0$

* Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$. Nếu tiệm cận đứng nằm trên Oy thì $cd > 0$ còn nếu bên phải thì $cd < 0$

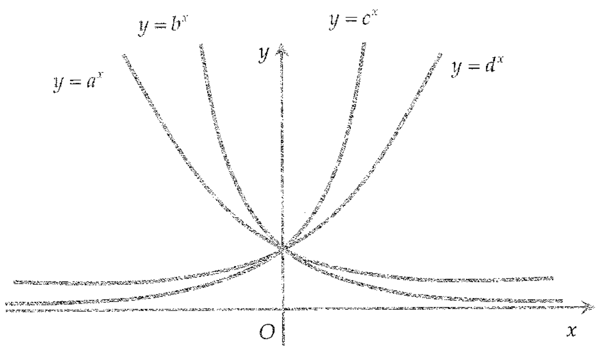
* Giao Oy: $y = \frac{b}{d}$. Nếu giao điểm này nằm trên Ox thì $bd > 0$ còn nếu nằm dưới thì $bd < 0$

* Giao Ox: $x = -\frac{b}{a}$. Nếu giao điểm này nằm bên trái Oy thì $ab > 0$ còn nếu bên phải thì $ab < 0$



VẤN ĐỀ 16: ĐỒ THỊ HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT

Loại 1: Đồ thị hàm số mũ

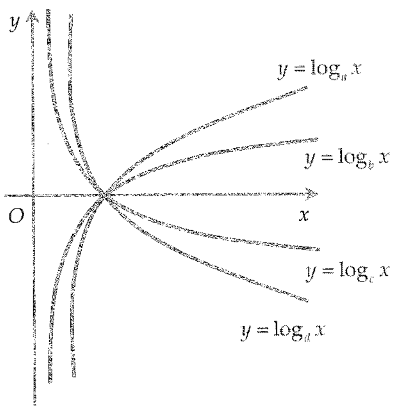


+ Thứ tự: $0 < b < a < 1 < d < c$ (Mẹo: Giao 4 đồ thị với đường thẳng $x = 1$ để đánh giá nhanh nhất)

+ Hàm số $y = a^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$, tập giá trị $E = (0; +\infty)$

+ Đồ thị hàm số $y = a^x$ luôn đi qua điểm $I(0;1)$ và có tiệm cận ngang là trục hoành Ox

Loại 2: Đồ thị hàm số logarit

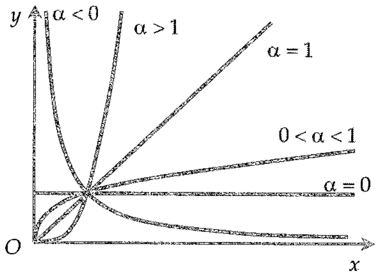


+ Thứ tự: $b > a > 1 > d > c > 0$ (Mẹo: Giao 4 đồ thị với đường thẳng $y = 1$ để đánh giá nhanh nhất)

+ Hàm số $y=\log_a x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$, tập giá trị $E=\mathbb{R}$

+ Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ luôn đi qua điểm $I(0;1)$ và có tiệm cận ngang là trục hoành Oy

Loại 3: Đồ thị hàm số lũy thừa



+ $y=x^{\alpha}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nếu $\alpha\in\mathbb{Z}^+, D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nếu $\alpha\in\mathbb{Z}^-$ và $D=(0;+\infty)$ nếu $\alpha\notin\mathbb{Z}$

+ Đồ thị hàm số $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$

VẤN ĐỀ 17: CÁC BÀI TOÁN LÃI SUẤT CƠ BẢN CẦN BIẾT

1. Bài toán 1: Đem số tiền a đi gửi ngân hàng thu được số tiền $P=a(1+r\%)^n$

Ví dụ 1: Bạn An gửi tiết kiệm số tiền 58.000.000 đồng trong 8 tháng tại một ngân hàng thì nhận được 61.329.000 đồng. Khi đó lãi suất hàng tháng là

A. 0,6% B. 6% C. 0,7% D. 7%

Lời giải

Gọi lãi suất hàng tháng là r%. Khi đó $61329000=58000000(1+r)^8 \Leftrightarrow r=\sqrt[8]{\frac{61329}{58000}}-1=0,7\%$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm, người đó thu được gấp ba số tiền ban đầu

A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

Lời giải

Gọi số tiền ban đầu gửi ngân hàng là A. Sau n năm người đó nhận được số tiền là:

$3A=A(1+0,06)^n \Leftrightarrow (1,06)^n=3 \Leftrightarrow n=\log_{1,06}3\approx 19$ (năm).

Đáp án C.

2. Bài toán 2: Đem số tiền a hàng tháng đi gửi ngân hàng thu được số tiền $P=a(1+r\%)\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}$

Ví dụ: Muốn có 100 triệu sau 2 năm thì mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng bao nhiêu, biết lãi suất là 0,6%/tháng?

A. 3863151 đồng B. 3863152 đồng C. 3863150 đồng D. 3863153 đồng

Lời giải

Gọi a là số tiền gửi hàng tháng. Áp dụng công thức $P=a(1+r\%)\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}$ ta có

$$a=\frac{P.r\%}{(1+r\%)\left[(1+r\%)^n-1\right]}=\frac{100000000.0,6\%}{(1+0,6\%)\left[(1+0,6\%)^{24}-1\right]}=3863151,317 \text{ đồng.}$$

Nếu $a = 3863151$ đồng thì thì số tiền người đó nhận được sau 2 năm là

$$P = 3863151.(1+0,6\%)\frac{(1+0,6\%)^{24}-1}{0,6\%} = 99999991,79 \text{ triệu.}$$

Như vậy nếu hàng tháng gửi 3863151 đồng thì sau 2 năm chỉ nhận được gần 100 triệu đồng. Vậy nên đáp án phải là 3863152 đồng (thà gửi dư chứ không thể gửi thiếu).

Đáp án B.

3. Bài toán 3: Vay số tiền P dưới hình thức trả góp và hàng tháng đi trả ngân hàng khoản tiền a thì:

+ Số tiền còn lại trong ngân hàng sau n tháng là: $Q = P(1+r\%)^n - a\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}$

+ Khi hoàn thành trả góp thì ta giải phương trình: $P(1+r\%)^n = a\frac{(1+r\%)^n-1}{r\%}$

Ví dụ: Một người vay 50 triệu, trả góp theo tháng trong vòng 48 tháng, lãi là 1,15%/tháng. Hỏi hàng tháng người đó phải trả bao nhiêu?

A. 1361312,807 đồng B. 1361313,807 đồng C. 1361310,807 đồng D. 1361311,807 đồng

Lời giải

Sau 48 tháng người đó trả hết nợ, tức là $0 = 50000000(1+1,15\%)^{48} - a\frac{(1+1,15\%)^{48}-1}{1,15\%}$

$$\Leftrightarrow a = \frac{50000000(1+1,15\%)^{48}.1,15\%}{(1+1,15\%)^{48}-1} = 1361312,807 \text{ đồng.}$$

Đáp án A.

VẤN ĐỀ 18: CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. $ax^2+bx+c \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \le 0, a > 0$ và $ax^2+bx+c \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \le 0, a < 0$

2. $ax^2+bx+c \ge 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0, a > 0$ hoặc $a,b,c \ge 0$

   $ax^2+bx+c \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0, a < 0$ hoặc $a,b,c \le 0$

3. $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt dương khi $\Delta > 0, S > 0, P > 0$

   $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt âm khi $\Delta > 0, S < 0, P > 0$

   $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm trái dấu khi $P < 0$

4. $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < \alpha$ khi $\Delta > 0, (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0, x_1+x_2 < \alpha$

   $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $\alpha < x_1 < x_2$ khi $\Delta > 0, (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0, x_1+x_2 > \alpha$

   $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$ khi $\Delta > 0, (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) < 0$

5. $m = f(x)$ có nghiệm trên D khi $m \in \left[\min_D f(x); \max_D f(x)\right]$; $m \ge f(x)$ có nghiệm trên D khi $m \ge \min_D f(x)$; $m \le f(x)$ có nghiệm trên D khi $m \le \max_D f(x)$.

6. $m \ge f(x), \forall x \in D$ khi $m \ge \max_D f(x)$; $m \le f(x) \forall x$ khi $m \le \min_D f(x)$.

Cuối cùng, toàn thể ĐẠI GIA ĐÌNH LOVEBOOK muốn gửi riêng tới các em học sinh:

Nhất định các em sẽ làm được
Đừng bao giờ nản chí các em nhé!

